

群の直積とその表現について

東京教育大 大学院 光 道隆

§0. 序

例えば次の様な問題を考えよう。“ π を finite abelian group, $\mathbb{Q}$ を有理数体, $\mathbb{Z}$ を有理整数環, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Z}\pi$ を含む $\mathbb{Q}\pi$ の maximal order とする。その時, $\text{Pic}(\mathbb{Z}\pi) \xrightarrow{\varphi} \text{Pic}(\mathcal{O})$ の $\text{Ker } \varphi$ はどのように捕らえられるか?” この問題に関して R.G. Swan, 宮田武彦氏により次の結果がえられている。 π の subgroup π' に対し $\mathbb{Z}\pi \otimes_{\mathbb{Z}\pi'} \mathbb{Z}$ という型の $\mathbb{Z}\pi$ -module の有限個の direct sum を permutation π -module, π -permutation module $\exists S, \exists S', 0 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow S' \rightarrow 0$ (exact) と書ける $\mathbb{Z}\pi$ -module M を quasi-permutation $\mathbb{Z}\pi$ -module とよぶ時, π が cyclic group ならば, $\text{Ker } \varphi = \text{q-pic}(\mathbb{Z}\pi) = \{[I] \mid I; \text{quasi-permutation } \mathbb{Z}\pi\text{-projective ideal}\}$ である。ところで, π が abelian group の時 $\text{q-pic}(\mathbb{Z}\pi) \subset \text{Ker } \varphi$ は, Swan の方法により容易に証明できるが, その逆が言えるか

どうか問題である。宮田氏のうまい方法により *cyclic* の時は分っているのだから, *abelian group* の時の問題が *cyclic* の時に帰着できればと望むのは自然であろう。その様な事からも, 群の直積と表現との関係はどうなっているのか興味がある。今日述べるのは, その関係を調べるほんの半歩で, 以上の表現との関係よりずっと以前の問題についてである。つまり, π を *finite group*, K を *field*, $G_0(K\pi)$ を *Grothendieck ring* としたとき, $\varphi: G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \longrightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2])$, $\varphi([M_1] \otimes [M_2]) = [M_1 \# M_2]$, の *Kernel*, *Cokernel* を考えるのである。もちろん $M_1 \# M_2$ は M_1, M_2 の *outer tensor product* である。

§ 1.

まず, Fein[2]にしたがって, φ を *Schur index* を用いて捕らえよう。

E を K 上 *finite normal separable extension* で π の *splitting field* になっているものとする。 $\mathcal{G}(E/K)$ を K 上 E の *Galois group*, 一般に $E\pi$ -module N , $\sigma \in \mathcal{G}(E/K)$ に対し, σN を自然に定義し, N の *character* を χ としたとき, σN の *character* を $\sigma\chi$ と書く。 $m_K(N)$ で N の K 上の *Schur index* を表わし, $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ と置き, M_i を *irreducible* $K\pi_i$ -module, N_i を M_i^E の *irreducible* $E\pi_i$ -component, ψ_i を N_i

の character, $\mathcal{H}_i = \mathcal{G}(E/K(\psi_i))$ と書く。

次の事実 *Fein [2]* にのっている。

- (1) $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(E/K)$ とすると $\sigma N_1 \# \tau N_2$ も irreducible module で, $m_K(N_1 \# N_2) = m_K(\sigma N_1 \# \tau N_2)$ である。
- (2) $M_1 \# M_2$ も完全可約で, $M_1 \# M_2 \cong k(T_1 \oplus \cdots \oplus T_r)$, ここで $\{T_i\}$ は nonisomorphic irreducible $K\pi$ -module で, k は $m_K(N_1) m_K(N_2) / m_K(N_1 \# N_2)$ に等しい。さらに T_i はそれぞれ同じ K -dimension $m_K(N_1 \# N_2) (K(\psi_1, \psi_2) : K) (N_1 \# N_2; E)$ をもっている。
- (3) $M_1 \# M_2$ が irreducible module であるための必要十分条件は次の3条件である。
 - (a) $m_K(N_1) m_K(N_2) = m_K(N_1 \# N_2)$.
 - (b) $\mathcal{G}(E/K) = \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2$.
 - (c) $(K(\psi_1) : K) (K(\psi_2) : K) = (K(\psi_1, \psi_2) : K)$.
- (4) $\pi_1 = \pi_2$ のとき, irreducible $K\pi_i$ -module M_1 について次は同値である。

- (a) M_1 は absolutely irreducible $K\pi_i$ -module である。
- (b) $M_1 \# M_1$ は irreducible $K\pi$ -module である。

さて, (2) より φ は Schur index を用いて一応きまっている。

(4) は $\pi_1 = \pi_2$ の時は φ が同型になるための必要十分条件は K が π_1 の splitting field であることを主張している。つまり,

問題は Schur index に帰着されるのであるが、現在の Schur index の計算法では global なあつかいは無理である。以下では違った角度から調べてみる。最後に (3) からの簡単な系を書いておこう。

(5) group π の order を $|\pi|$ と書く。

$$(|\pi_1|, |\pi_2|) = 1 \implies G_0(\mathbb{Q}\pi_1) \otimes G_0(\mathbb{Q}\pi_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} G_0(\mathbb{Q}[\pi_1 \times \pi_2])$$

以下一つの目的はこの逆にあたる事を調べる事にある。

§2 道具をそろえる

以下 $\text{char. } K = 0$ のときあつかう。

(1).

Lemma 1. π_i が abelian group ならば, $\text{Ker } \varphi = 0$ で $\text{Coker } \varphi$ は torsion free である。

これは, π_i が abelian group の時 Schur index が 1 である事に注意すれば §1 の (2) より φ が split map になることより分る。

さて, π' を π の subgroup とする時 $G_0(K\pi) \xrightleftharpoons[j_*]{j_*} G_0(K\pi')$ を functor $\text{mod } K\pi \xrightleftharpoons[\otimes_{K\pi'}]{\text{res.}} \text{mod } K\pi'$ よりみちびかれる ring homomorphism とする。 $\pi_i \supset \pi'_i$ の時

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \varphi & \longrightarrow & G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) & \xrightarrow{\varphi} & G_0(K[\pi_1 \times \pi_2]) & \longrightarrow & \text{Coker } \varphi \\ \updownarrow & \circlearrowleft & \updownarrow & \circlearrowleft & \updownarrow & \circlearrowleft & \updownarrow \\ \text{Ker } \psi & \longrightarrow & G_0(K\pi'_1) \otimes G_0(K\pi'_2) & \xrightarrow{\psi} & G_0(K[\pi'_1 \times \pi'_2]) & \longrightarrow & \text{Coker } \psi \end{array}$$

であり, 一般に φ を調べるのに induction theorem は使用可能である。例えば, Artin の induction theorem を用いれば, 次の結果が得られる。

Proposition 2. π_i を finite group とすると $\text{Ker } \varphi = 0$ である。

この Proposition は induction を用いなくても直接証明できる。

(2). Normal subgroup からの情報

$1 \rightarrow \pi'_i \xrightarrow{j} \pi_i \xrightarrow{P} \pi''_i \rightarrow 1$ (exact) $\pi'_i \triangleleft \pi_i$ とする。今, 又 $G_0(K\pi_i) \xleftarrow[p_*]{p^*} G_0(K\pi'_i) \xleftarrow[\text{res}]{\cdot \otimes_{K\pi_i} K\pi''_i} G_0(K\pi''_i)$ よりみちびかれる ring homomorphism とする。

$$G_0(K\pi'_i) \otimes G_0(K\pi''_i) \xrightarrow{\varphi_1} G_0(K[\pi'_i \times \pi''_i]) \xrightarrow{\varphi'_1} \text{Coker } \varphi_1$$

$$p^* \uparrow \downarrow p_* \quad \cap \quad p^* \uparrow \downarrow p_* \quad \cap \quad p^* \uparrow \downarrow p_*$$

$$G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \xrightarrow{\varphi_2} G_0(K[\pi_1 \times \pi_2]) \xrightarrow{\varphi'_2} \text{Coker } \varphi_2$$

$$j^* \uparrow \downarrow j_* \quad \cap \quad j^* \uparrow \downarrow j_* \quad \cap \quad j^* \uparrow \downarrow j_*$$

$$G_0(K\pi'_1) \otimes G_0(K\pi'_2) \xrightarrow{\varphi_3} G_0(K[\pi'_1 \times \pi'_2]) \xrightarrow{\varphi'_3} \text{Coker } \varphi_3$$

M を $K[\pi'_1 \times \pi'_2]$ の irreducible module とすると,

$$M^E \cong m_K(N_1 \# N_2)(N_1 \# N_2 \oplus \gamma(N_1 \# N_2) \oplus \dots) \text{ と書ける。}$$

ただし, E は § 1 の様に K 上 finite normal separable な

$\pi'_1 \times \pi'_2$ の splitting field, N_i は $E\pi'_i$ -irreducible module, N_i の character を ψ_i とすると, $\gamma \in \mathcal{G}(E/K) / \mathcal{G}(E/K(\psi_1, \psi_2))$

である。Normal subgroup からの情報として 次の Lemma が

得られる。

Lemma 3. (a) irreducible $K[\pi'_1 \times \pi'_2]$ -module M が存在して,
 $\varphi'_3([M]) \neq 0$ で, $\frac{m_K(N_1) m_K(N_2) (K(\psi_1)=K) (K(\psi_2)=K)}{m_K(N_1 \# N_2) (K(\psi_1, \psi_2)=K)} \nmid m$

ならば, $\text{Coker } \varphi_2 \neq 0$ である。ただし, $m = |\pi'_1 \times \pi'_2|$ とする。

(b). $\varphi'_3([M]) \neq 0$, M の character を χ とするとき, χ の inertial group $I(\chi) = \{g \mid g \in \pi_1 \times \pi_2, \chi^g = \chi\} = \pi_1 \times \pi_2$ をみたすような irreducible $K[\pi'_1 \times \pi'_2]$ -module M が存在すると仮定し, さらに, $\text{Coker } \varphi_3$ は torsion free だと仮定すると, $\text{Coker } \varphi_2 \neq 0$ である。

(c) $K = \mathbb{Q}$ とし, π'_1, π'_2 をそれぞれ $\underbrace{(P, \dots, P)}_n, \underbrace{(P, \dots, P)}_m$ (P は odd prime) 型の abelian group, $Z_i = C_{\pi'_i}(\pi'_i)$ (centralizer) とし, π'_i/Z_i を加群 π'_i の morphism の group と考え, 自然な map $\pi_1/Z_1 \times \pi_2/Z_2 \xrightarrow{\psi} \text{PGL}(n+m, P)$ を考える。 $\mathbb{Z}/(P)$ の原始根を r とする。

$$i_* j^* \text{Coker } \varphi_3 = 0 \iff \psi(\pi_1/Z_1 \times \pi_2/Z_2) \ni \begin{pmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^n & \overbrace{1 \dots 1}^m \\ & 1 & & \\ & & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r \end{pmatrix} = \sigma.$$

σ の order は $P-1$ である。

(d) $\text{Coker } \varphi_1 \neq 0$ ならば $\text{Coker } \varphi_2 \neq 0$ である。

(3).

group π に対してその exponent を $e(\pi)$ と書くことにする。

Lemma 4. π_i を abelian group とし, $G.C.D.(e(\pi_1), e(\pi_2)) = \pi p^{h_p}$ と素元分解でき, K に含まれる 1 の原始 p^S 乗根のうち S の最大値をそれぞれ S_p とする。もし, $h_p > S_p$ なる p が存在すれば, $\varphi: G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\rightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2])$.

§3. 応用

§2 で導いた道具をエイヤッと振回してみると, 次の事が出てくる。

(1). abelian group の時.

$K = \mathbb{Q}$, $\pi_1 = (p^{n_1}, p^{n_2}, \dots, p^{n_\ell})$ 型, $\pi_2 = (p^{n_{\ell+1}}, \dots, p^{n_{\ell+k}})$ 型の abelian group とすると,

$\text{Coker } \varphi$ の rank

$$= \sum_{0 \leq t_i \leq n_i} \left\{ \varphi(p^{t_1}) \times \dots \times \varphi(p^{t_\ell}) \times \left[\varphi(p^{\max(t_i)_{1 \leq i \leq \ell+k}}) - \varphi(p^{\max(t_i)_{1 \leq i \leq \ell}}) \varphi(p^{\max(t_i)_{\ell+1 \leq i \leq \ell+k}}) \right]^2 \right\}$$

記号が繁雑になってしまったが, 中の φ は Euler の函数を表わすものとする。

(2). 任意の group について.

group π の center を $Z(\pi)$ と書く。今, $L.C.M.(e(Z(\pi/\pi_1)))_{\pi_1 \triangleleft \pi} = \pi p^{m_p}$, $L.C.M.(e(Z(\pi_2/\pi_2)))_{\pi_2 \triangleleft \pi_2} = \pi p^{n_p}$ と素元分解していきと仮定し, S_p を K に含まれる 1 の原始 p^S 乗根のうちで, S の最大値とする。 $\exists p \text{ s.t. } \min(m_p, n_p) > S_p$

$$\Rightarrow G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\rightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2]).$$

(3) $L.C.M.(e(Z(\pi/\pi)))_{\pi \triangleleft \pi} = h$ とすると, π の splitting field

は $Q(\sqrt[4]{1})$ を含む。

- (4) π_i を odd order の group とし, $\exists p \mid (|\pi_1|, |\pi_2|)$, $2 \mid (K(\zeta_p):K)$
 p は odd prime, ζ_p は 1 の原始 p 乗根と仮定すると,
 $G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\cong G_0(K[\pi_1 \times \pi_2])$ である。

Remark

特に $K = Q$ とすれば, $2 \nmid |\pi_1| |\pi_2|$ ならば

$$(|\pi_1|, |\pi_2|) = 1 \iff G_0(Q\pi_1) \otimes G_0(Q\pi_2) \cong G_0(Q[\pi_1 \times \pi_2]).$$

- (5) $|\pi| = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$ と素元分解でき, 任意の i, j について $p_i \nmid p_j - 1$
と仮定すると π の splitting field は $Q(\zeta_{p_1 \cdots p_m})$ を含む。
ただし, $\zeta_{p_1 \cdots p_m}$ は 1 の原始 $p_1 \cdots p_m$ 乗根である。

Solomon の結果とあわせれば, このような type の group
の splitting field はきまったことになる。

Remark

Order $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$ を fix したとき, その order をもつ
すべての group が nilpotent group であるための必要十分
条件は $p_j \nmid p_i^{n_i} - 1$, $n_i > 1$ のときであるから, (5) は有意義であ
る。

- (6) 2-group の時は, index 2 の cyclic subgroup をもつ
ような group について考えてみる事が重要である。それは、
任意の 2-group の character がある意味でその様な group の
character によって表わされるからである。(Feit [3] p. 73,

(14, 3) 参照).

$n=3$ で, index 2 の cyclic subgroup を t group は次の type しかない.

$|\pi| = 2^{n+1}$ とする.

I. $\pi = \langle S \mid S^{2^{n+1}} = 1 \rangle$.

II. $\pi = \langle S, t \mid S^{2^n} = 1, t^2 = 1, tSt^{-1} = S \rangle$

III. $\pi = \langle S, t \mid S^{2^n} = 1, t^2 = S^{2^{n-1}}, tSt^{-1} = S^{-1} \rangle \quad n \geq 2$.

IV. $\pi = \langle S, t \mid S^{2^n} = 1, t^2 = 1, tSt^{-1} = S^{-1} \rangle \quad n \geq 2$

V. $\pi = \langle S, t \mid S^{2^n} = 1, t^2 = 1, tSt^{-1} = S^{1+2^{n-1}} \rangle \quad n \geq 3$.

VI. $\pi = \langle S, t \mid S^{2^n} = 1, t^2 = 1, tSt^{-1} = S^{-1+2^{n-1}} \rangle \quad n \geq 3$.

$G_0(\mathbb{Q}\pi_1) \otimes G_0(\mathbb{Q}\pi_2) \xrightarrow{\sim} G_0(\mathbb{Q}[\pi_1 \times \pi_2])$ となるのは

① π_1 が type I で $n=0$ 又は II で $n=1$, IV で $n=2$ で

π_2 が任意の type の時,

② π_1 が type (I, $n=1$), (II, $n=2$), (III, $n=2$), (V, $n=3$) 又は

(VI, $n=3$) で, π_2 が type IV の時,

③ π_1 が type (I, $n=1$), (II, $n=2$), 又は (V, $n=3$) で, π_2 が type

VI の時だけである。

文献

[1] C.W. Curtis and I. Reiner: Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience, 1962.

- [2] B. Fein ; Representations of direct products of finite groups, Pacific. J. Math., 20. (1967)
- [3] W. Feit ; Characters of Finite Groups, Benjamin 1967
- [4] W. Feit and J. G. Thompson ; Solvability of groups of odd order, Pacific. J. Math., 13 (1963)
- [5] L. Solomon ; The representation of finite groups in algebraic number fields, J. Math, Soc. Japan 13. (1961)
- [6] M. Hikari ; 準備中