

ある 2 階退化楕円型作用素の準楕円性について

京大・理 森岡達史 (Morioka Tatsushi)

本文では、3 変数 2 階微分作用素

$$(1.1) \quad L = D_t^2 + f(t)D_x^2 + g(x)D_y^2$$

が準楕円性 (hypoellipticity) をもつための十分条件を与える。

2 階微分作用素

$$(1.2) \quad P = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x) D_k D_l + i \sum_{k=1}^n b_k(x) D_k + c(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$(a_{kl}, b_k \in C^\infty, \text{ Real}, c(x) \in C^\infty, D_k = -i \partial_{x_k})$$

が準楕円性をもつための十分条件として以下のことが知られている。

定理 A (森本 [6])

$$\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x) \xi_k \xi_l \geq C \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$$

を仮定する。さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $C > 0$ が存在して

$$(1.3) \quad \|\log \Lambda u\|^2 \leq \varepsilon \operatorname{Re}(Pu, u) + C \|u\|^2 \quad \text{for } u \in C_0^\infty(\Omega)$$

をみたすならば、 P は Ω で準楕円性をもつ。ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $\log \Lambda$ は $\log(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ を Symbol とする擬微分作

用素である。

定理 A は次の結果の一般化になっている。

定理 B (Kusacka - Strack [4])

$$(1.4) \quad L = D_t^2 + D_x^2 + g(x) D_y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$(g(0)=0, \quad g(x)>0 \text{ for } x \neq 0, \quad x g'(x) \geq 0)$$

は $\lim_{x \rightarrow 0} |x \log g(x)| = 0$ のとき (かつそのときに限って) 準楕円型になる。

$g(x)$ が有限次で消えるとき、すなわちある d に対して $g^{(d)}(0) \neq 0$ となるとき L が準楕円型になることは [4] 以前にすでに知られていた。定理 B は $g(x)$ が無限次で消える場合も含んでいる。たとえば $g(x) = e^{-|x|^{-\sigma}}$ ($\sigma > 0$) の場合、定理 B より L は $\sigma < 1$ のとき (かつそのときに限って) 準楕円型になることがわかる。さらに $\sigma < 1$ は L が (1.3) を満たすための必要十分条件になっている。

さて、次の退化楕円型作用素

$$L_0 = D_t^2 + t^{2k} D_x^2 + e^{-|x|^{-\sigma}} D_y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$(k=0, 1, 2, \dots)$$

の準楕円性を、定理 A を用いて判定してみよう。 $k=0$ のときは (定理 B によって) L は $\sigma < 1$ の場合に限って準楕円型に

なることがわがっている。一般の(正の整数) k に対しては
 $\sigma < \frac{1}{k+1}$ が(1.3)をみたすための必要十分条件になっている。し
 たが、 $\sigma < \frac{1}{k+1}$ のとき L_0 は準楕円型になる、しかし、 $\sigma < \frac{1}{k+1}$
 という条件は(L_0 が準楕円性をもつための)必要条件かどう
 かはわからない。そこで L_0 の係数を一般化した退化楕円型作
 用素

$$(1.1) \quad L = D_t^2 + f(t) D_x^2 + g(x) D_y^2$$

の準楕円性について考える。ここで $f(t)$ と $g(x)$ に対しては

$$(1.5) \quad f(0) = g(0) = 0, \quad f(t), g(x) > 0 \quad \text{for } t \neq 0, x \neq 0$$

を仮定している。我々は次の結果を得た。

定理 1. (1.1)の L が(1.5)とさらに

$$(1.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} |t \log f(t)| = 0$$

$$(1.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x \log g(x)| = 0$$

をみたすとき、 L は準楕円型になる。

注意. $f(t)$ が $t f'(t) \geq 0$ をみたすときは、(1.6)は(L が
 準楕円性をもつための)必要条件にもなっている。

定理 1 より L_0 は(正の整数) k の値に関係なく $\sigma < 1$ のと
 き常に準楕円型になることがわかる。

$$\text{例 1.} \quad L = D_t^2 + e^{-|t|^{-\sigma}} D_x^2 + e^{-|x|^{-\sigma}} D_y^2$$

は $\sigma < 1$, $\sigma < 1$ のとき準楕円型, $\sigma \geq 1$ のとき準楕円型でない。

さて、保城 [3] は次の微分作用素の準楕円性を考察した。

$$(1.8) \quad L = D_t^2 + f(t) D_x^2 + g(t) D_y^2$$

ここで、 $f(t), g(t)$ に対しは

$$(1.9) \quad f(0) = g(0) = 0, \quad t f'(t) \geq 0, \quad t g'(t) \geq 0$$

を仮定している。

定理 C-I (1.8) の L が (1.9) とさらに

$$(1.10) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{f(t)} |t \log g(t)| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{g(t)} |t \log f(t)| = 0 \end{cases}$$

をみたすとき、 L は準楕円型になる。

定理 C-II (1.8) の L が (1.9) とさらに次の条件：

$\exists \delta (0 < \delta < 1)$ が存在して

$$(1.11) \quad \sqrt{f(\delta t)} |t \log g(t)| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{near } t=0$$

をみたすとき、 L は準楕円型でない。

定理 C-I, II は $f(t)$ と $g(t)$ がある程度同じ速さで消えるとき L は準楕円型になり、そうでないとき L は準楕円型にならないことを示している。

例 2, 定理 C-I, II より

$$L = D_t^2 + t^{2k} D_x^2 + e^{-|t|^{-\sigma}} D_y^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

は $\sigma < k+1$ のとき、かつそのときに限って準楕円性をもつ。

さて、我々は (1.1) と (1.8) を一般化した

$$(1.12) \quad L = D_t^2 + f(t) D_x^2 + g(t) h(x) D_y^2$$

の準楕円性を考察する。ここで $f(t)$, $g(t)$, $h(x)$ に対しては

$$(1.13) \quad \begin{cases} f(0) = g(0) = h(0) = 0 \\ f(t), g(t), h(x) \neq 0 \quad \text{for } t, x \neq 0 \\ t f'(t) \geq 0, \quad t g'(t) \geq 0 \end{cases}$$

を仮定している。

定理 2 (1.12) の L が (1.13) とさらに

$$(1.14) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{f(t)} |t \log g(t)| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{g(t)} |t \log f(t)| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x \log h(x)| = 0 \end{cases}$$

をみたしているとき、 L は準楕円型になる。

補足. 最近、平良 [8] は 2 階微分作用素の準楕円性について考察し、定理 2 の主張を含む結果を得た。

文献

1. V. S. Fedi On a criterion for hypoellipticity,
Math. USSR Sb 14. (1971) 15 - 45
2. T. Hoshino Microlocal energy method of Mizohata
and hypoellipticity, J. Math. Kyoto Univ 28, (1988)
1-12
3. T. Hoshino Hypoellipticity for infinitely degenerate
elliptic and parabolic operators of second order,
J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988) 615 - 632
4. S. Kusuoka - D. Stroock Application of the Malliavin
calculus part II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.
IA. Math 32 (1985) 1-76
5. S. Mizohata On the Cauchy problem, Academic
Press, 1986
6. Y. Morimoto A criterion for hypoellipticity of
second order differential operators, Osaka J.
Math 24 (1987), 651-675
7. T. Morioka Hypoellipticity for some infinitely
degenerate elliptic operators of second order,
to appear in J. Math Kyoto Univ
8. K. Taira preprint.