

## シェルモデル乱流に対する力学系解析

小林 幹

東北大学原子分子材料科学高等研究機構

Miki U. Kobayashi

Tohoku University, WPI AIMR  
miki@wpi-aimr.tohoku-u.ac.jp

### アブストラクト

GOY シェルモデル乱流における間欠性に対して力学系解析を行った結果を報告する。特に、力学系理論において重要な役割を演ずるリアプノフ解析と不安定周期軌道に着目して力学系解析を行い、主に2つの結果を得た。一つ目に、ある特定の不安定周期軌道が間欠性のラミナー状態と密接に関係する事を明らかにした。そして、その不安定周期軌道に対してリアプノフ解析を行う事で、その不安定周期軌道が乱流解に対してラミナー状態への案内役として振る舞う事を示した。二つ目に、シェルモデル乱流解に対して共変リアプノフ解析を用いる事で、間欠性の新しい特徴付けを得た。具体的には、共変リアプノフベクトルを用いて定義される有限時間リアプノフ指数のダイナミクスによってシェルモデル乱流間欠性の特徴付けを行った。

## 1 はじめに

発達した流体乱流における動力的に重要な性質は、時空間で間欠性を持つことである [1]。間欠性とは、時空間において穏やかな状態と乱れた状態がランダムに出現する現象の事である。流体乱流における間欠性に関する研究の多くは、統計的観点からのものであり、例えば、速度差の確率密度関数は間欠性が原因でガウシアンからずれることが知られている [2, 3]。しかし、間欠性は動的な現象であるため、統計的観点からの研究だけではなく、動力的観点からの研究も間欠性を理解する為には重要である。そのため、力学系理論において重要なリアプノフ解析などを用いて、乱流間欠性の動力学を解析する事は大変重要であると考えられる。最近、比較的低いレイノルズ数をもつ2次元コルモゴロフ流に対して、力学系の観点からリアプノフ解析が行われ、コルモゴロフ流には、レイノルズ数に対して双曲-非双曲転移が存在する事が明らかにされた [4]。一方で、非常に発達した3次元乱流に対するリアプノフ解析などの力学系解析を行うことは、計算資源の問題で大変難しいのが現状である。そのため、3次元ナビエ-ストークス乱流のモデルとして有名なGOY シェルモデルを用いて、乱流の力学系解析が行われている [5, 6, 7]。例えば、シェル

モデル乱流に対するリアプノフ解析 [8] やシェルモデル乱流解に埋め込まれた不安定周期軌道に関する研究である [9]。

本論文では、シェルモデル乱流間欠性に対して力学系解析、特に不安定周期軌道解析と共変リアプノフ解析を行う。共変リアプノフ解析に関する結果は、Kobayashi and Yamada により詳しくまとめられている [10]。

## 2 GOY シェルモデル

ここでは、3次元乱流のモデルとして知られる GOY シェルモデルについて簡単に説明する。GOY シェルモデルは乱流におけるエネルギーカスケード輸送の抽象化モデルである。波数空間を  $k_j = 2^{j-4}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) と  $N$  個に離散化して、それぞれの  $k_j$  のモードに対して速度に対応した複素変数  $u_j$  が割り当てられている。 $u_j$  の従う運動方程式は以下で与えられる：

$$\frac{du_j}{dt} = -\nu k_j^2 u_j + i(a_j u_{j+1}^* u_{j+2}^* + b_j u_{j-1}^* u_{j+1}^* - c_j u_{j-1}^* u_{j-2}^*) + \delta_{j,1} f, \\ (j = 1, 2, \dots, N)$$

ただし、\* は複素共役を表す。そして、粘性係数  $\nu$  と外力  $f$  が 0 の時に、エネルギー  $E = \sum_j |u_j|^2$  が保存するという制約を満たす為に、外力は  $a_j = k_j, b_j = -\delta k_{j-1}, c = (1-\delta)k_{j-2}, b_1 = c_1 = c_2 = a_{N-1} = a_N = b_N = 0$  で与えられる。ここでは、乱流がコルモゴロフの  $-5/3$  乗則を満たすように、パラメタの値を  $\delta = 1/2, N = 14, \nu = 10^{-5}, k_0 = 2^{-5}, f = (1+i)0.005$  と選ぶ事にする。本論文の結果は、このパラメタを多少変えても定性的な結果は変化しないことは確認済みである。

### 2.1 間欠性

GOY シェルモデル乱流は、ナビエ-ストークス乱流の静的な統計性 (例えば、パワースペクトルや構造統計関数) のみならず、動的な統計性も似た振る舞いを示す事が知られている。例えば、発達したナビエ-ストークス乱流や乱流実験で観測される振る舞いと同様に、シェルモデル乱流も間欠性を示す事が知られている [8]。図 1 は、シェルモデルにおけるエネルギー散逸率  $\epsilon = \nu \sum_{n=1}^N k_n^2 |u_n|^2$  の時間発展を示しており、エネルギー散逸率の時間発展は間欠的な振る舞いをすることが見て取れる。

本論文では、間欠性におけるラミナー状態とバースト状態のダイナミクスを扱うので、これらの状態を明確に定義する必要がある。ここでは、エネルギー散逸率の値が  $\epsilon \leq 0.0001$  の時に乱流はラミナー状態、 $\epsilon > 0.0001$  の時に乱流はバースト状態にあると定義する。

## 3 不安定周期軌道解析

本節では、GOY シェルモデル乱流の間欠性におけるラミナー状態に着目して、ラミナー状態がどのようなメカニズムで発生するのかを力学系の観点から解釈する。特にここでは、乱流アトラクターに埋め込まれている不安定周期軌道に着目する。

シェルモデル乱流アトラクタには、少なくとも 2 つの種類の不安定周期軌道が埋め込まれている事が知られている [9]。一つは、速度の構造関数のスケーリング指数が乱流のそれと似た値を持つ不安定周期軌道で Intermittency solution と呼ばれている。Intermittency

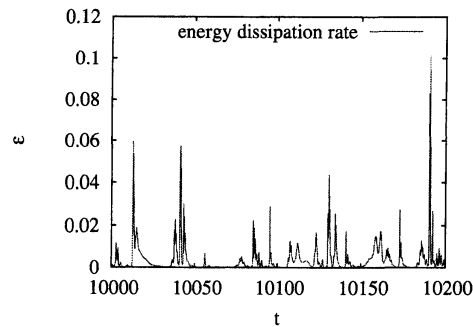


図 1: エネルギー散逸率の時間発展。

solution は乱流におけるいくつかの統計量を良く近似するいわば乱流のスケルトンの役割を演じる不安定周期軌道である。もう一方は、エネルギースペクトルがコルモゴロフの $-5/3$ 乗則を満たす不安定周期軌道で Kolmogorov solution と呼ばれている。Kolmogorov solution は乱流のなかでどのような役割を演じているかは未だ明らかにされていなかった。本論文では、Kolmogorov solution と間欠性が密接な関係にある事を示す。図 2 は  $\Re u_{14}$  と  $\Im u_{14}$  によって張られる空間における Kolmogorov solution の軌道と、ラミナー状態へ遷移する直前の乱流解の軌道の一例を描いている。図 2 は、乱流がラミナー状態へ遷移する直前には Kolmogorov solution の近傍を通ることを示唆している。さらに詳しくこの現象を解析する為に、乱流解が Kolmogorov solution の近傍をってから、ラミナー状態に移行するまでの時間分布を計算した (図 3)。図 3 から、乱流が Kolmogorov solution に近づいてからラミナー状態に移行するまでには、特徴的な時間が存在する事が明らかとなった。これにより、乱流解は Kolmogorov solution の近傍をってから、ラミナー状態に移行することが一般的であることが分かる。

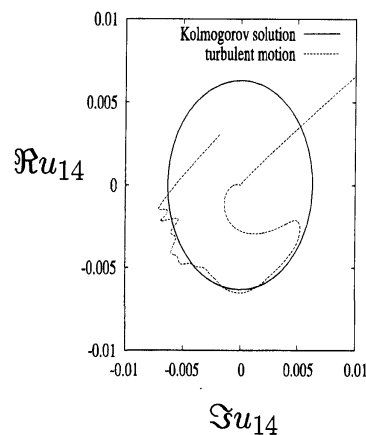


図 2: Kolmogorov solution と Kolmogorov solution にトラップされている乱流解の軌道。トラップされている軌道はその後ラミナー状態へ移行する。

次になぜそのような事が一般的に起こりうるのかに関して、Kolmogorov solution の線形安定性解析を行うことで解釈を与える。Kolmogorov solution の線形安定性解析の結果、不安定方向が 2 方向、そして安定方向が残りの 26 方向であることが確かめられた。さら

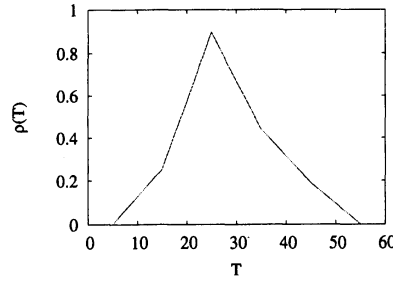


図 3: 乱流解が Kolmogorov solution に接近してからラミナー状態に至までの時間分布

に、不安定な2方向はほとんど同じ方向を向いており、どちらも原点の方向を向いている事が確認された。安定方向が多いことは、Kolmogorov solution の近傍において、乱流解が Kolmogorov solution にトラップされ易いことを意味している。また、2つの不安定方向がどちらも原点の方向を向いている事は、出て行くときは原点の方に向かって出て行くことを意味している。乱流解が原点近傍に留まっている状態が乱流間欠性のラミナー状態に対応している。このことより、Kolmogorov solution は乱流解を自身の近くに引きつけて、その後乱流をラミナー状態へ導いていると考えられる。つまり、Kolmogorov solution はラミナー状態へのいわば案内役として振る舞っているのである。

#### 4 共変リアプノフ解析

ここでは、シェルモデルの間欠性を共変リアプノフ解析によって特徴づける。特に、有限時間リアプノフ指数のダイナミクスと間欠性のダイナミクスの関わりを詳細に解析する。本研究で用いる有限時間リアプノフ指数は、共変リアプノフベクトル(リアプノフ指数を与える摂動ベクトル)を用いて計測されたものであり、従来のグラムシュミットベクトルを用いた有限時間リアプノフ指数ではないことを強調しておく [11]。共変リアプノフベクトルを用いた有限時間リアプノフ指数 (FTCLE) は以下のように定義される:

$$\lambda_{\tau}^j(t) = \frac{1}{\tau} \log \frac{|\mathbf{v}_j(t+\tau)|}{|\mathbf{v}_j(t)|}, \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{v}_j(t)$  は  $j$  番目のリアプノフ指数  $\lambda_j$  に対応した時間  $t$  における共変リアプノフベクトルである。エルゴード系の場合、 $\lambda_{\tau}^j(t) \rightarrow \lambda_j$  as  $\tau \rightarrow \infty$  が成り立つ。図4は CLV を用いて定義された有限時間リアプノフ指数 (FTCLE) の時間変化を示している。図4から明らかなように、エネルギー散逸率と同様に FTCLE の時間発展も間欠的な振る舞いをしている。最大リアプノフ指数に対応した有限時間リアプノフ指数は間欠的に振る舞うことは過去の研究からも知られていたが、それ意外の FTCLE も間欠的な振る舞いをしていることが本計算により明らかとなった。

ここで、それぞれの FTCLE の時間発展の乱雑さの程度に関して、乱流がラミナー状態にあるときと、バースト状態にあるときでどれくらい違うかを定量化する。図4から、それぞれの FTCLE が穏やかに振る舞っているときには、FTCLE 同士の大きさの入れ替えがあまり起こっていないように見える。この予想を確かめる為に、 $i$  番目の FTCLE が他の FTCLEs と単位時間に平均何回入れ替えを起こすかを測る:

$$(\mu_{\tau}^i)_{l/b} = \left\langle \sum_{j=1, j \neq i}^{2N} \Theta[(\lambda_{\tau}^i(k\tau) - \lambda_{\tau}^j(k\tau))(\lambda_{\tau}^i((k-1)\tau) - \lambda_{\tau}^j((k-1)\tau))] \right\rangle_{l/b},$$

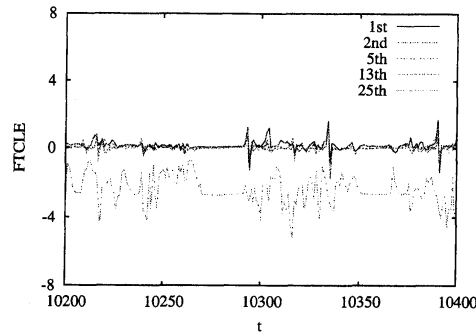


図 4: FTCLE の時間発展  $\lambda_\tau^j(t), \tau = 1$

ただし、 $\Theta$  はステップ関数で、 $\langle \rangle_{l/b}$  は乱流解がラミナー/バースト状態にいる時間のみ平均する条件付き時間平均を表す。つまり、 $(\mu_\tau^i)_{l/b}$  は、 $i$  番目の FTCLE がラミナー/バースト状態にいる際に単位時間辺り平均して何回他の FTCLE と入れ替えを起こすかを表している。

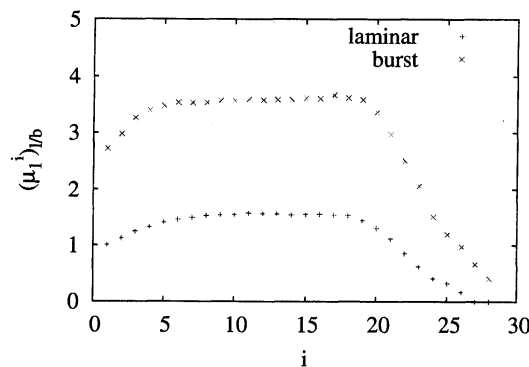


図 5:  $i$  番目の FTCLE が他の FTCLE と単位時間辺りに平均何回入れ替えを起こすかを示している。+ は乱流解がラミナー状態、 $\times$  は乱流解がバースト状態の時に平均された値を表している。

図 5 より、全てのインデックス  $i$  における FTCLE に対して、ラミナー状態にある時の入れ替え回数は、バースト状態にいる時の入れ替え回数より少ないことが分かる。これは、FTCLE の時間発展が乱流のラミナー、バースト状態と相関があり、FTCLE を用いてラミナー、バーストの特徴付けが可能であることを示唆している。より詳細な議論は、Kobayashi and Yamada を参照されたい [10]。

## 5 まとめ

本論文では GOY シェルモデル乱流に対して力学系の解析において重要な役割を演ずる 2 つの道具を用いて解析した。一つは乱流解に埋め込まれている不安定周期軌道である。特に、Kolmogorov solution と呼ばれる不安定周期軌道に着目した。我々の解析により、Kolmogorov solution は乱流解に対するいわば”ラミナーへの案内役”として振る舞っていることを明らかにした。つまり、Kolmogorov solution は乱流解を自身の近傍にトラップさせて、その後ラミナー状態へ乱流を追いやっている。Kolmogorov solution の

ような単純な解が間欠性と密接に関わっているという事実は大変興味深い。本論文では、Kolmogorov solution の線形安定性解析のみを行ったが、より詳細かつ厳密な議論を行うためには Kolmogorov solution の大域的な安定多様体と不安定多様体を考慮に入れた解析を行う必要がある。

2つ目は共変リアプノフベクトルを用いて定義される有限時間リアプノフ指数 (FTCLE) である。本研究で用いる有限時間リアプノフ指数は、共変リアプノフベクトルを用いて計測されたものである。したがって、最大リアプノフ指数に対応した有限時間リアプノフ指数のみならず、それ以外の有限時間リアプノフ指数に関しても力学系解析として意味をもつ量となる。本論文では、FTCLE の時間発展に対して大きさの入れ替えに着目した。結果として、乱流がラミナー状態にあるときは FTCLE の大きさの入れ替えはあまり頻繁に起こらないが、乱流がバースト状態にあるときは FTCLE の大きさの入れ替えは頻繁に起こる事が明らかとなった。これは、FTCLE の時間発展が乱流のラミナー、バースト状態と相関があり、FTCLE を用いてラミナー、バーストの特徴付けが可能であることを示唆している。この結果はラミナー状態とバースト状態が埋め込まれているそれぞれの空間の次元と関係している [10]。

## 6 謝辞

本研究の3節で扱った不安定周期軌道のデータは北海道大学理学研究科の斉木吉隆氏から頂いたものである。さらに4節の結果は京都大学数理解析研究所の山田道夫氏との共同研究である論文 [10] の結果の一部と本質的には同等のものである。両氏には心より感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [2] K.R. Sreenivasan and R.A. Antonia, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **29** (1997) 435.
- [3] T. Ishihara, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **41** (2009) 165.
- [4] M. Inubushi, M.U. Kobayashi, S-I. Takehiro and M. Yamada, *Phys. Rev. E*, **85** (2012), 016331.
- [5] E.B. Gledzer, *Sov. Phys. Dokl.* **18** (1973) 216.
- [6] M. Yamada and K. Ohkitani, *J. Phys. Soc. Jap.* **56** (1987) 4210.
- [7] M. Yamada and K. Ohkitani, *Phys. Rev. E*, **57** (1998) R6257.
- [8] T. Bohr, M.H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Dynamical Systems Approach to Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
- [9] S. Kato and M. Yamada, *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 025302(R).
- [10] M.U. Kobayashi and M. Yamada, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, to appear.
- [11] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi and P. Politi, *Phys. Rev. Lett.*, **99**(13) (2007) 130601.