

# Forcing and consistency proof in General topology

琉大教育 家本 宣幸 (Nobuyuki kemoto)

$M, N$  は ZFC のモデルで,  $M \subset N$  を満たしてゐるとする。  
 $M$  で  $X$  をベース  $B$  を持つ位相空間とすると, あきらかに,  $N$  で  $B$  は  $X$  のベースとなる。このことから  $N$  で  $X$  を位相空間と考えることができる。簡単な計算で  $M$  で  $X$  が  $T_0$  ( $T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ ) ならば,  $N$  で  $X$  は  $T_0$  (それぞれ  $T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ ) かわかる。更に  $M$  で  $X$  が距離空間であれば,  $N$  で  $X$  は距離空間に存することもわかる。又,  $M$  で  $X$  を正則位相空間とし,  $X$  のベースの最小濃度を  $\kappa$  とし,  $\mathbb{P}$  を  $\kappa$  を可算順序数につぶす半順序集合, たとえば  $F_n(\kappa, w, w)$ , とする。  $G$  を  $\mathbb{P}$ -generic over  $M$  なるフィルターとすると,  $M[G]$  で  $X$  は可算ベースを持つ正則位相空間となり,  $X$  は距離空間となる。このことは, あるモデルで正則位相空間はモデルを拡張することにより距離空間にあることができるということ主張してゐる。特に, 正規位相空間はモデルを拡張することにより,

正規にできる。逆に、 $M, N$  が ZFC のモデルで  $M \subset N$  を満たしている時、 $M$  で正規な空間  $X$  は  $N$  で  $X$  は正規になるかというところが次の問題になってくる。これは一般には否定的である。 $M \models MA$  (Martin's axiom) と  $CH$  (Continuum Hypothesis) の否定を満たすモデルとし、 $M$  で  $\mathbb{R}$  を濃度  $\kappa$  の実数の部分集合とする。 $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  とし  $y > 0$  なる  $(x, y)$  の近傍は普通の Euclid の意味の近傍で、 $(x, 0)$  の近傍は、 $(x, 0)$  で接する円板の中身と  $\{(x, 0)\}$  の和集合で与える。 $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)$  とすると  $M[G]$  で  $X$  は正規でたいていことがわかる。一方、 $M$  で  $X$  は正規である。ここで  $G$  は  $\mathbb{P}$ -generic over  $M$  なフィルターである。この例は、 $MA + \neg CH$  を満たすモデルで構成される距離化不可能な、separable Moore 空間である。同様な方法で  $\beta\omega$  の正規な部分空間  $X$  で、 $\text{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)$  で拡張したモデルでは正規でない real な例を作ることが出来るか。Moore (第一可算) ではたいてい。ここで、real な例とは、集合論の付加的な axiom たとは、 $MA, CH$  などと否定せずに構成できる例のことである。この周辺の問題として次をあげておく。

問題 1 real な正規 Moore (第一可算) 空間でないモデルで正規とはならない例があるか。

問題 2  $M$  で  $X$  を正規空間とする時, 半順序集合  $\mathcal{L}$  がどのような条件を満たしていれば,  $M[\mathcal{L}]$  で  $X$  は正規となるか。