

双曲型方程式に対する

E. E. Levi の条件について

京大 理 溝畑 茂

京大 工 大矢 勇次郎

実、単純特性根をもつ Kowalewski 型方程式 (狭義の双曲型方程式) に対する Cauchy 問題の研究は既に数多く知られている (Petrovsky, Leray, Mizohata [8] etc.) が、更に双曲性を影響領域の存在を以て広義に解するならば、重複特性根をもつ場合も含めて考察すべきであることも分る (Ohya [11], Leray-Ohya [5])。その立場での研究は、2 変数の場合先ず E. E. Levi [6] によりなされ、それとは独立に A. Lax [4]、更にそれを多変数へ拡張した Yamaguti [12] の仕事を挙げる事が出来よう。他方、最近 Kano [2] によって双曲型方程式が L^2 の意味で *bien posé* になる為の必要条件が得られた。斯様な事情の下に、我々は実、重複特性根をもつ Kowalewski 型方程式の (C^∞) 解が一意的に存在し且有限伝播速度をもつ (Petrovsky の意味で *bien posé*) 為の必要、十分条件を求めること (実は Levi の結果を多変数へ拡張すること) を目的とする ([10])。

帯状領域 $\Omega = \{(x, t); x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]\}$ で定義された
 m 階偏微分作用系

$$P(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + \sum_{\substack{|v|+j \leq m \\ j < m}} a_{v,j}(x, t; \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

但し $a_{v,j}(x, t; \frac{\partial}{\partial x})$ は x に関し $(m-j)$ 階微分多項式に對し $\mathcal{C}$ Cauchy 問題

$$(1) \begin{cases} P u(x, t) = f(x, t) \\ \text{初期値 } (t = t_0) \end{cases} \quad 0 \leq t_0 \leq T$$

を考えよ。 $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ とし P の主要部を

$$(2) \quad P_m(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = i^m \{ D_t^m + h_1(x, t; D) D_t^{m-1} + \dots \\ \dots + h_{m-1}(x, t; D) D_t + h_m(x, t; D) \}$$

と書く時

特性根は高々 2 重で、その重複度は $(x, t; \xi)$ に関し
 不変 (一定) である; 即ち

$$(3) \quad \tau^m + h_1(x, t; \xi) \tau^{m-1} + \dots + h_m(x, t; \xi) \\ = \prod_{i=1}^s (\tau - \lambda_i(x, t; \xi))^{2} \prod_{j=s+1}^{m-s} (\tau - \lambda_j(x, t; \xi))$$

に於て $\lambda_i(x, t; \xi)$ $1 \leq i \leq m-s$ は実で相異なる とする

ξ に関し 1 次同次函数 $\lambda_i(x, t; \xi)$ に對し $\text{op. p. d. (= opérateur pseudo-différentiel)}$ を

$$\lambda_i(x, t; D) f(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{ix\xi} \lambda_i(x, t; \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

で定義し $D_t - \lambda_i(x, t; D) = \partial_i$ とし

$$(4) \quad \Pi_m(x, t; D, D_t) = (\partial_{m-s} \cdots \partial_s \cdots \partial_1)(\partial_s \cdots \partial_1)$$

を考へれば $P_m - \Pi_m$ は高々 $(m-1)$ 階の op. p. d. z'' あり。

$$(5) \quad i^m \{P_m - \Pi_m\} + i^{m-1} P_{m-1} = i^{m-1} C_{m-1}(x, t; D, D_t)$$

とまとめ、これを底: $1, \partial_1, \partial_2 \partial_1, \dots, \partial_s \partial_{s-1} \cdots \partial_1,$

$\partial_1 \partial_s \cdots \partial_1, \dots, \partial_{m-s-1} \cdots \partial_s \cdots \partial_1 \partial_s \cdots \partial_1$ を用い

て表わそう: 即ち

$$\begin{aligned} (6) \quad C_{m-1}(x, t; D, D_t) &= C_{m-1}(x, t; D) + C_{m-2}(x, t; D) \partial_1 \\ &+ \cdots + C_{m-s}(x, t; D) \partial_{s-1} \cdots \partial_1 + C_{m-s-1}(x, t; D) \partial_s \cdots \partial_1 \\ &+ \cdots + C_0(x, t; D) \partial_{m-s-1} \cdots \partial_s \cdots \partial_1 \partial_s \cdots \partial_1 \\ &+ Q_{m-2}(x, t; D, D_t) \end{aligned}$$

但し $C_{m-i}(x, t; \xi)$ は ξ につき $(m-i)$ 次同次, Q_{m-2} は (D, D_t) につき高々 $(m-2)$ 階の op. p. d. とする。

条件 A $C_{m-i}(x, t; \xi) \equiv 0 \quad (1 \leq i \leq s) \quad \forall (x, t; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$

ここ z'' $C_{m-1}(x, t; D)$ は次の様に一意的に定まる。

実際、例えば C_{m-1} の *symbole principal* を $\sigma_{m-1}(C_{m-1})$

とし

$$(7) \quad C_{m-1}(x, t; \xi) = \sigma_{m-1}(C_{m-1}) \Big|_{\tau = \lambda_1(x, t; \xi)}$$

が分る。そこで、

$$\Pi_m^{(1)}(x, t; D, D_t) = (\partial_{m-s} \cdots \partial_s \cdots \partial_2)(\partial_s \cdots \partial_2) \partial_1^2$$

と書くと

$$\Pi_m - \Pi_m^{(1)} = (\partial_{m-s} \cdots \partial_2)(\partial_1 \partial_s \cdots \partial_2 - \partial_s \cdots \partial_2 \partial_1) \partial_1$$

だから $\sigma_{m-1}(\pi_m - \pi_m^{(1)})$ は $(\tau - \lambda_1)$ で割切れる。従って
 $(\tau - \lambda_1) \in \text{mod.}$ とし

$$(8) \quad \sigma_{m-1}(C_{m-1}(x, t; D, D_t)) \\ \equiv \lambda \sigma_{m-1}(P_m - \pi_m^{(1)}) + P_{m-1}(x, t; \xi, \tau)$$

更に

$$\pi_{m-1}^{(1)} = (\partial_{m-5} \circ \cdots \circ \partial_5 \circ \cdots \circ \partial_2) \circ (\partial_5 \circ \cdots \circ \partial_2 \circ \partial_1)$$

とみると、同じ理由から

$$(9) \quad \sigma_{m-1}(P_m - \pi_m^{(1)}) \\ \equiv \sigma_{m-1}(\pi_{m-1}^{(1)} \circ \partial_1 - \pi_{m-1}^{(1)} \partial_1) \pmod{(\tau - \lambda_1)}$$

そして Matsumura [7] により

$$(9) \text{の右辺} = \lambda^{-1} \left(\frac{\partial \pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\ell} \frac{\partial \pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

他方 $P_m(x, t; \xi, \tau) = (\tau - \lambda_1)^2 \pi(\tau - \lambda_1)$ を用いると
 容易に $\frac{\partial \pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\lambda_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_m'}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\lambda_1}$, $\frac{\partial \pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \xi_{\alpha}} \Big|_{\tau=\lambda_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_m'}{\partial \xi_{\alpha}} \Big|_{\tau=\lambda_1}$

但し $P_m' = \frac{\partial P_m}{\partial \tau}$ が分る

$$(10) \quad \sigma_{m-1}(C_{m-1}(x, t; D, D_t)) \Big|_{\tau=\lambda_1} \\ = P_{m-1}(x, t; \xi, \lambda_1) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P_m'}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\ell} \frac{\partial P_m'}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_{\alpha}} \right]_{\tau=\lambda_1}$$

一般に

$$(11) \quad L_j(x, t; \xi) = \left[P_{m-1}(x, t; \xi, \tau) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_m'}{\partial \tau} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\ell} \frac{\partial P_m'}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_{\alpha}} \right) \right]_{\tau=\lambda_j}$$

$$(1 \leq j \leq S)$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \sigma_{m-1}(C_{m-1}) \Big|_{\tau=\lambda_j} &= L_j(x, t; \xi) \\ &= C_{m-1} + C_{m-2}(\lambda_j - \lambda_1) + \cdots + C_{m-j}(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_1) \end{aligned}$$

を示し得て次の2条件は同値となる。

(I) (P_m, P_{m-1}) が条件 A を満たす。

(II) $L_j(x, t; \xi) \equiv 0 \quad (1 \leq j \leq S) \quad \forall (x, t; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{\ell}$

定理 1. (十分性)

(I) が成り立てば (1) は *uniformément bien posé* である。

定理 2. (必要性)

(1) が *uniformément bien posé* ならば (II) が成り立つ。

定理 3. (影響領域の存在)

条件 A の下に (1) の解の support は各 t に対して

$$\left\{ x; \bigcup_{\xi} |x - \xi| \leq \lambda_{\max}(t - t_0) \quad t \geq t_0 \right\}$$

但し $\xi \in \bigcup_{j=1}^m \text{supp.} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j-1} u(x, t_0) \right]$

$$\lambda_{\max} = \sup_{1 \leq i \leq m-S} |\lambda_i(x, t; \xi)|$$

$$1 \leq i \leq m-S$$

$$(x, t) \in \Omega, \quad |\xi| = 1 \quad \text{に含まれる。}$$

§ 1 十分性

(1) は (5) により

$$(1.1) \quad [i^m \Pi_m + i^{m-1} C_{m-1}] u + R_{m-2} u = f$$

但し R_{m-2} は op. p. d. (高々 $(m-2)$ 階) である。先ず

$$(1.2) \quad [\Pi_m - i C_{m-1}] u = i^{-m} f \text{ を考えよう。}$$

$$(1.3) \quad U = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$$

$$\equiv {}^t(u, \partial_1 u, \partial_2 \partial_1 u, \dots, \partial_{m-s-1} \dots \partial_1 u)$$

とあくと (I) が成立してゐることを考慮して

$$(1.4) \quad D_t U = H(x, t; D) U + F$$

$$H(x, t; \xi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_{m-s} & 1 \end{bmatrix}$$

但し $\lambda_i = \lambda_i(x, t; \xi) : \xi$ につき 1 次同次

$C_{m-i} = C_{m-i}(x, t; \xi) : \xi$ につき $(m-i)$ 次同次

$$F = {}^t(0, \dots, 0, i^{-m} f)$$

$$\text{更に } V = {}^t((\Lambda+1)^{m-2} u_0, \dots, (\Lambda+1)^{m-s-1} u_{s-1}, (\Lambda+1)^{m-s-1} u_s, \dots, u_{m-1})$$

とあくと

$$(1.5) \quad D_t V = H_0(x, t; D) \Lambda V + B(x, t; D) V + F$$

$$H_0(x, t; \xi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ 0 & & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_{m-s} & 1 \end{bmatrix}$$

但し $\lambda_i = \lambda_i(x, t; \xi/|\xi|)$

B は $(L^2(\mathbb{R}^d))^m$ の有界作用素

即ち $H_0(x, t; D)A$ は 2 つの正規双曲型行列の直和になる。

従って $V(x, t_0) \in \mathcal{D}_{L^2}^k$, $F(x, t) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^k)$ に対し $\mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^k) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{k-1})$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) での (1.5) の一意的解が存在し

$$(1.6) \quad \|V(t)\|_k \leq C(T) \left[\|V(t_0)\|_k + \int_{t_0}^t \|F(s)\|_k ds \right]$$

を満たす

特に $k = 1$ とすると

$$(u_0, u_1, \dots, u_{s-1}, u_s, \dots, u_{m-1})$$

$$\in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m-1} \times \dots \times \mathcal{D}_{L^2}^{m-s} \times \mathcal{D}_{L^2}^{m-s} \times \dots \times \mathcal{D}_{L^2}^1)$$

$$\text{且 } \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{m-2} \times \dots \times \mathcal{D}_{L^2}^{m-s-1} \times \mathcal{D}_{L^2}^{m-s-1} \times \dots \times L^2)$$

だから、勿論

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \right) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m-1} \times \dots \times L^2)$$

が分る。

$$(1.7) \quad ||| u(x, t) |||^2 = \sum_{j=1}^m \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j-1} u(x, t) \right\|_{m-j}^2$$

と定義すれば (1.6) から

$$(1.8) \quad ||| u(x, t) ||| \leq \hat{C}(T) \left[||| (\Lambda + 1) u(x, t_0) ||| + \int_{t_0}^t \|f(x, s)\|_1 ds \right]$$

が成立する。以下

$$(1.9) \quad \|R_{m-2} u(x, t)\|_1 \leq C' \|u(x, t)\|$$

を用いて逐次近似によればよい。

§2 影響領域

space-like な変数変換

$$(2.1) \quad t' = \varphi(x, t), \quad x'_\alpha = x_\alpha \quad (1 \leq \alpha \leq l)$$

を行くと

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varphi_t \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \varphi_{x_\alpha} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \quad \text{だから}$$

(ξ, τ) は $(\varphi_x \tau' + \xi', \varphi_\tau \tau')$ に移ると云ってよい。

([1], [3])

補題 2.1

変換 (2.1) により ∂_i は

$$(2.3) \quad [\varphi_x - \lambda_i(x, t; \varphi_x)] \psi_i(x, t; D, D_x) (D_x - \mu_i(x, t; D)) \\ + e_i(x, t; D, D_x)$$

但し $\psi_i(x, t; \xi, \tau)$ は (ξ, τ) につき 0 次同次

$$\text{且} \quad \prod_{i=1}^m \psi_i(x, t; \xi, \tau) \equiv 1 \quad \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^l - \{0\})$$

又 $e_i(x, t; D, D_x)$ は 0 階の op. p. d. に移る。

この補題は 条件 A が変数変換 (2.1) によって保存されること を意味する： 実際 $\tilde{P}$ ($= P$ を (2.1) で変換したもの) の m 次, $(m-1)$ 次の symbols は夫々

$$\prod_{i=1}^s \left\{ (\varphi_x - \lambda_i(x, t; \varphi_x)) (\tau - \mu_i) \right\}^2 \prod_{j=s+1}^{m-s} (\varphi_x - \lambda_j(x, t; \varphi_x)) (\tau - \mu_j)$$

及 u''

$$\sum_{i=1}^m e_i(x, t; \xi, \tau) \frac{\tilde{P}_m}{\psi_i(\varphi_t - \lambda_i)(\tau - \mu_i)}$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-s-1} \tilde{c}_{m-s-1-i} \prod_{j=1}^i \psi_j(\varphi_t - \lambda_j)(\tau - \mu_j) \prod_{i=1}^s \psi_i(\varphi_t - \lambda_i)(\tau - \mu_i)$$

が分って 夫々因子として $\prod_{j=1}^s (\tau - \mu_j)^2$ 及 $u'' \prod_{j=1}^s (\tau - \mu_j)$

を含むから...

故に定理 1 は (2.1) で変換された Cauchy 問題に適用され、
従って局所的な一意性定理が証明されて、結局、定理 3 を得る。

§3. 必要性

話を簡単にする為に $P_{m-1}(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$ は実係数と仮定する。(1) が (E) で bien posé であって、 $L_j(x, t; \xi)$ ($1 \leq j \leq s$) の少なくとも一つが恒等的に零でない、とすると Mizohata [9] の方法によって矛盾が生ずることを示せばよい。

先ず $L_j(0, 0; \xi)$ の内、少なくとも一つが恒等的に零でないとすれば、 (x_0, t_0) 及びその適当な近傍 V があって次の何れかが起こる。

- (i) ある ξ_0 ($|\xi_0| = 1$) が存在して $L_i(x_0, t_0; \xi_0) \neq 0$
- (ii) $L_i(x, t; \xi) = 0 \quad \forall (x, t) \in V \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$

所が実は (ii) が起こらない場合のみを考えれば十分であることが分る。即ち

$$(3.1) \quad |L_j(x, t; \xi)| \geq \delta > 0 \quad \forall (x, t) \in V \text{ (原点の近傍)} \quad \forall \xi \in W \text{ (単位球面上 } \xi_0 \text{ の近傍)}$$

と仮定してよい。2つの局所化を行う。先ず $\beta(x) \in \mathcal{D}V$ ($\beta(0) \neq 0$) を $Pu = 0$ に作用させて

$$(3.2) \quad P(\beta u) - \sum_{|\sigma| \geq 1} P^{(\sigma)}(\beta^{(\sigma)} u) = 0$$

$$\text{但し} \quad P^{(\sigma)} = i^m \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^\sigma P(x, t; \xi, \tau)$$

ここで V の外部では P の係数を修正してよいことに注意しよう。

次に $\hat{\alpha}(\xi) \in \mathcal{D}_W$ ($0 \leq \hat{\alpha}(\xi) \leq 1$) 且 $\hat{\alpha}(\xi) \equiv 1$ (ξ_0 の近傍) を用いて $\hat{\alpha}_n(\xi) = \hat{\alpha}(\xi/n)$ と定め、作用素 $\alpha_n(D)$ を $\mathcal{F}(\alpha_n(D)f) = \hat{\alpha}_n(\xi) \hat{f}(\xi)$ で定義する。

$\alpha_n(D)$ を (3.2) に左から作用させて

$$P[\alpha_n \beta u] = -[\alpha_n, P][\beta u] + \sum_{|\sigma| \geq 1} \left([\alpha_n, P^{(\sigma)}][\beta^{(\sigma)} u] + P^{(\sigma)}[\alpha_n \beta^{(\sigma)} u] \right)$$

を得るが、これを

$$(3.3) \quad P[\alpha_n \beta u] = \sum_{\substack{1 \leq |\rho| + |\sigma| \leq k \\ 1 \leq |\sigma| \leq k}} Q_{\rho\sigma} [\alpha_n^{(\rho)} \beta^{(\sigma)} u] + R_k^{(n)}[u]$$

と整理すると

$$(3.4) \quad \|R_k^{(n)}[u]\| \leq \frac{\text{Const.}}{n^{k-2}} \|u(x, t)\|$$

が成立する。

上記2局所化によって以下では $(x, t; \xi) \in V \times W$ のみで成立する op. p. d. の性質が, $(x, t; \xi) \in \Omega \times S$ (単位球面) で維持されると解してよい。

さて (3.3) に応じて

$$P[\alpha_n(D)u] = f \quad \text{を考えよう。 (5) より}$$

$$(3.5) \quad [\Pi_m - iC_{m-1}][\alpha_n(D)u] + i^{-m}R_{m-2}[\alpha_n(D)u] = i^{-m}f$$

更に系で書けば

$$(3.6) \quad D_t U_n = H(x, t; D)U_n + BU_n + F$$

$$H(x, t; D) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \Lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \Lambda \\ \hline & & & \Lambda \\ & & & \lambda_1 \Lambda & \\ & & & & \ddots \\ & iC_{m-1} \dots iC_{m-s} & 0 \dots 0 & \lambda_{m-s} \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{但し } 1) U_n = {}^t((\Lambda+1)^{m-1}[\alpha_n u], (\Lambda+1)^{m-2}\partial_1[\alpha_n u], \dots, \partial_{m-s-1} \dots \partial_s \dots \partial_1 \partial_s \dots \partial_1 [\alpha_n u])$$

$$2) \lambda_i = \lambda_i(x, t; D)$$

$$\sigma(C_{m-j}(x, t; D)) = C_{m-j}(x, t; \xi/|\xi|)$$

$$3) \quad B = \begin{bmatrix} * 1 & & \\ & \ddots & \\ & & * 1 \\ b_1 \dots b_s b_{s+1} \dots b_m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} *: 0 \text{ 階} \\ b_1, \dots, b_s : (-1) \text{ 階} \\ b_{s+1}, \dots, b_m : 0 \text{ 階} \\ \text{の op. p. d.} \end{array}$$

$$(4) \quad F = {}^t(0, \dots, 0, \lambda^{-m} f)$$

従って (3.6) の特性根 (即ち (3.1) より起る振動根) は

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - H(x, t; \xi)) &= \prod_{\lambda=1}^s (\lambda - \lambda_\lambda)^2 \prod_{j=s+1}^{m-s} (\lambda - \lambda_j) \\ &\quad - \lambda \{ C_{m-1} + C_{m-2}(\lambda - \lambda_1) + \dots + C_{m-s}(\lambda - \lambda_{s-1}) \dots (\lambda - \lambda_1) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} \lambda_j^\pm(x, t; \xi) &= \lambda_j(x, t; \xi) \pm \left[\frac{\lambda L_j(x, t; \xi)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod (\lambda_j - \lambda_i)} \right]^{1/2} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} (3.7) \quad -\operatorname{Im} \lambda_j^+(x, t; \xi) &\geq \delta' |\xi|^{1/2} \quad (\delta' > 0) \\ -\operatorname{Im} \lambda_j^-(x, t; \xi) &\leq -\delta' |\xi|^{1/2} \quad \text{と指定しよう.} \end{aligned}$$

これを用いて $H(x, t; \xi)$ の正規化行列 $N(x, t; \xi)$ を作る:

$$(3.8) \quad N(x, t; \xi) H(x, t; \xi) = D_1(x, t; \xi) N(x, t; \xi)$$

但し

$$D_1(x, t; \xi) = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_s^+ & \\ & & & \lambda_1^- \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_s^- \end{bmatrix}$$

$N(x, t; D)$ を (3.6) に作用させ

$$(3.9) \quad NU_n = {}^t(\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_s^{(n)}, \omega_{s+1}^{(n)}, \dots, \omega_m^{(n)})$$

$$\begin{aligned} (3.10) \quad S(t; NU_n) &= m \sum_{\lambda=1}^s \|e^{-\varepsilon \sqrt{\lambda} t} \omega_\lambda^{(n)}\|^2 \\ &\quad - \sum_{j=s+1}^m \|e^{-\varepsilon \sqrt{\lambda} t} \omega_j^{(n)}\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{但し } \mathcal{F}(e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t}f) = e^{-\varepsilon\sqrt{|\xi|}t} \hat{f}(\xi), \quad \varepsilon < \delta'/3$$

更に

$$(3.11) \quad U_{n,p} = {}^t((\lambda+1)^{m-1}[\alpha_n^{(p)}u], (\lambda+1)^{m-2}\partial_1[\alpha_n^{(p)}u], \dots \\ \dots, \partial_{m-s-1}\dots\partial_s\dots\partial_1\partial_s\dots\partial_1[\alpha_n^{(p)}u])$$

とあくと

命題 3.1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(t; NU_n) &\geq \delta''\sqrt{n} \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} NU_n\|^2 - C_1\sqrt{n} \sum_{1 \leq |p| \leq k} \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} U_{n,p}\|^2 \\ &\quad - \frac{C_2}{\sqrt{n}} \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} f\|^2 - \frac{C_3}{n^2(k-l)} \|u\|^2 \end{aligned}$$

(3.3) にもとづいて

$$(3.12) \quad \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} Q_{p\sigma}[\alpha_n^{(p)}\beta^{(\sigma)}u]\|^2 \\ \leq Cn \sum_{|p+p'|\leq k} n^{|p'|} \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} NU_{n,p+p'}\|^2 + \frac{C'}{n^2(k-l-2)} \|u\|^2$$

$$\text{但し } U_{n,p\sigma} = {}^t((\lambda+1)^{m-1}[\alpha_n^{(p)}\beta^{(\sigma)}u], (\lambda+1)^{m-2}\partial_1[\alpha_n^{(p)}\beta^{(\sigma)}u], \\ \dots, \partial_{m-s-1}\dots\partial_s\dots\partial_1\partial_s\dots\partial_1[\alpha_n^{(p)}\beta^{(\sigma)}u])$$

を証明しなくては

命題 3.2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(t; NU_n) &\geq \delta''\sqrt{n} \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} NU_n\|^2 \\ &\quad - C_1\sqrt{n} \sum_{\substack{1 \leq |p+\sigma| \\ |p| \leq k, |\sigma| \leq m}} n^{|p|+|\sigma|} \|e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda}t} NU_{n,p\sigma}\|^2 - \frac{C_2}{n^2(k-l-2)} \|u\|^2 \end{aligned}$$

(3.3)に於て $\alpha_n \beta u$ の代りに $\alpha_n^{(p)} \beta^{(\sigma)} u$ とした方程式

$$P[\alpha_n^{(p)} \beta^{(\sigma)} u] = \sum_{\substack{1 \leq |p'+\sigma'| \leq k \\ |\sigma'| \leq m}} Q_{p'\sigma'} [\alpha_n^{(p+p')} \beta^{(\sigma+\sigma')} u] + R_{k,p\sigma}^{(n)}[u]$$

に命題 3.2 を用いれば

命題 3.3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(t; \oplus_n(p, \sigma) u) &\geq S'' \sqrt{n} \|\oplus_n(p, \sigma) u\|^2 \\ &- C_1 \sqrt{n} \sum_{p \leq p', \sigma \leq \sigma'} \|\oplus_n(p', \sigma') u\|^2 - \frac{C_2}{n^{k-2l-4}} \|u\|^2 \\ |p+\sigma|+1 &\leq |p'+\sigma'| \leq k \end{aligned}$$

但し

$$\oplus_n(p, \sigma) u = \sqrt{n}^{|p|-|\sigma|} e^{-\varepsilon \sqrt{n} t} N U_{n,p\sigma} \text{ を得る。}$$

$$\text{再び } S_n(t; u(x, t)) = \sum_{0 \leq |p+\sigma| \leq k} M^{|p+\sigma|} S(t; \oplus_n(p, \sigma) u)$$

M : 十分大

とあくと

命題 3.4

$$(3.13) \quad \frac{d}{dt} S_n(t; u(x, t)) \geq S'' \sqrt{n} S_n(t; u(x, t)) - \frac{C}{n^{k-2l-4}} \|u\|^2$$

が成り立つ。

さて (1) が (E) 2" bien posé と仮定しよう:

$$\text{即ち Cauchy 問題 } \begin{cases} Pu_n = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial t})^i u_n(x, 0) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ (\frac{\partial}{\partial t})^{m-1} u_n(x, 0) = e^{in x} \phi(x) \end{cases}$$

但し $\hat{\psi}(\xi)$: 連続 ($\neq 0$), $\text{supp.}[\hat{\psi}(\xi)] \subset \xi_0$ の近傍

且 $\text{supp.}[\hat{\psi}]$ 上 $\hat{\alpha}(\xi) \equiv 1$ とし $\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(\xi)]$

に対し

$$(*) \quad \|u_n(x, t)\| \leq C \|u_n(x, 0)\|_p \leq C' n^p$$

なる定数 C, p が存在したとす

(3.13) に於て $u(x, t) = u_n(x, t)$ とおき $k = 2l + 5 + 2p$

ととれば

$$\frac{d}{dt} S_n(t; u_n(x, t)) \geq \delta''' \sqrt{n} S_n(t; u_n(x, t)) - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立ち、勿論 $S_n(0; u_n(x, 0)) \geq C > 0$ ($n > N$) だから

$$(**) \quad S_n(t; u_n(x, t)) \geq \frac{C}{2} \exp(\delta''' \sqrt{n} t)$$

以下 (*) (**) は両立し得ないことより定理 2 は従う。

参 考 文 献

- [1] L. Hörmander: Pseudo-differential operators,
Comm. Pure Appl. Math. 1965
- [2] T. Kano: On the Cauchy problem for equations
with multiple characteristics, J. Math. Soc.
Japan (近刊)
- [3] J. J. Kohn and L. Nirenberg: An algebra of
pseudo-differential operators, Comm. Pure
Appl. Math. 1965

- [4] A. Lax : On Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with multiple characteristics, *Comm. Pure. Appl. Math.* 1956
- [5] J. Leray et Y. Ohya : Equations et systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts, *Math. Ann.* 1967
- [6] E. E. Levi : Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, *Ann. Math.* 1909
- [7] M. Matsumura : Existence locale de solutions pour quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles, *Jap. J. Math.* 1962
- [8] S. Mizohata : Lectures on the Cauchy problem, *Institut de Tata*, 1962
- [9] S. Mizohata : Some remarks on the Cauchy problem, *J. Math. Kyoto, Japan*, 1961
- [10] S. Mizohata et Y. Ohya : Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, *Pbl. R. I. M. S.* (II 71)
- [11] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple, *J. Math. Soc. Japan*, 1964

- [12] M. Yamaguti : Le problème de Cauchy et les
opérateurs d'intégrale singulière, Mem.
Coll. Sc. Kyoto, Japan, 1959