

$\deg_v P_L(v, z)$ と Seifert circles の最小数

東女大文理 小林一章 (Kazuaki Kobayashi)

§0. Introduction

山田 [Y] は L の braid index, $b(L)$, と L の diagram $\tilde{L}$ の Seifert circles の数, $s(\tilde{L})$, に関して次のような定理を証明した。

定理 (山田 [Y]) L を oriented link とし, $\tilde{L}$ を L の 1 つの oriented diagram とする。 $b(L)$ を L の braid index, $s(\tilde{L})$ を $\tilde{L}$ の Seifert circles の個数とする。 $\Rightarrow b(L) = \min_{\tilde{L} \in L} s(\tilde{L})$ 。

$P_L(v, z)$ を次の (i), (ii) によって定義される 2 変数 Jones 多項式とする。

(i) L が自明な knot $\Rightarrow P_L(v, z) = 1$

(ii) L_+, L_-, L_0 は 1 つの交叉点の近くで図 1 のようになり、他の部分では一致しているような 3 つの oriented links とする $\Rightarrow v^{-1}P_{L_+} - vP_{L_-} = zP_{L_0}$ 。

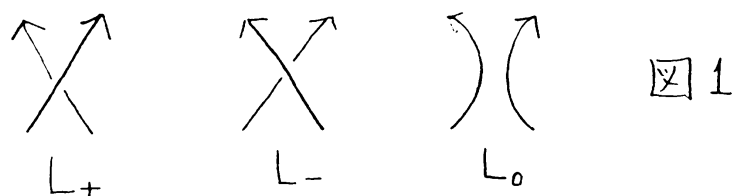


図 1

H. Morton $[M]$ は ν に属する P_L の次数, $\deg_{\nu} P_L$, $\tilde{L}$ の代数的交差床数, $\tilde{c}(\tilde{L})$, そして $s(\tilde{L})$ 等の間の関係を示した。

定理 (H. Morton $[M]$) $h\text{-deg}_{\nu} P_L$, $l\text{-deg}_{\nu} P_L$ を各 ν に属する $P_L(\nu, z)$ の最高次数と最低次数とする。

$$\Rightarrow \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1) \leq l\text{-deg}_{\nu} P_L \leq h\text{-deg}_{\nu} P_L \leq \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1)$$

ここで $\tilde{L}$ は link L の 1 つの diagram

本論文では上の Morton の不等式を利用してどんな link の diagram の時にその Seifert circles の数が最少になるかを考察する。それがわかれば山田の定理より braid index がわかる。

ν に属する P_L の reduced degree, $\tilde{r}\text{-deg}_{\nu} P_L$, を

$$\tilde{r}\text{-deg}_{\nu} P_L = (h\text{-deg}_{\nu} P_L) - (l\text{-deg}_{\nu} P_L) \text{ で定義する。}$$

上の Morton の定理によって $\tilde{r}\text{-deg}_{\nu} P_L \leq 2(s(\tilde{L}) - 1)$ が示される。従って Seifert circles の数の最少を求めるには上の等号がいつ成立するかを調べればよい事になる。

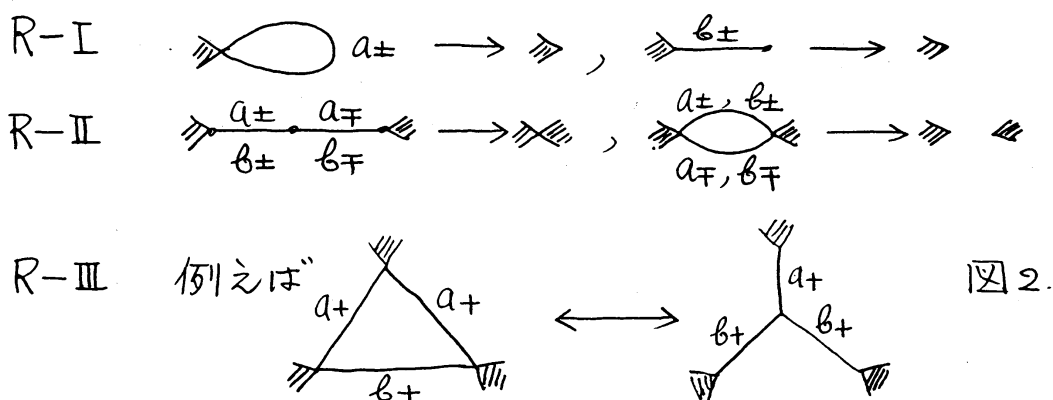
注 1. $\tilde{r}\text{-deg}_{\nu} P_L = 2(s(\tilde{L}) - 1)$ が成立

$$\Leftrightarrow l\text{-deg}_{\nu} P_L = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1) \text{ かつ}$$

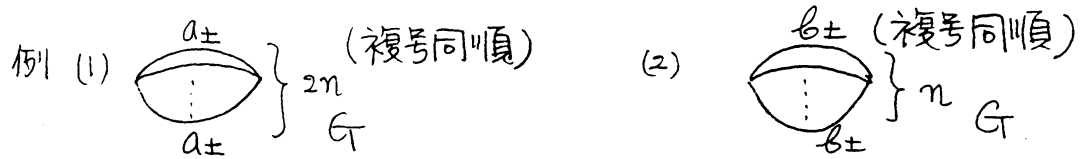
$h\text{-deg}_v P_L = \tilde{e}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1)$ が成立。

$\tilde{L}$ を oriented link diagram とし G (又は G_L) を $\tilde{L}$ から導かれる oriented coded graph とする (oriented coded graph については $[K_1], [K_2]$ を参照)、以下で例えば $G = G_{a+}$, $G_{a+} \cup G_{b-}$ 等と書いた時は G の edges が全て $a+$ -code, $a+$ -code と $b-$ -code である事を示す。oriented link diagram から導かれた oriented coded graph を単に link の graph という事もある。

定義. グラフ G において下図の一方向の R-I, R-II moves 及び両方向の R-III moves が出来ないとき G は R-reduced であるという。



注 2. $G = G_{a+}$ 又は G_{a-} のときは G に loop がなければ G は R-reduced, また $G = G_{b+}$ 又は G_{b-} のときは degree 1 の頂点があれば G は R-reduced, $G = G_{a+} \cup G_{b-}$ (複号同順) のときは loop と degree 1 の頂点があれば R-reduced.



$$(1) \quad P(2na_+) = v^{2n} \left(\frac{v^{-1} - v}{z} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} v^{2i} v z \quad (n \geq 1)$$

$$P(2na_-) = v^{-2n} \left(\frac{v^{-1} - v}{z} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} v^{-2i} (-v^{-1} z)$$

$$(2) \quad P(nb_+) = v^2 P((n-2)b_+) + v z P((n-1)b_+) \quad (n \geq 2)$$

$$\text{従って} \begin{pmatrix} P(nb_+) \\ P((n-1)b_+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v z & v^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v^{-1} - v}{z} \end{pmatrix}$$

$$\text{同様に} \quad P(nb_-) = v^{-2} P((n-2)b_-) - v^{-1} z P((n-1)b_-)$$

$$\text{従って} \begin{pmatrix} P(nb_-) \\ P((n-1)b_-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^{-1} z & v^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v^{-1} - v}{z} \end{pmatrix}$$

$$\text{以上より} \quad h\text{-deg}_v P(2na_+) = 2n+1, \quad l\text{-deg}_v P(2na_+) = 1$$

$$r\text{-deg}_v P(2na_+) = 2n, \quad h\text{-deg}_v P(2na_-) = -1, \quad l\text{-deg}_v P(2na_-) = -(2n+1), \quad r\text{-deg}_v P(2na_-) = 2n \quad - \text{方 } s(\tilde{L}) = 2n \text{ 従って}$$

$$2(s(\tilde{L})-1) = 2(2n-1) \quad (2) \text{ の時 } h\text{-deg}_v P(nb_+) = n+1,$$

$$l\text{-deg}_v P(nb_+) = n-1, \quad h\text{-deg}_v P(nb_-) = -(n-1), \quad l\text{-deg}_v P(nb_-) = -(n+1) \quad \text{従って } r\text{-deg}_v P(nb_{\pm}) = 2. \quad - \text{方 } s(\tilde{L}) = 2.$$

故に $r\text{-deg}_v P(nb_{\pm}) = 2(s(\tilde{L})-1)$ 以上より (2) のグラフを持つ link diagram の Seifert circles の数は最少である事がわかる. (1) のグラフをもつ link diagram の Seifert circles の数は $n \geq 2$ の時最少をえているか否か不明であるが以下

の定理2より positive (又は negative) link diagram 中で最少の Seifert circles 数を占めている事がわかる。

定理1. G を oriented link diagram $\tilde{L}$ のグラフとする。
 $G = G_{b+}$ 又は G_{b-} で G の全ての edges が multi-edges である (従って G は R -reduced) $\Rightarrow l\text{-deg}_v P_L = 2(s(\tilde{L}) - 1)$. ただし $\tilde{L}$ は $\tilde{L}$ が属する oriented link type. 従ってこの時 Seifert circles の数は最少.

定理2. $\tilde{L}$ を R -reduced oriented positive (resp. negative) alternating diagram とすると $s(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ が属する link L の全ての positive (resp. negative) diagram 中で最少の Seifert circles 数を表わしている。実際次の事を証明する。

(I) $\tilde{L}$ を R -reduced oriented positive alternating diagram とする $\Rightarrow s(\tilde{L}) = c(\tilde{L}) + 1 - (l\text{-deg}_v P_L)$

(II) $\tilde{L}$ を R -reduced oriented negative alternating diagram とする $\Rightarrow s(\tilde{L}) = (h\text{-deg}_v P_L) + 1 - c(\tilde{L})$.

H. Morton [M₂] も closed braid に関し同様の結果を得ている。

§1. 定理の証明

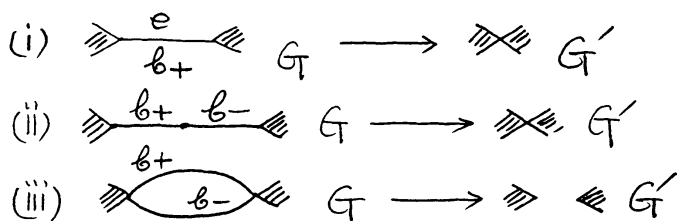
Lemma 1. 次の2つの条件を両方満たす S^2 (又は平面) 上のグラフ G は存在しない。

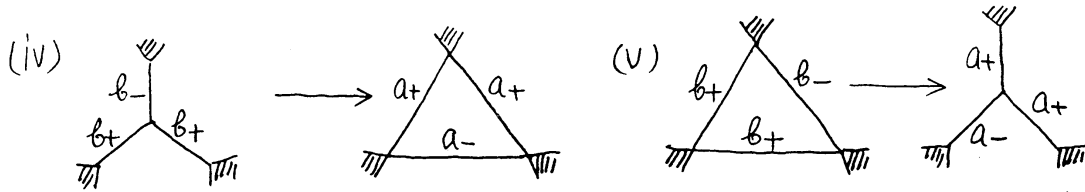
- (i) 全ての頂点の次数が4以上 かつ
- (ii) $S^2 - G$ の全ての多边形が4つ以上の辺をもつ

Proof. 集合 X の元の個数を $\#X$ と書き, $V(G), E(G), R(G)$ を各々 G の頂点の集合, 辺の集合, $S^2 - G$ の領域の集合とする。 G が上の2つの条件を満たしているとすると $4\#V(G) \leq 2\#E(G)$
 $4\#R(G) \leq 2\#E(G)$. 平面グラフに関するオイラーの定理より
 $2 = \#V(G) - \#E(G) + \#R(G) \leq \frac{1}{2}\#E(G) - \#E(G) + \frac{1}{2}\#E(G) = 0$
 これは矛盾. 従って結果が導かれる。

Lemma 2. G (resp. G') を oriented link diagram $\tilde{L}$ (resp. $\tilde{L}'$) のグラフとする。次の図3のような G から G' への変形によって $\tilde{L}$ と $\tilde{L}'$ は同じ link type を表現し, 代数的交叉数及び Seifert circles の数の変化は次のようである。

(I) G の辺の code が図3に現われる所以外は全て b_+ の時





(i) e は G の cut edge $\Rightarrow \tilde{c}(\tilde{L}) = \tilde{c}(\tilde{L}') + 1, s(\tilde{L}) = s(\tilde{L}') + 1$

(ii) R-II move $\tilde{c}(\tilde{L}) = \tilde{c}(\tilde{L}'), s(\tilde{L}) = s(\tilde{L}') + 2$

(iii) R-II move $\tilde{c}(\tilde{L}) = \tilde{c}(\tilde{L}'), s(\tilde{L}) = s(\tilde{L}')$

(iv) R-III move $\tilde{c}(\tilde{L}) = \tilde{c}(\tilde{L}'), s(\tilde{L}) = s(\tilde{L}') + 2$

(v) R-III move $\tilde{c}(\tilde{L}) = \tilde{c}(\tilde{L}'), s(\tilde{L}) = s(\tilde{L}') + 2$

(II) G の辺の code が図3に現われる所以外は全て b_- で, 上の

(i)-(v) の図で + と - を入れ変えたものを (i)'-(v)' とする。

(i)' の時 $\tilde{c}(\tilde{L}) = \tilde{c}(\tilde{L}') - 1, s(\tilde{L}) = s(\tilde{L}') + 1$

(ii)'-(v)' については上の (ii)-(v) と同じ。

証明. (i) と (ii)' に関しては, e は G の cut edge だから R-I move が出来るか 2つの links の連結和になっている。辺 e に対応する交叉点の所で1つの link を回転させる事によりグラフが G' であるような link を得る。(ii)-(v), (ii)'-(v)' に関しては G から G' への変形は Reidemeister move に対応しているから $\tilde{L}$ と $\tilde{L}'$ は ambient isotopic である。代数的交叉点数の変化は図より明らか。 G の辺の code が全て b_- の時は Seifert circle は G の頂点に対応しているからその個数の変化も図より明らか //

Lemma 3. $G, G', \tilde{L}, \tilde{L}'$ は lemma 2 と同じとする。

$l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = \tilde{c}(\tilde{L}') - (s(\tilde{L}') - 1)$, $h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = \tilde{c}(\tilde{L}') + (s(\tilde{L}') - 1)$
 が成立しているとする。すると次が成立する。(i)-(v), (i)'-(v)' は lemma 2 の同じ番号に対応しているとする。

$$(i) \quad l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1)$$

$$h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1) - 2.$$

$$(ii) \quad l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1) + 2$$

$$h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1) - 2.$$

$$(iii) \quad l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1)$$

$$h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1).$$

(iv), (v) の時は (ii) と同じ結果が起る。

$$(i)' \quad l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1) + 2.$$

$$h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1)$$

$$(ii)' \quad l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1) + 2.$$

$$h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1) - 2.$$

$$(iii)' \quad l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = l\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1)$$

$$h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}} = h\text{-deg}_\nu P_{\tilde{L}'} = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1).$$

(iv)', (v)' の時は (ii)' と同じ結果が起る。

証明. 2変数 Jones 多項式は ambient isotopy invariant
 である事と lemma 2 から証明される。

定理1の証明 (I) $G = G_{b+}$ の時 次のような G の resolution
を作る (A) multi-edges の部分を次々と crossing change と
smoothing を行ない multi-edges の部分が $b+$ code を持つ
single edge か辺がない状態に疏ける。

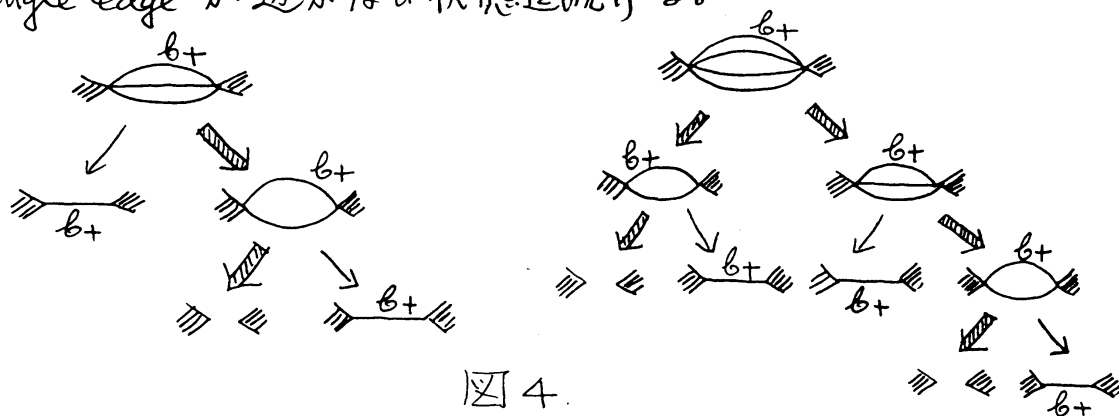


図4.

(図4で太い矢印は $\mathbb{F}_2$ -deg $v_{P_L} = 2(s(\tilde{L}) - 1)$ を保っている branch
後述). この操作を G の全ての multi-edge の部分で行なうと
resolution の bottom-most では $b+$ -code を持った simple graph
と頂点のみから成るグラフ (= 自明なグラフ) の disjoint union
となる。このようなグラフの連結部分グラフを G_1 とする。

(B). G_1 が1つの頂点でないなら lemma 1 から次のいずれか
が起る。(i) G_1 は cut edge をもつ (ii) 次数が3以下の頂点があ
る, (iii) $S^2 - G_1$ に少なくとも1つ三角形がある。(i)もし cut
edge があると lemma 2(i) と lemma 3(i) より $\mathbb{F}_2$ -deg $v_{P_{L_1}} <$
 $2(s(\tilde{L}_1) - 1)$, (ii)もし次数が3以下の頂点をもつと lemma 2
(ii), (iv) と lemma 3 (iii), (iv) より $\mathbb{F}_2$ -deg $v_{P_{L_1}} < 2(s(\tilde{L}_1) - 1)$. (iii)も
し G_1 が三角形をもてば lemma 2(v) と lemma 3(v) より

$l\text{-deg}_v P_{L_1} < 2(s(\tilde{L}_1) - 1)$ 従って上の resolution で $r\text{-deg}_v P_L = 2(s(\tilde{L}) - 1)$ を保っている branch は bottom-most graph の連結成分が頂実 即ち自明なグラフとなる branch のみである。そして n 個の成分をもつ trivial link L_0 の R -reduced diagram $\tilde{L}_0$ (そのグラフは n 個の頂実からなる自明なグラフ) に [1] しては $r\text{-deg}_v P_{L_0} = 2(n-1) = 2(s(\tilde{L}_0) - 1)$ が成立している。上の resolution に対して

$$P_L = \sum_{i=1}^m v^{2r_i} (vz)^{s_i} \left(\frac{v^{-1}-v}{z} \right)^{k_i-1} \quad \text{とかける。}$$

ただし $L_i (i=1, 2, \dots, m)$ は k_i 個の成分をもつ bottom-most trivial link で L から L_i (すは G から G_i) へ r_i 回の positive crossing change と s_i 回の smoothing を行なって到達すると仮定している。上の和 $\sum$ において係数の正負の符号で打ち消し合う可能性があるのは $\left(\frac{v^{-1}-v}{z} \right)^{k_i-1}$ の -1 が [1] 係している所のみである。従って $l\text{-deg}_v P_L$ を与える項には cancelling は起らないし, $h\text{-deg}_v P_L$ を与える項は図4の太い矢印の branch であり, その bottom-most trivial link のグラフは R -reduced であって $k_i = \max_{1 \leq j \leq m} \{k_j\} = \#V(G)$ (一定) され故 $h\text{-deg}_v P_L$ の項でも cancelling が起らない。実際 $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ を multi-edge の p 数とすると図4の resolution によって

$$h\text{-deg}_v P_L = (n_1 + n_2 + \dots + n_p) + (\#V(G) - 1)$$

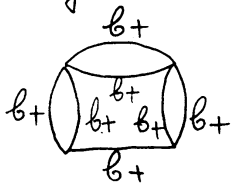
$$l\text{-deg}_v P_L = (n_1 + n_2 + \dots + n_p) - (\#V(G) - 1)$$

従って $r\text{-deg}_v P_L = 2(\#V(G) - 1) = 2(s(\tilde{L}) - 1)$ が示される。

(II) $G = G_{b-}$ の時 $\tilde{L}$ を G から得られる oriented link diagram とし $\tilde{L}!$ を $\tilde{L}$ の全ての交叉点の上下を入れかえて出来る oriented link diagram とする。 $\tilde{L}!$ は $\tilde{L}$ の mirror image であり $\tilde{L}!$ のグラフ $G!$ の辺の code は全て b_+ 。

従って $P_{\tilde{L}}(v, z) = P_{\tilde{L}!}(-v^{-1}, z)$ であって $h\text{-deg}_v P_{\tilde{L}} = (-1) \times (l\text{-deg}_v P_{\tilde{L}!})$, $l\text{-deg}_v P_{\tilde{L}} = (-1) \times (h\text{-deg}_v P_{\tilde{L}!})$ 所以に
 $r\text{-deg}_v P_L = (h\text{-deg}_v P_{\tilde{L}}) = (-1) \times (l\text{-deg}_v P_{\tilde{L}!}) + (h\text{-deg}_v P_{\tilde{L}!})$
 $= r\text{-deg}_v P_{\tilde{L}!} = 2(s(\tilde{L}!) - 1) = 2(s(\tilde{L}) - 1)$ □

例2 次の例は定理1の multi-edges に関する条件は一般に必要である事を示している。 link L の oriented link diagram $\tilde{L}$ のグラフが図5で与えられているとする。



すると $h\text{-deg}_v P_L = 8$, $l\text{-deg}_v P_L = 4$.

従って $r\text{-deg}_v P_L = 4$ 一方 $s(\tilde{L}) = 4$.

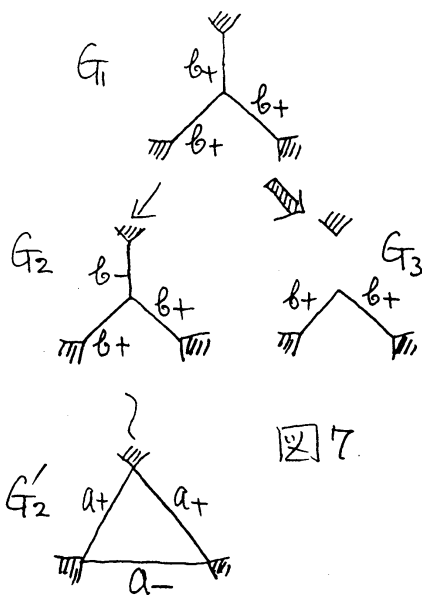
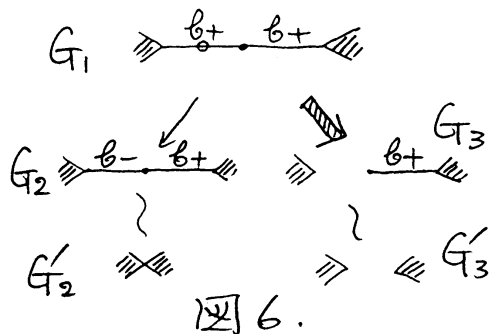
$\therefore r\text{-deg}_v P_L < 2(s(\tilde{L}) - 1)$.

定理2の証明. (I) $\tilde{L}$ は R-reduced oriented positive alternating diagram だから $\tilde{L}$ の code graph G は $G = G_{b+}$ で cut edge をもっていないと仮定してよい。(A) オ1段. 図4と同じ G の resolution を取る。すると bottom-most graph

として simple graph と trivial graph の union を得る。

Lemma 2 (i) の変形を使って R -reduced graph を得る。 G_1 をそのようなグラフとすると G_1 は cut edge のない simple graph と trivial graph の union で辺の code は全て b_+ 。

(B) 2 段 上の G_1 の連結成分を改めて G_1 とおく。 G_1 が自明でないグラフ (即ち辺を持っている) なら Lemma 1 によって次の3つの場合のいずれかが起る。(1) 次数が2の頂点がある (2) 次数が3の頂点がある。(3) G_1 が三角形を含む。(1)の時は図6の resolution を行ない G_2 に lemma 2 (ii) の変形を行ない



G_3 には lemma 2 (i) の変形を行なう。(2) の場合には図7のような resolution を行なう。そして G_2

には lemma 2 (iv) の変形を行ない、 G_3 は上の (1) と同じ扱いをする。(3) の場合には図8のような resolution を行ない、 G_2 には

lemma 2 (v) の変形を行なう。 G_3 に関しては今迄の方法を繰り返す。この方法を bottom-most link が trivial link になる迄繰り返す。trivial link の R -reduced

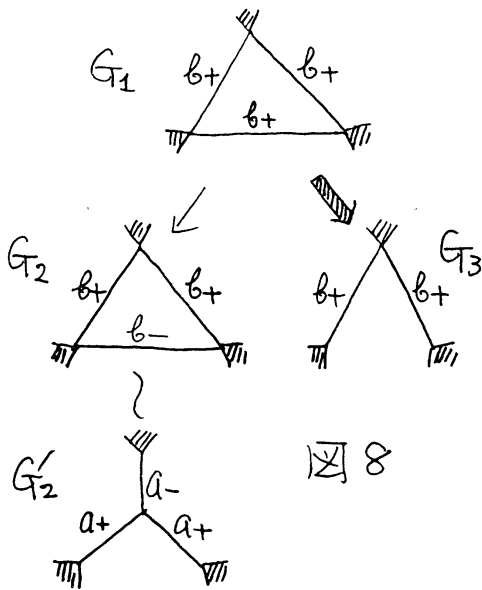


図 8

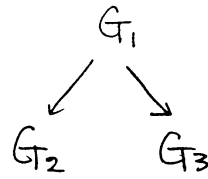


図 9.

graph においては $h\text{-deg}_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1)$, $l\text{-deg}_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1)$ が成立している。上の resolution において図

9 のようなグラフの 3 枝を考える。 $l\text{-deg}_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L}_i) - (s(\tilde{L}_i) - 1)$ ($i=2$ 或 3) ($\tilde{L}_i$ は graph G_i に対応する link diagram) と仮定すると $l\text{-deg}_v P_{L_1} = \tilde{c}(\tilde{L}_1) - (s(\tilde{L}_1) - 1)$ 何故なら全ての crossing change と smoothing は $b+$ code の所で行なわれるので定理 1 の証明の時と同じに

$$P_L = \sum_{i=1}^m v^{2r_i} (vz)^{s_i} \left(\frac{v-Lv}{z} \right)^{R_i-1} \quad \text{とかける。}$$

従って $l\text{-deg}_v P_L$ を計算するとき係数の正負による打ち消しは考慮しなくてよい。よって $l\text{-deg}_v P_{L_1} = \min(l\text{-deg}_v P_{L_2} + 2, l\text{-deg}_v P_{L_3} + 1)$ 。一方 $\tilde{c}(\tilde{L}_1) = \tilde{c}(\tilde{L}_2) + 2 = \tilde{c}(\tilde{L}_3) + 1$, $s(\tilde{L}_1) = s(\tilde{L}_2) = s(\tilde{L}_3)$ だから $l\text{-deg}_v P_{L_i} = \tilde{c}(\tilde{L}_i) - (s(\tilde{L}_i) - 1)$ ($i=2$ 或 3) なら $l\text{-deg}_v P_{L_1} = \tilde{c}(\tilde{L}_1) - (s(\tilde{L}_1) - 1)$ が成立。そこで上の resolution において G が lemma 2 (i), (iii) の変形のみを用いて bottom-most trivial link に到達する branch があれば $l\text{-deg}_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1)$ が成立する。実際図 6, 7, 8

の太い矢印をたどれば良いから $l\text{-deg}_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L}) - (s(\tilde{L}) - 1)$ が成立する。今定理の仮定から positive diagram のみを考えればよいから Morton の定理より $s(\tilde{L}) \geq \tilde{c}(\tilde{L}) + 1 - (l\text{-deg}_v P_L) = c(\tilde{L}) + 1 - (l\text{-deg}_v P_L) = c(\tilde{L})$ である。ここで $c(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の交叉実数。そして $c(\tilde{L})$ は reduced alternating diagram の所で最小となる。そして Morton の不等号は上の議論により等号となるから $s(\tilde{L})$ は L の全ての positive diagram の Seifert circles 数のうちで最小を表わす。

(II) $G = G_{B-}$ の時 lemma 2 (II) (i)'-(v)' と lemma 3 (i)'-(v)' と Morton の不等式 $l\text{-deg}_v P_L \leq \tilde{c}(\tilde{L}) + (s(\tilde{L}) - 1)$ を使えばよい。

References

- [FYHLM0] Freyd, Yetter, Hoste, Lickorish, Millet and Ocneanu, "A new polynomial invariant of knots and links," Bull. A.M.S. 12 (1985) 239-246.
- [K₁] Kobayashi, K, "グラフと絡み輪に関する多項式" 数理解析研講究録 566 (1985) 130-144.
- [K₂] Kobayashi, K, "Coded graph of oriented links and Homfly polynomial" to appear in North Holland Math.

Studies "Topology and Computer Science".

[M₁] Morton, H, "Seifert circles and knot polynomials"
to appear

[M₂] ———, "Closed braid representatives for a link
and its 2-variable polynomial." to appear.

[Mu] Murasugi, K, "Jones polynomials and classical
conjectures in knot theory" to appear

[Y] Yamada, S, "The minimal number of Seifert circles
equals the braid index of a link, to appear