

Circle action と 3-orbifold 群

福田瑞季 (MathAM-OIL・東北大学)
(石川昌治氏 (慶應義塾大) との共同研究)

1 導入

多様体を 1 つ固定したとき, その上にどのような circle action が許容されるかという問題は重要なテーマの一つである. 例えば, ホモトピー $2n+1$ -球面上の pseudo-free circle action は, $n=1$ のときは高々 2 個の exceptional orbit をもち [25], $n \geq 3$ のときは任意の自然数 k に対して k 個の exceptional orbit をもつものが存在する [17, 23]. $n=2$ のときは Montgomery と Yang によって exceptional orbit は高々 3 個であるという予想がなされていて, 未解決である [14, Conjecture 30]. 一方で $2n$ 次元球面はオイラー数が 0 ではないため, $2n$ 次元球面上の circle action は固定点を必ずもつ. 4 次元球面上の circle action については Montgomery と Yang, Fintushel, Pao の結果により分類が完了している [16, 7, 19].

閉 3 次元多様体において circle action を許容するものは Seifert manifold と呼ばれ, 多様体の幾何構造の一つを特徴づけている重要な性質である [13, 24]. 結び目補空間で circle action を許容する結び目はトーラス結び目であり, 特にトーラス結び目は circle action で (集合として) 不変な集合である [2]. この性質を 2 次元の結び目に拡張したもの, つまり 4 次元球面に滑らかに埋め込まれた 2 次元球面であって, circle action で不変なもの, を branched twist spin という. この branched twist spin は 1 次元結び目 K と互いに素な自然数の組 (m, n) ($m > n$) もしくは $(0, 1)$ によって 1 つ構成することができるので $K^{m,n}$ と表す (詳細な定義は §3.1 を参照).

1 次元結び目 K_1 と K_2 が同値であるとは, S^3 上の微分同相写像 $f: S^3 \rightarrow S^3$ で $f(K_1) = K_2$ となるものが存在するときをいう. 同様に, 2 次元結び目 F_1 と F_2 が同値であるとは, S^4 上の微分同相写像 $f: S^4 \rightarrow S^4$ で $f(F_1) = F_2$ となるものが存在するときをいう.

これまでの研究で, $m_1 \neq m_2$ のとき $K_1^{m_1,n}$ と $K_2^{m_2,n}$ は同値でないこと [9], m が 3 以上の奇数であれば $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ が同値でないことがわかっている [8]. 本稿では (m, n) を固定したときの branched twist spin の同値性に対して次の 2 つが成り立つことを説明する.

定理 1.1 ([10]). m を 3 以上の自然数とし, K_1 と K_2 を素な 1 次元結び目で, トーラス結び目ではないとする. このとき, $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であることと K_1 と K_2 が同値であることは必要十分である.

定理 1.2 ([10]). K_1 と K_2 を素なサテライト結び目, もしくは Conway reducible とする. このとき, $K_1^{2,1}$ と $K_2^{2,1}$ が同値であることと K_1 と K_2 が同値であることは必要十分である.

ここで、1次元結び目が *Conway reducible* であるとは、その補空間内に本質的な4つ穴開き球面が存在するときをいう。

注意として、 $m = 0$ のとき、 $K^{0,1}$ は Artin の spun knot である [1]. Spun knot の結び目群は K の結び目群と同型なので、結び目補空間予想の解決により全ての素な1次元結び目の spun knot に対して定理 1.1 の主張は成立する [11]. また、 $m = 1$ のとき、 $K^{1,1}$ は Zeeman の 1-twist spun knot であり、 K によらず自明な2次元結び目になる [28]. したがって定理 1.1 と定理 1.2 を合わせると、 K が素なサテライト結び目の場合は $K^{m,n}$ の分類は完全に解決したことになる. トーラス結び目と合成結び目に関しては Hillman の preprint を参照されたい [12].

2 Circle action

多様体 M 上の circle action に対し、orbit は固定部分群によって次の3つに分けられる.

- free orbit (固定部分群が自明),
- exceptional orbit (固定部分群が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ($m \geq 2$)),
- fixed point (固定部分群が S^1).

特に 固定部分群が $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の exceptional orbit を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -タイプといい m をその位数という.

4次元球面上の circle action を説明するために、最初に奇数次元の球面について具体例を2つ紹介する.

2.1 奇数次元球面上の circle action

$2n - 1$ 次元球面 $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$ を $\mathbb{C}^n$ 内の単位球面とみなし、 $S^1 = \{(e^{\sqrt{-1}\theta}) \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ が作用するものとする.

例 2.1. ($\mathbb{C}^*$ -action の S^{2n-1} への制限)

次で定義される circle action $S^1 \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ を考える.

$$e^{\sqrt{-1}\theta}(z_1, \dots, z_n) = (e^{\sqrt{-1}\theta}z_1, \dots, e^{\sqrt{-1}\theta}z_n).$$

この circle action は固定点を持たず、全ての orbit は free である. これは斉次座標 $[z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^{n-1}$ の定義で用いられる $\mathbb{C}^*$ -action を S^{2n-1} に制限した action の orbit に対応している. よって、この action による orbit space は $\mathbb{C}P^{n-1}$ である.

例 2.2. (weighted $\mathbb{C}^*$ -action の S^{2n-1} への制限)

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は n 個の自然数で、 $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$ を満たすとする. 次で定義される circle action $S^1 \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ を考える.

$$e^{\sqrt{-1}\theta}(z_1, \dots, z_n) = (e^{\sqrt{-1}a_1\theta}z_1, \dots, e^{\sqrt{-1}a_n\theta}z_n).$$

特に $a_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) のときは例 2.1 の circle action である. 全ての a_i が 1 より大きいとき、 $\{z_i = 0\}$ ($i = 1, \dots, n$) の点を通る orbit は exceptional となり、 $\{z_1 \cdots z_n \neq 0\}$ では free となる. 次の Figure 1 は $n = 2$, $a_1 = 7$, $a_2 = 30$ としたときの total space

(左) と orbit space (右) を表している. このとき, 例 2.1 同様に, orbit space は位相的には $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ と同相になるが, exceptional orbit の像に対応する 2 点が特別な点として現れる. 注意として, $z_1 = 0$ での exceptional orbit の位数は $a_2 = 30$, $z_2 = 0$ での exceptional orbit の位数は $a_1 = 7$ である.

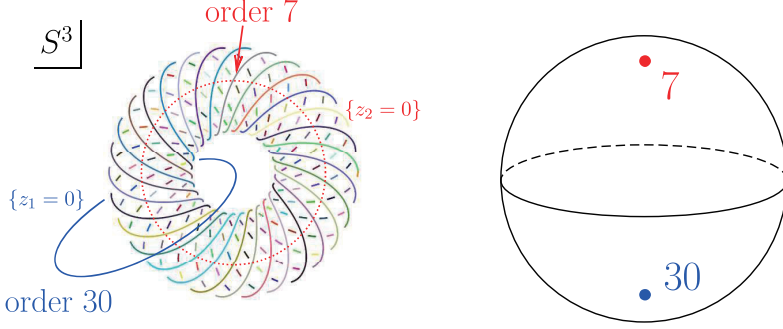


Figure 1: Weight $(7, 30)$ の circle action

2.2 4次元球面上の circle action

4次元球面上の circle action は Montgomery と Yang, Fintushel, Pao によって分類が与えられている. Montgomery と Yang, Fintushel は ホモトピー 4-球面上の circle action の分類を行い, Pao によってそのようなホモトピー 4-球面は実際に 4次元球面と微分同相であることが示された. 次の定理はその結果をまとめたものである.

定理 2.3. (Montgomery-Yang [16], Fintushel [7], Pao [19]) m, n を互いに素な 2 以上の自然数とする. 4次元球面上の circle action は次の 4 つのタイプに分類される.

- (1) $\{D^3\}$, (2) $\{S^3\}$, (3) $\{S^3, m\}$, (4) $\{(S^3, K), m, n\}$.

定理 2.3 に現れる D^3, S^3 は orbit space を表し, m, n は exceptional orbit の位数を表す. また, K は exceptional orbit と fixed point を合わせた集合の action による像である. (1) から (4) のタイプに対応する circle action を具体的に紹介する.

- (1) $\{D^3\}$.

S^4 を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C} = \{((x_1, x_2, x_3), z) \mid x_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$ 内の単位球面とする. このとき, 次の circle action $S^1 \times S^4 \rightarrow S^4$ を考える.

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x_1, x_2, x_3), z) = ((x_1, x_2, x_3), e^{\sqrt{-1}\theta}z).$$

この action では, $\{z = 0\}$, すなわち $\{((x_1, x_2, x_3), 0) \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1\} \cong S^2$ を通る orbit は fixed point であり, $\{z \neq 0\}$, すなわち $\{((x_1, x_2, x_3), z) \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1 - |z|^2, |z| \in (0, 1]\}$ を通る orbit は free である (例 2.1). 定義から circle action の影響は z のみであり, $|z|$ は不変である. したがって, free orbit の action による像は $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1 - |\text{Re}z|^2, \text{Re}z \in (0, 1]\}$ であり, これは open 3-ball と同相である. 境界が fixed point set の像と一致することから, orbit space は D^3 となる.

(2) $\{S^3\}$.

S^4 を $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 = \{(x, (z_1, z_2)) \mid x \in \mathbb{R}, z_i \in \mathbb{C}\}$ 内の単位球面とする. このとき, 次の circle action $S^1 \times S^4 \rightarrow S^4$ を考える.

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x, (z_1, z_2))) = (x, (e^{\sqrt{-1}\theta} z_1, e^{\sqrt{-1}\theta} z_2)).$$

この action では, $\{z_1 = 0, z_2 = 0\}$, すなわち $\{x = \pm 1\}$ の 2 点は fixed point となる. $S^4 \cap \{x = t \mid t \in (-1, 1)\}$ は 3 次元球面であり, その上の circle action は $\mathbb{C}^*$ -action を S^3 に制限したものである. よって, 例 2.1 でみたように, $\{x \neq \pm 1\}$ の点を通る orbit は free である.

(3) $\{S^3, m\}$.

(2) と同じ座標系で次の circle action $S^1 \times S^4 \rightarrow S^4$ を考える.

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x, (z_1, z_2))) = (x, (e^{\sqrt{-1}m\theta} z_1, e^{\sqrt{-1}\theta} z_2)).$$

この action では, (2) と同様に $\{x = \pm 1\}$ の 2 点は fixed point となる. $S^4 \cap \{x = t \mid t \in (-1, 1)\}$ は 3 次元球面であり, その上の circle action は weighted $\mathbb{C}^*$ -action を S^3 に制限したものである. よって 例 2.2 でみたように, $\{z_1 \neq 0, z_2 = 0\}$ の点を通る orbit は, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -タイプの exceptional orbit であり, $\{x \neq \pm 1, z_2 \neq 0\}$ を通る orbit は free である (Figure 2). 各 t に対して weighted $\mathbb{C}^*$ -action を S^3 に制限したものになっていることに注意すると, orbit space は S^2 から 2 つの固定点のそれぞれに corn を取ったもの, つまり S^3 である. 特に exceptional orbit の像は S^3 内で固定点をつなぐ open arc である.

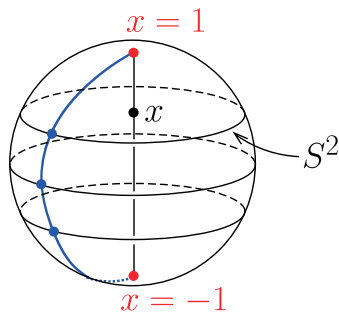


Figure 2: $\{S^3, m\}$ に対応する action の orbit space

(4) $\{(S^3, O), m, n\}$, O : 自明な 1 次元結び目.

(2) と同じ座標系で次の circle action $S^1 \times S^4 \rightarrow S^4$ を考える.

$$e^{\sqrt{-1}\theta}((x, (z_1, z_2))) = (x, (e^{\sqrt{-1}m\theta} z_1, e^{\sqrt{-1}n\theta} z_2)).$$

この action では, (3) と同様に, $\{x = \pm 1\}$ の 2 点は fixed point であり, $S^4 \cap \{x = t \mid t \in (-1, 1)\}$ は 3 次元球面, その上の circle action は weighted $\mathbb{C}^*$ -action を S^3 に制限したものである. $\{z_1 \neq 0, z_2 = 0\}$ の点を通る orbit は, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -タイプ

の exceptional orbit であり, $\{z_1 = 0, z_2 \neq 0\}$ の点を通る orbit は, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -タイプの exceptional orbit である. また, $\{x \neq \pm 1, z_1 z_2 \neq 0\}$ の点を通る orbit は free である. (3) と同様に orbit space は S^3 であり, exceptional orbit の像は固定点をつなぐ 2 つの disjoint な open arc である. 特に S^3 が S^2 から 2 つの固定点への corn として得られていることに注意すると, 固定点と exceptional orbit 全体の像の和集合 O は自明な結び目である.

(4) では 自明な結び目 O に対する circle action の構成を説明したが, Fintushel は任意の 1 次元結び目 K が circle action の固定点とそれを結ぶ exceptional orbit の像の和集合となる (Figure 3) ホモトピー 4-球面上の circle action を構成した [7]. その後 Pao によってそのホモトピー 4 球面は S^4 と微分同相であることが示されている [19].

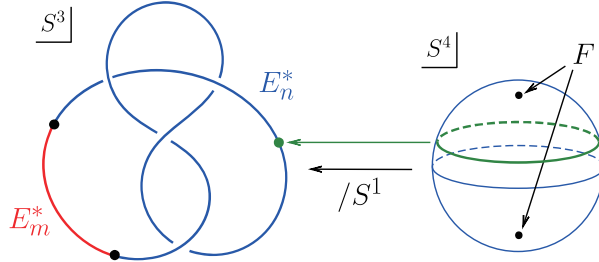


Figure 3: $\{(S^3, K), m, n\}$ に対応する action

3 Branched twist spin と orbifold

この章では定理 2.3 の (4) を用いて branched twist spin を定義し, その性質を述べた後に orbifold との関係について述べる.

3.1 Branched twist spin

定理 2.3 の (4) に対応する circle action を 1 つ固定する. 今, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -タイプと $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -タイプの exceptional orbit が存在するので, $E_m, E_n \subset S^4$ をそれぞれ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -タイプ, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -タイプの exceptional orbit 全体の集合とする. また, 固定点集合を F とする. これらの circle action による像をそれぞれ E_m^*, E_n^*, F^* と書く. 定義から $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ である. E_n は E_n^* の action による逆像なので, annulus と同相である. $E_n^* \cup F^*$ は連結なので, $E_n \cup F$ は 2 次元球面と同相であり, 実際微分同相になる.

定義 3.1. $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ を 1 次元結び目とする. このとき, $E_n \cup F$ を (m, n) -branched twist spin といい, $K^{m,n}$ と書く. また, $K^{0,1}$ を spun knot として定義する.

注意として, $K^{0,1}$ に対応する circle action は $\{D^3\}$ である. また, $K^{m,1}$ は twist spun knot で, 対応する circle action は $\{S^3\}$ ($m = 1$) または $\{S^3, m\}$ ($m > 1$) である.

次の Pao の定理によって branched twist spin はファイバー結び目であることが知られている.

定理 3.2 ([19]). m, n を互いに素な自然数とする. このとき局所自明なファイブレーション

$$f : S^4 \setminus \text{IntNbd}(K^{m,n}) \rightarrow S^1$$

が存在する. このファイブレーションのファイバーは S^3 の K に沿った m 重分岐被覆から open 3-ball を 1 つ取り除いた多様体で, モノドロミーは分岐被覆の基本領域を n ずらす周期的なものである.

3.2 結び目群 と orbifold 群

Branched twist spin の結び目群と orbifold 群との関係を説明するために, orbifold に関する用語をいくつか述べる. 詳細な orbifold の説明に関しては, 例えば [3, 4, 5]などを参照されたい.

n -orbifold とは, 連結で可分な距離空間であって, 局所的には $\mathbb{R}^n$ を有限群で割った商空間と同相になるものをいう. 特に 3-orbifold で, ramification locus が単純閉曲線の和集合となっているものを *cyclic type* という [3, 6]. Cyclic type の 3-orbifold が *sufficiently large* であるとは, 向きづけ可能で圧縮不可能かつ境界圧縮不可能な 2-suborbifold が存在するときをいう.

3-orbifold $\mathcal{O}$ の Deck 変換群を $\pi_1^{orb} \mathcal{O}$ と書く. L を S^3 内の 1 次元絡み目とし, m を 2 以上の自然数とする. Cyclic type の 3-orbifold のうち, underlying space が S^3 , ramification locus が L , その位数が m であるものを $\mathcal{O}(L, m)$ と書く. このとき, $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L, m))$ は L の絡み目群の表示 $\langle x_1, \dots, x_u \mid r_1, \dots, r_v \rangle$ を用いて

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L, m)) \cong \langle x_1, \dots, x_u \mid r_1, \dots, r_v, \mu_1^m, \dots, \mu_{|L|}^m \rangle$$

と表示できる. ここで, $|L|$ は L の成分数であり, μ_i は L の i 番目の成分のメリディアンである.

$M_m(L)$ を S^3 の L に沿った m 重分岐被覆とすると, 被覆写像 $M_m(K) \rightarrow \mathcal{O}(K, m)$ は, 単射準同型 $\pi_1(M_m(K)) \rightarrow \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ を誘導する (cf. [4, Proposition 2.5]).

次に紹介する竹内氏の定理は *sufficiently large* である orbifold の剛性を示すものである.

定理 3.3 ([26] Theorem 8.1). L_1 と L_2 を S^3 内の素な絡み目で, ある 2 以上の自然数 r に対して $\mathcal{O}(L_i, r)$ は *sufficiently large* であると仮定する. このとき, L_1 と L_2 が同値であることと, ある 2 以上の自然数 m に対して $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L_1, m))$ と $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L_2, m))$ が同型であることは必要十分である.

注意として, ある 2 以上の自然数 r に対して $\mathcal{O}(L, r)$ が *sufficiently large* であるとき, 任意の自然数 r に対して $\mathcal{O}(L, r)$ が *sufficiently large* である.

Cyclic type の 3-orbifold の幾何構造の決定は Boileau と Porti によって完全に解決している [3]. この事実と向きづけ可能な Euclidean と spherical orbifold の分類と合わせて次の帰結を得る.

定理 3.4 ([3] Corollary 5). コンパクトで向きづけ可能で既約な 3 次元多様体を M とし, その中の双曲絡み目を L とする. 3 以上の m に対して, M の L に沿った m 重分岐被覆は, $m = 3$ かつ $M = S^3$ かつ L が 8 の字結び目の場合を除き, 双曲構造をもつ.

Branched twist spin の補空間 $S^4 \setminus K^{m,n}$ は $K^{m,n}$ の構成から E_m と free orbit 全体の集合の和集合である。Free orbit の集合は $S^3 \setminus K$ の action による逆像なので、 $(S^3 \setminus K) \times S^1$ であり、 $\{*\} \times S^1$ は free orbit である。よって、 $K^{m,n}$ の結び目群 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong (\pi_1(S^3 \setminus K) \times \langle h \rangle) / \langle \mu^m h^\beta \rangle \quad (3.1)$$

である。ここで、 μ は K のメリディアンであり、 h は free orbit である。また、 β は $n\beta \equiv 1 \pmod{m}$ となる整数である。今、 K の Wirtinger 表示を $\langle x_1, \dots, x_l \mid r_1, \dots, r_l \rangle$ とすると、 $x_1 = \mu$ と仮定でき、(3.1) は

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong \langle x_1, \dots, x_l, h \mid r_1, \dots, r_l, x_i h x_i^{-1} h^{-1}, x_1^m h^\beta \rangle \quad (3.2)$$

と表示できる。結び目群は次の性質を満たす。

補題 3.5. m を 2 以上の自然数とし、 K を非自明な結び目でトーラス結び目ではないとする。また、 $M_m(K)$ は aspherical であると仮定する。このとき、 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心は (3.2) の h が生成する無限巡回群 $\langle h \rangle$ であり、

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) / \langle h \rangle \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$$

は $K^{m,n}$ の不変量である。 K が自明な 1 次元結び目のとき、 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は $\mathbb{Z}$ と同型であり、その中心と一致する。

証明. K が自明な 1 次元結び目とすると、任意の m, n に対して $K^{m,n}$ のファイバーは $M_m(K)$ から open 3-ball を 1 つ取り除いた多様体であり、3 次元球体となる。よって $K^{m,n}$ は自明な結び目であり、特に $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は $\mathbb{Z}$ である。

以下 K は非自明でトーラス結び目でないと仮定する。また $M_m(K)$ は aspherical であると仮定する。このとき $\pi_1^{orb}(K, m)$ の中心は自明になることが示せる。

式(3.2) から、 h は $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心の元であることは明らかである。 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心が $\langle h \rangle$ であることを示す。今、 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心の非自明な元 y で、 $x_1, \dots, x_l$ の積で書けるが、 $x_1^m, \dots, x_l^m$ の積では書けないものが存在すると仮定する。このとき、 $yx_i y^{-1} x_i^{-1} = 1$ ($i = 1, \dots, l$) なので、 h も中心の元であることを考慮すると、 $yx_i y^{-1} x_i^{-1}$ から 1 に変形する Tietze 変換の列で、 h を含まないものが存在する。 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ 内の変換の列は $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の Tietze 変換とワードに $x_1^m, \dots, x_l^m$ を差し込む操作で得られるので、 $yx_i y^{-1} x_i^{-1}$ は $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ で自明になる。したがって y は $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の中心の元であって、 $x_1^m, \dots, x_l^m$ の積で書けないので非自明である。これは $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ の中心が自明になることに矛盾する。以上により $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心の非自明な元が存在すれば、それは $x_1^m, \dots, x_l^m$ の積でかけるが、関係子 $x_1^m h^\beta$ によってその元は h で書ける。よって、 $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ の中心は $\langle h \rangle$ であり、 $h = 1$ を (3.2) に代入すると $\langle x_1, \dots, x_l \mid r_1, \dots, r_l, x_1^m \rangle$ となり、主張は示せた。

□

4 定理 1.1 と定理 1.2 の証明の概略

これまでに紹介した $K^{m,n}$ に関する性質と $M_m(K)$ や $\mathcal{O}(K, m)$ に関する事実を用いて定理 1.1 と定理 1.2 の証明の概略を説明する。

証明 (定理 1.1). 仮定から K_1 と K_2 はトーラス結び目ではないので, 双曲結び目かサテライト結び目のいずれかである. K_1 と K_2 の結び目のクラスに分けて証明を行う.

- (1) K_1 : 自明な結び目, K_2 : 非自明な結び目.

$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると, それぞれのファイバーは $M_m(K_1)$ と $M_m(K_2)$ から open 3-ball を 1 つ取り除いた多様体であり, 基本群 $\pi_1(M_m(K_1))$ と $\pi_1(M_m(K_2))$ は同型になる. $M_m(K_1)$ は S^3 なので, $\pi_1(M_m(K_2))$ は自明な群である. したがって, Poincaré conjecture の解決によって $M_m(K_2)$ も S^3 になる [20, 21, 22]. しかし Smith conjecture の解決によって $M_m(K_2)$ は S^3 になり得ない [18]. したがって $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない.

- (2) K_1 : 双曲結び目, K_2 : 双曲結び目.

$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると, (1) と同様に $\pi_1(M_m(K_1))$ と $\pi_1(M_m(K_2))$ も同型となる. 定理 3.4 によって, Mostow の剛性定理から $m = 3$ かつ 8 の字結び目を除いて K_1 と K_2 は同値になる.

今, $m = 3$ とし, K_1 を 8 の字結び目, K_2 を 8 の字結び目でない双曲結び目とする. このとき, $M_m(K_1)$ は Hantzsche-Wendt 多様体 と呼ばれる多様体で, 断面曲率が常に 0 となるリーマン計量をもつ [15, 27]. $M_m(K_1)$ は T^3 を被覆にもつが, $M_m(K_2)$ は双曲多様体なのでその被覆の基本群は $\pi_1(T^3)$ と同型にならない. よって $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない.

- (3) K_1 : サテライト結び目, K_2 : サテライト結び目.

サテライト結び目 K に対して, その補空間の本質的トーラスは $\mathcal{O}(K, m) \setminus K$ 内の本質的トーラスを誘導する. よって $\mathcal{O}(K_1, m)$ と $\mathcal{O}(K_2, m)$ はそれぞれ sufficiently large である. $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると, 補題 3.5 により $\pi_1(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1(\mathcal{O}(K_2, m))$ は同型なので, 定理 3.3 より K_1 と K_2 は同値である.

- (4) K_1 : 双曲結び目, K_2 : サテライト結び目.

まず $m \geq 3$ または $m = 3$ かつ K_1 が 8 の字結び目以外の結び目であるときを考える. $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると, 補題 3.5 より $\pi_1(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1(\mathcal{O}(K_2, m))$ は同型である. さらに, K_2 はサテライト結び目なので $\mathcal{O}(K, m) \setminus K$ 内の本質的トーラスを誘導するので, $\pi_1(\mathcal{O}(K_2, m))$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を部分群にもつ. 一方, 定理 3.4 より $\pi_1(\mathcal{O}(K_1, m))$ は双曲構造をもつので $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を部分群にもたない. これは矛盾であり, したがって $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない.

$m = 3$ かつ K_1 が 8 の字結び目のとき, Hantzsche-Wendt 多様体 $M_m(K_1)$ はその基本群の部分群として $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ をもつ. よって, $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると, $\pi_1(M_m(K_2))$ も $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を部分群にもつ. 3次元多様体 M で, その基本群の部分群に $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ もつとき, 被覆写像 $T^3 \rightarrow M$ が存在することが知られている [15]. この被覆写像と m 重分岐被覆の写像の合成によって, $S^3 \setminus K$ の本質的トーラスの逆像を考えると, T^3 を 2 つの成分に分解する本質的トーラスが存在する. これは矛盾である. ゆえに $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は同値でない. $\square$

証明 (定理 1.2). 1次元結び目 K が satellite または Conway reducible のとき, $\mathcal{O}(K, m)$ は sufficiently large である. よって, $K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ が同値であると仮定すると, 補題 3.5 により $\pi_1(\mathcal{O}(K_1, m))$ と $\pi_1(\mathcal{O}(K_2, m))$ は同型であって, 定理 3.3 より K_1 と K_2 は同値である. $\square$

References

- [1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R^4* , Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 174–177.
- [2] G. Burde and H. Zieschang, *Eine Kennzeichnung der Torusknoten*, Math. Ann. **167** (1966), 169–176.
- [3] M. Boileau and J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, Astérisque, no. 272 (2001), 208 pp.
- [4] M. Boileau, S. Maillot and J. Porti, Three-dimensional orbifolds and their geometric structures, Panoramas et Synthèses, 15, Société Mathématique de France, Paris, 2003. viii+167 pp.
- [5] M. Boileau, B. Leeb and J. Porti, *Geometrization of 3-dimensional orbifolds*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 1, 195–290.
- [6] M.W. Davis and J.W. Morgan, *Finite group actions on homotopy 3-spheres*, The Smith conjecture (New York, 1979), 181–225, Pure Appl. Math., 112, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [7] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), no. 1, 63–70.
- [8] M. Fukuda, *Gluck twists along 2-knots with periodic monodromy*, arXiv:1811.05109 [math.GT]
- [9] M. Fukuda, *Representations of branched twist spins with a non-trivial center of order 2*, arXiv:2209.11583 [math.GT]
- [10] M. Fukuda, M. Ishikawa, *Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups*, arXiv:2304.06276v4 [math.GT]
- [11] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 2, 371–415.
- [12] J.A. Hillman, *The groups of branched twist-spun knots*, arXiv:2305.00443 [math.GT]
- [13] R. Jacoby, *One parameter transformation groups on the 3-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7**(1956), 131–140.
- [14] J. Kollár. *Is there a topological Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality?*, Pure Appl. Math. Q., **4** (2) (2008), 203236.
- [15] E. Luft, and D. Sjerpe, *3-manifolds with subgroups $Z \oplus Z \oplus Z$ in their fundamental groups*, Pacific J. Math. **114** (1984), no. 1, 191–205.
- [16] D. Montgomery, C.T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension $n-3$. I, II*, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517; **5** (1960), 206–211.

- [17] D. Montgomery, C.T. Yang, *Differentiable pseudo-free circle actions on homotopy seven spheres*, Proc. of the Second Conference on Compact Transformation Groups (Univ. Massachusetts, Amherst, Mass., 1971), Part I, Springer, 1972, pp. 41–101. Lecture Notes in Math., **298**.
- [18] W. Morgan, H. Bass, *The Smith conjecture*, Papers presented at the symposium held at Columbia University, New York (1979)., Pure and Applied Mathematics, **112**. Academic Press, Orlando, FL (1984), xv+243 pp.
- [19] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology, **17** (3) (1978), 291–296.
- [20] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159.
- [21] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109.
- [22] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245.
- [23] T. Petrie, *Equivariant quasi-equivalence, transversality, and normal cobordism*, Proc. Int. Cong. Math., Vancouver (1974), 537–541.
- [24] F. Raymond, *Classification of the actions of the circle on 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **131** (1968), 51–78.
- [25] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume*, Acta Math. **60** (1932), 147–238.
- [26] Y. Takeuchi, *Waldhausen’s classification theorem for finitely uniformizable 3-orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), no. 1, 151–200.
- [27] J.A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney, 1967, xv+408 pp.
- [28] E.C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.

Mathematics for Advanced Materials Open Innovation Laboratory, AIST, c/o AIMR,
 Tohoku University,
 Miyagi 980-8677
 JAPAN
 E-mail address: mizuki.fukuda.d2@tohoku.ac.jp

MathAM-OIL / 東北大学 福田瑞季