

ある種の石取りゲームにおける双対性

阪大・理 山崎 洋平

正規型の石取りゲームの後手必勝形については Grundy の基本定理が一応の解決を与えているとみることが出来るが、逆型の石取りゲームについては、あまり広範囲にわたってまともな結果が得られているとはいえない。しかし、特に二山くずしに話を限れば、その逆型については正規型の理論を少し修正することにより適用できる。このことはチャヌジツリイ (Wythoff の二山くずし) についてもあてはまることが容易にわかる。本稿の目的は逆型の理論が正規型の理論を少々修正して適用できるような、ゲームのカテゴリーを論じることであり、結果として、この性質をもつ、ある意味で「まともな」カテゴリーには最大なものが存在すること、また「佐藤のゲーム (マヤ・ゲーム)」と呼ばれるものがこれに属することを示す。

§ 1. D-scheme と石取りゲーム.

X を有限集合とし、 $\mathcal{M} = \{(A, B) : X \supset A \supsetneq B\}$ とおく。

ρ を m から $\{0, 1\}$ への写像とする. このような組 $D = (X, \rho)$ を D -scheme という. ρ は, 与えられた集合 A を B にかえる手が $\rho(A, B) = 1$ のとき, かつこのときのみ認められるというルールを表す. D 上の石取りゲームは集合 X から, 二人の競技者により, ルール ρ に従い交互着手で進められる. この結果着手不可能に陥った者を, 正規型では負け, 逆型では勝ちと規定する.

D -schemes $D_1, D_2, D = (X, \rho)$ と $C \subset X$ に対し, 直和 $D_1 \oplus D_2$ 及び進行途中のゲームに対応する D -scheme D_C が次のように定義される.

$$D_1 \oplus D_2 = (X_1 \cup X_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$$

$$\rho_1 \oplus \rho_2 (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1(A_1, B_1) = 1, A_2 = B_2 \text{ 又は} \\ A_1 = B_1, \rho_2(A_2, B_2) = 1 \end{cases}$$

$$D_C = (C, \rho_C) \quad \rho_C = \rho|_{m_C}$$

§ 2. Grundy 数と正規型石取りゲーム.

D -scheme $D = (X, \rho)$ に対し Grundy 数 $G(D)$ が次のように帰納的に定義される.

$$G(D) = \min \{i: \text{非負整数}, i \neq G(D_C) \forall C \subset X \text{ s.t. } \rho(X, C) = 1\}.$$

容易に知れるように次の定理が成り立つ.

定理 1. $\mathbb{D}$ を D -scheme とし, $\mathbb{D}$ の上の正規型石取りゲーム Δ を Γ とおけば

$$\Gamma \text{ が後手必勝} \iff G(\mathbb{D}) = 0$$

次の定理は正規型石取りゲームの理論のすなわちに直結している.

定理 2. (Grundy) $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ を D -scheme とするとき

$$G(\mathbb{D}_1 \oplus \mathbb{D}_2) = G(\mathbb{D}_1) \oplus G(\mathbb{D}_2)$$

ここに, 二進展開 $a = \sum_i a_i 2^i$, $b = \sum_i b_i 2^i$ に對し $c = a \oplus b$ の二進展開 $\sum_i c_i 2^i$ は

$$c_i \equiv a_i + b_i \pmod{2}$$

で与えられるものとする.

以下, いくつかの代表的な D -scheme を紹介する. 詳しくは一松 [2] を参照されたい.

例 1. $\Delta = \Delta(N^{\infty}(n))$

$$|X| = n, \quad g = 1$$

$$N^0 \quad 3$$

例2. 制限 $= \triangleleft N^a(n) \quad (1 \leq a < \infty)$

$$|X| = n, \quad g(A, B) = 1 \iff |A \setminus B| < a$$

$= \triangleleft N^a(n)$ は $a = \infty$ の制限 $= \triangleleft$ とみなすことができる。また、通常、制限 $= \triangleleft$ とはこれらの D-scheme の直和を指している。Grundy 数は次の式で与えられる。

$$G(N^a(n)) = \text{最小の非負整数} \equiv n \pmod{a}$$

例3. ケイレス

$$X \subset \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$g(A, B) = 1 \iff |x - y| \leq 1 \quad \forall x, y \in A \setminus B.$$

特に $X = \{1, 2, \dots, n\}$ なるものを $K(n)$ とかくと、ケイレスはこういう D-scheme の直和で表わされる。 $G(K(n))$ は $n \geq 7$ では 12 を周期にもつ。

例4. 4-スシムリイ $C(n_1, n_2)$

$$X = X_1 \cup X_2 \quad |X_i| = n_i \quad i = 1, 2$$

$$g(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = 1 \iff \begin{cases} A_1 = B_1, \text{ 又は} \\ A_2 = B_2, \text{ 又は} \\ |A_1 \setminus B_1| = |A_2 \setminus B_2| \end{cases}$$

$$G(C(n_1, n_2)) = 0 \iff \exists N \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\min\{n_1, n_2\} = [cN], \quad \max\{n_1, n_2\} = [cN] + N = [c^2N]$$

ここに $[]$ は整数部分を, c は $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ を表す.

例5. 佐藤の γ - μ (マヤ γ - μ) $M^l(n_1, \dots, n_l)$

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_l, \quad |X_i| = n_i \quad 1 \leq i \leq l$$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_l, B_1 \cup \dots \cup B_l) = 1 \iff \begin{cases} |A_i| \neq |A_j|, |B_i| \neq |B_j| \quad \forall i \neq j \\ \text{かつ} \quad \exists i \quad A_j = B_j \quad \forall j \neq i \end{cases}$$

$$G(M^l(n_1, \dots, n_l)) = 0 \iff \begin{cases} \prod_{i < j} (n_i - n_j) = 0 \quad \text{又は} \\ \bigoplus_{i < j} (n_i \oplus n_j - 1) \oplus n_j \oplus n_i = \bigoplus_i n_i \end{cases}$$

§3. 逆型石取り γ - μ と singular D-scheme.

逆型の石取り γ - μ については, 美しい一般論は絶望的である. しかし, いくつかの逆型の石取り γ - μ については, 正規型の場合の理論を少々変形してあてはめることができる. その良い例が $\mathbb{D}$ の直和 $\mathbb{D} = \bigoplus_i \mathbb{N}^{\infty}(n_i)$ である. $\mathbb{D}$ 上の逆型の石取り γ - μ が後手必勝なる為の条件は

$$\int \exists i \quad G(\mathbb{N}^{\infty}(n_i)) \geq 2, \quad G(\mathbb{D}) = 0 \quad \text{又は}$$

$$\left\{ \forall i \quad G(\mathbb{N}^{\omega}(n_i)) \leq 1 \quad G(\mathbb{D}) = 1. \right.$$

であることがよく知られている。このことは更に一般に
 $\oplus_i \mathbb{N}^{a_i}(n_i)$ についても成立することが容易に分かる。他に例
をひけばチャヌシ、リイ $\mathbb{C}(n_1, n_2)$ についても $\mathbb{C}(n_1, n_2)$ 上の
逆型の石取りゲームが後手必勝なる条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \{n_1, n_2\} \neq \{0\}, \{1, 2\} \quad \text{で} \quad G(\mathbb{C}(n_1, n_2)) = 0 \\ \text{又は} \quad \{n_1, n_2\} = \{0, 1\}, \{2\} \end{array} \right.$$

である。また、ニコラニム、制限ニム、チャヌシ、リイの直
和についても同様の結果が得られることが判明してくるであ
ろう。ここで次の定義をかくことにより、逆型の石取りゲー
ムについての知識を整理してみよう。

定義. D-scheme $\mathbb{D}$ は、 $\mathbb{D}$ 上の正規型石取りゲームと逆
型石取りゲームとで先手必勝か後手必勝かが異なるとき singular
であるという。

$$\text{例1.} \quad \mathbb{N}^a(n) \text{ が singular} \iff G(\mathbb{N}^a(n)) \leq 1$$

例 2. $\bigoplus_i \mathbb{N}^{\infty}(n_i)$ が singular $\Leftrightarrow$ 各 $\mathbb{N}^{\infty}(n_i)$ が singular

(実は $\bigoplus_i \mathbb{N}^{a_i}(n_i)$ についても成り立つ.)

例 3. ケイレスについては難しい. $k(5)$ は non-singular

で $G(k(5)) = 4$ だが $k(5) \oplus k(1)$ は singular である.

例 4. $\mathbb{C}(n_1, n_2)$ が singular $\Leftrightarrow n_1, n_2 \leq 2$ かつ $G(\mathbb{C}(n_1, n_2)) \leq 1$

すなわち $\{n_1, n_2\} = \{0\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2\}$ の場合である.

例 5. $M^{\ell}(n_1, \dots, n_{\ell})$ が singular $\Leftrightarrow \prod_{i < j} (n_i - n_j) = 0$ 又は

$$\{n_1, \dots, n_{\ell}, \ell(n_1), \dots, \ell(n_{\ell})\} = \{0, 1, \dots, \ell-1, \ell, \dots, 2\ell-1\}$$

すなわち $\ell(m) = 2\ell-1-m$ である.

例 5 については, ここでは記憶に留める程度でよい. 以

下, 次のような性質をもつ, D-scheme のカテゴリ $\mathcal{C}$ につい

て考えよう (hom は略す).

Axiom 1: $\text{obj } \mathcal{C} \ni D = (X, \mathcal{S}), C \subset X \Rightarrow D_C \in \text{obj } \mathcal{C}$

Axiom 2: $\text{obj } \mathcal{C} \ni D_1, D_2 \Rightarrow D_1 \oplus D_2 \in \text{obj } \mathcal{C}$

Axiom 3: $\text{obj } \mathcal{C} \ni D_1, D_2$ が singular $\Leftrightarrow D_1 \oplus D_2$ が singular.

Axiom 1 については $\mathcal{C}$ として X から“着手”の列によって実現されるもののみをとるべきだという考えも成り立つが、実質的な差異はない。ここでは形式上、この形をとることにする。これら3つの性質はカテゴリーについてのものであるから、種々雑多なカテゴリーがこれを満たし得るが、奇異なことに、これらを見たものの中で最大のものが存在すること判明してくる。以下 $\mathcal{C}$ を上の3つの性質を見たカテゴリーとする。

補題1. $\text{obj } \mathcal{C}$ が $\mathcal{S} \neq 0$ なる D -scheme $\mathbb{D} = (X, \mathcal{S})$ をもてば、次の i), ii) をみたす D -scheme $\mathbb{D}' = (X', \mathcal{S}')$ をもてる。

$$i) \quad \mathcal{S}' \neq 0$$

$$ii) \quad \mathcal{S}'_{\mathcal{C}'} = 0 \quad \forall \mathcal{C}' \in X'.$$

証明. $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} \neq 0$ なる X の極小部分集合 (必然的に non-empty) の一つ $\mathcal{C}$ を X' として $\mathbb{D}' = \mathbb{D}_{X'}$ とおけばよい。

補題2. $\text{obj } \mathcal{C} \ni \mathbb{D}$ が singular ならば $G(\mathbb{D}) \leq 1$ 。

証明. $\text{obj } \mathcal{C} \ni \mathbb{D}$ が singular で $G(\mathbb{D}) \geq 2$ とする。補題1の i), ii) をみたす $\mathbb{D}'$ をとると $\mathbb{D}'$ は singular で $G(\mathbb{D}') = 1$ 。

よ、 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$ は共に, singular で Grundy 数は 2 以上, 従って後手必勝である。しかし $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$ 上先手は一手で $\mathcal{D}$ に移行できる筈だから矛盾である。証明終り。

§ 4. カテゴリー - $\mathcal{C}$

一般に, $\mathcal{D}$ の scheme $\mathcal{D} = (X, \mathcal{S})$ に対し次の記号を定める。

$$\mathcal{I} = \{T \subset X : \mathcal{S}(T, \mathcal{C}) = 0 \quad \forall (T, \mathcal{C}) \in \mathcal{M}\}$$

$$\mathcal{L} = \{I \subset X : G(\mathcal{D}_I) \leq 1\}$$

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{L} : \exists F = F_0, F_1, \dots, F_s = T \in \mathcal{L} \text{ s.t. } T \in \mathcal{I}, \mathcal{S}(F_{i-1}, F_i) = 1 \quad \forall i\}$$

$$\mathcal{S} = \{S \subset X : \mathcal{D}_S \text{ is singular}\}.$$

容易にわかるように $\mathcal{S} \supset \mathcal{I} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ である。

補題 3. $\text{obj } \mathcal{C} \ni \mathcal{D}$ のとき $\mathcal{L} \supset \mathcal{S}$ であり, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{L}$ の中で関係 $\mathcal{S}(\cdot, \cdot) = 1$ に関して閉じている。

証明, 前半は補題 2 と同値であるから, $\mathcal{L} \ni I, J$ が $\mathcal{S}(I, J) = 1$ をみたすとき片方が $\mathcal{S}$ に属すれば他方も $\mathcal{S}$ に属する。これをいえばよい。 $\mathcal{D}_I$ に対し補題 1 の $\mathcal{D}'$ をとって置く。 $\mathcal{D}'$ は singular で $G(\mathcal{D}') = 1$ である。従って $\mathcal{D}_I$ が singular であることは $\mathcal{D}_I \oplus \mathcal{D}'$ が singular なることと同値で, $G(\mathcal{D}_I) \leq 1$ より

$\{G(\mathbb{D}_I), G(\mathbb{D}_I \oplus \mathbb{D}')\} = \{0, 1\}$ となる $\mathbb{D}_I$ (又は $\mathbb{D}_I \oplus \mathbb{D}'$) は逆型石取りゲームにおいて後手必勝, 従って $\mathbb{D}_J$ (又は $\mathbb{D}_J \oplus \mathbb{D}'$) は先手必勝である. Grundy 数を考えると $G(\mathbb{D}_I) = G(\mathbb{D}_I) \oplus 1$, $G(\mathbb{D}_I \oplus \mathbb{D}') = G(\mathbb{D}_J \oplus \mathbb{D}') \oplus 1$ となり, $\mathbb{D}_I$ が singular である $\Leftrightarrow \mathbb{D}_J$ が singular である $\Leftrightarrow$ とは同値である. 証明終り.

補題 4. $\text{obj } \mathcal{C} \ni \mathbb{D}$ かつ $\mathcal{F} = \mathcal{S}$ (従って $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ の中で関係 $\rho(\cdot, \cdot) = 1$ に関して閉じている).

証明. $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F} \ni \mathcal{S}$ に対し $\mathcal{C} \ni I$ で $\rho(\mathcal{S}, I) = 1$ なるものを見つけなければならない. $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_S$ は singular で $G(\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_S) = 0$ であるから $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_S$ 上の逆型石取りゲームは先手必勝である. 先手の必勝戦略により $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_C$ になるであろう. Grundy 数の性質から $G(\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_C) \neq 0$ なるので $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_C$ は singular ではなく Grundy 数は 1 でなければならない. よって $\mathbb{D}_C$ は singular である. この $\mathcal{C}$ を求める I の性質を求めよう.

補題 5. $\text{obj } \mathcal{C} \ni \mathbb{D} = (X, \rho)$ かつ $\mathcal{C} \in \rho(X, \mathcal{C}) = 1$ なる X の部分集合とする. $\mathbb{D}$ が non-singular であり $\mathbb{D}_C$ が singular なる X の部分集合 $\mathcal{C}'$ で $\rho(X, \mathcal{C}') = 1$ であるとしたとき, 次の i) 又は ii) をみたすものが存在する

i) $\mathbb{D}_{c'}$ は singular で $G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c) \oplus 1$.

ii) $\mathbb{D}_{c'}$ は non-singular で $G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c)$.

証明. もし $X \in \mathcal{C}$ なら補題 3 より $\mathbb{D}$ は singular となるので $G(\mathbb{D}) \geq 2$ でなければならない. ここで補題 1 の条件をみたす $\mathbb{D}'$ をとってくると, $\mathbb{D}$ 及び $\mathbb{D} \oplus \mathbb{D}'$ は共に Grundy 数が 2 以上なので, これらの上の逆型石取りゲームは先手必勝である. $\mathbb{D} \oplus \mathbb{D}'$ から $\mathbb{D}$ にかえる手は先手の必勝法ではないので, 必勝法は $\mathbb{D} \oplus \mathbb{D}'$ については $\mathbb{D}_{c'} \oplus \mathbb{D}'$ のような形に, $\mathbb{D}$ については $\mathbb{D}_{c''}$ のような形にかえるものである. これら c', c'' のうちを求めるものが含まれる.

§ 5. flat D-scheme と projective D-scheme

前節までに我々はカテゴリー $\mathcal{C}$ の object たる D-scheme をみたすべき条件をいくつか見出したが, 逆にこれらの条件から最大のカテゴリーが得られることをみよう.

定義. D-scheme $\mathbb{D} = (X, \mathcal{F})$ は次の 2 つの性質をみたすとき flat であるという.

① $\mathcal{F}$ が $\mathcal{C}$ の中で関数 $\rho(\cdot, \cdot) = 1$ に関して閉じている.

② $Y \in 2^X - \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{F}$ が $\rho(Y, c) = 1$ をみたすとき, $\rho(Y, c') = 1$ で次のどちらかをみたす c' が存在する:

$$i) c' \in \mathcal{F} \text{ で } G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c) \oplus 1$$

$$ii) c' \in 2^X - \mathcal{F} \text{ で } G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c).$$

定義. 上の ii) が省ける場合, $\mathbb{D}$ は projective であるといふ.

補題 6. $\mathbb{D}$ は flat D -scheme であるとき $\mathcal{F} = \mathcal{S}$.

証明. $c \subset X$ に対し, $\mathbb{D}_c$ 上の逆型石取り $\gamma - \mu$ が

$$\text{後手必勝} \Leftrightarrow \begin{cases} c \in \mathcal{F} & G(\mathbb{D}_c) = 1 \text{ 又は} \\ c \notin \mathcal{F} & G(\mathbb{D}_c) = 0 \end{cases}$$

なることをみればよいが, これは flat なることから容易である.

定理 3. flat D -scheme のカテゴリ, projective D -scheme のカテゴリは共に次の性質をもつ. 特に flat の場合には, この性質をもつ最大の α は α である.

$$i) \text{ obj } \mathcal{C} \ni D = (X, \mathcal{F}) \subset X \Rightarrow D_c \in \text{obj } \mathcal{C}$$

$$ii) \text{ obj } \mathcal{C} \ni D_1, D_2 \Rightarrow D_1 \oplus D_2 \in \text{obj } \mathcal{C}$$

$$iii) \text{ obj } \mathcal{C} \ni D_1, D_2 \text{ について}$$

$$D_1, D_2 \text{ の共に singular} \iff D_1 \oplus D_2 \text{ が singular}$$

証明. i) は明白である. $D_1 \oplus D_2 = D$ とおくと $\mathcal{F} =$

$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ であるから, ii) iii) もまた明らかである.

flat $\mathcal{D}$ -scheme のカテゴリーが, $\mathcal{D}$ の性質をもつもののうち最大であることは前節にみた通りである.

定理 4. $\mathcal{D} = \mathcal{A}$, 制限 $\mathcal{D} = \mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ の $\mathcal{F}$ である. $\mathcal{A}$ は projective であるが $\mathcal{A}(5)$ は flat でない.

証明. ここでは佐藤の $\mathcal{F}$ - $\mathcal{A}$ $M^l(n_1, \dots, n_l)$ ($\prod_{i=1}^l (n_i - 1) \neq 0$) についてのみ述べる.

$$\mathcal{F}' = \{C_1, \dots, C_l : \{1C_1, \dots, 1C_l, 2(1C_1), \dots, 2(1C_l)\} = \{0, \dots, l-1, l, \dots, 2l-1\}\}$$

$$\text{ただし } 2(m) = 2l-1-m$$

とすると, 正規型及び逆型の石取り $\mathcal{F}$ - $\mathcal{A}$ を考察することにより, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ 更に $\mathcal{F}$ が ①, ② をみたすことが順に $\sum_i 1C_i$ に関する帰納法で導かれる.

これらの結果は最近得られたもののなので、どのような D-scheme が flat か、projective か、あるいは flat であるか projective であるものが存在するのか……など、まだ不明のことが多い。 $\mathcal{P}(A, B)$ が $(|A|, |B|)$ のみに依存するものでも、

$$\mathcal{P}(A, B) = 1 \iff \{|A|, |B|\} \neq \{0, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$$

のように non-flat なものが存在するか

$$\mathcal{P}(A, B) = 1 \iff |A \setminus B| \in \{p_1, p_2, \dots\}$$

のような形のものではどうかよく判らない。

本筆ながら、佐藤のゲームについて考えたのは、明石高専の加納幹雄氏の質問によるところである。同氏に深く感謝する次第である。

参考文献

- [1] J. H. Conway, On numbers and games, Acad. Press, 1975.
- [2] 一松 信, 石取りゲームの数理, 森北出版, 1968.