

三重ゼータ関数の和の漸近展開について.

富山大・工・江上 繁樹 (Shigeki EGAMI)

megami@eng.toyama-u.ac.jp

$\alpha > 0$, $0 < u, v < 1$, $w > 3$ とする. 級数

$$\zeta_3(u, v, w; \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\alpha+m)^{-u} (\alpha+m+n)^{-v} (\alpha+m+n+l)^{-w}$$

は絶対収束する, $q \in \mathbb{N}$ に対し

$$\bar{J}_3(u, v, w; q) = \sum_{a=1}^q \zeta_3(u, v, w; \frac{a}{q})$$

の $q \rightarrow \infty$ のときの漸近的挙動について考える.

Proposition. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned} J_3(u, v, w; q) &= \frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(v)\Gamma(w)} q \cdot I(u, v, w) \\ &+ \sum_{n=0}^N (-1)^n c_n(v, w) \zeta(u-n) \frac{q^{u-n}}{n!} + O(q^{u-N-1}), \end{aligned}$$

ただし,

$$I(u, v, w) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{z^{w-1}}{e^z - 1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z} - 1} (y+z)^{u-1} dy dz$$

$$C_n(u, v) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(v+n-k) \Gamma(w+k) \Gamma(u+n)}{\Gamma(v) \Gamma(w) \Gamma(u)} \zeta_2(v+n-k, w+k)$$

$$\zeta_2(v, w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-v} (m+n)^{-w}$$

証明のアイデア

Riemann zeta 関数の解析接続のやり方と同じく

$$\Gamma(u) \Gamma(v) \Gamma(w) \zeta_3(u, v, w; \alpha)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{u-1} y^{v-1} z^{w-1} \frac{e^{-\alpha(x+y+z)}}{1 - e^{-(x+y+z)}} \cdot \frac{1}{e^{y+z} - 1} \cdot \frac{1}{e^z - 1} dx dy dz$$

を得る。したがって容易な計算により

$$J_3(u, v, w; \frac{1}{b}) = \frac{g^u}{\Gamma(u) \Gamma(v) \Gamma(w)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{z^{w-1}}{e^z - 1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z} - 1} \frac{x^{u-1}}{e^{x+\frac{y+z}{b}} - 1} x$$

$dx dy dz$

$$= \frac{g^u}{\Gamma(u) \Gamma(v) \Gamma(w)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{z^{w-1}}{e^z - 1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z} - 1} \frac{x^{u-1}}{x + \frac{y+z}{b}} dx dy dz$$

$$+ \frac{g^u}{\Gamma(u) \Gamma(v) \Gamma(w)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{z^{w-1}}{e^z - 1} \frac{y^{v-1}}{e^{y+z} - 1} x^{u-1} h\left(x + \frac{y+z}{b}\right) dx dy dz,$$

$$\text{ただし, } h(A) = \frac{1}{e^A - 1} - \frac{1}{A} \text{ とおいた.}$$

さて、第1項は

$$\frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(v)\Gamma(w)} \cdot I(u, v, w) g^u$$

となる。と仮定、若干の計算の後、わかる、第2項は $h(p)$ の Taylor 展開

$$h\left(x + \frac{y+z}{b}\right) = \sum_{n=0}^N \frac{h^{(n)}(x)}{n!} g^{n!} (y+z)^n + R_N$$

を代入し、 $(y+z)^n$ を2項展開すると、第2項は

$$\sum_{n=0}^N \frac{g^{u-n}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z^{w+k-1}}{e^z-1} \frac{y^{v+n-k-1}}{e^{y+z}-1} dy dz \cdot \int_0^\infty x^{u-1} h^{(n)}(x) dx$$

となる。と仮定、 $k=3$ から

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z^{w+k-1}}{e^z-1} \frac{y^{v+n-k-1}}{e^{y+z}-1} dy dz = \Gamma(v+n-k) \Gamma(v+k) \zeta_2(v+n-k, w+k)$$

であり、また、 $0 < u < 1$ のとき

$$\int_0^\infty x^{u-1} h^{(n)}(x) dx = (-1)^n \Gamma(u-n) \zeta(u-n)$$

となる。残余項の積分から g^{u-N-1} が出ることは Katsurada - Matsumoto [4] と同様になる。

(証明終り)

この問題の由来とその後の発展について、簡単に述べておく。
Motohashi [6] および Katsurada-Matsumoto [4] は、Heath-Brown [2] による

$$\sum_{x \bmod q} |L(\frac{1}{2}, \chi)|^2 \quad (1)$$

の q の負中による三漸近展開を新しい手法を用いて精密化、
一般化した。そこでは二重ゼータ関数に関する同様の和

$$\sum_{a=1}^q \zeta_2(u, v; \frac{a}{q}) \quad (2)$$

の三漸近展開が本質的であった。 u, v はあとで $\frac{1}{2} + \sqrt{-1}R$ 上に持ってくるため、解析接続しておかなければならぬが、
二重ゼータの場合は、これが可能である。三重ゼータの場合、
(より一般にも) 解析接続そのものはできるのであるが、この
Motohashi, Katsurada-Matsumoto とは別の方法であって、
そこから $0 < \operatorname{Re} w < 1$ に対して、命題のようことが言える
わけではない。

ところで、(2) を扱うには、Mellin-Barnes 積分を用いた
Katsurada [3] の別証明があり、本研究集会で、松本耕二
氏は、この手法を多重化して、多重ゼータの解析接続の別証
を見出した[5]。その後、筆者と松本氏は、多重 Mellin-Barnes
積分を用いる新しい方法で、Motohashi, Katsurada-Matsumoto
の結果の三重、より一般に r 重ゼータ関数への一般化
に成功した[1]、したがって、命題は u, v, w が実部が
0 と 1 の間にある複素数のときにも成立する。

その際にあられる、複雑な多重積分が、実は多重ゼータ
 $(C_n(u, w))$ に相当する) であることは、命題との比較から形を
 予想したのであった。そういうわけで、この命題は最終的な結果
 を得る指針とはなったが、その証明には寄与していない。
 もちろん、結果が得られた以上、ここに書いた方法(それは元来の
 Motohashi, Katsurada-Matsumoto の方針であるか)で同じ
 結果を得ることもできそうであるが、まだできていない。

最後に一つ注意しておく。 (2) が一般化されたからと
 いって、(1) の一般化

$$\sum_{x \bmod q} |L(\frac{1}{2}, x)|^{2r} \quad (3)$$

の漸近的挙動について、新しい知見が得られるわけではない。
 ただ、その見かけ上の "dual"

$$\sum_{a=1}^q |\zeta(\frac{1}{2}, \frac{a}{q})|^{2r} \quad (4)$$

の q 展開はできる見通しかついている。 $r=1$ のときは (3) と (4)
 はほぼ同じ困難さなのであるが、 $r \geq 2$ のときは (3) の方が
 はるかに深刻問題のようである。実際、(4) の上からの
 評価は簡単にできるのに対し、(3) の方は指標和のような
 本質的に数論的な量が関係してくるので、上からの評価
 すら解決の問題をふくんでいる。

文献

- [1] S. Egami, K. Matsumoto, in preparation.
- [2] D. R. Heath-Brown, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 148-161.
- [3] M. Katsurada, Lithuanian Math. J. 38 (1998), 77-88.
- [4] M. Katsurada, K. Matsumoto, Math. Z. 208 (1991), 23-39.
- [5] K. Matsumoto, preprint,
- [6] Y. Motohashi, Proc. Japan Acad. 61A (1985) 222-224.