

グラフ $G(X, P)$ の概念と連結行列 A

慶応義塾大学 竹中淑子

有向グラフ $G(X, P)$ のいろいろの定義を $G(X, P)$ に対応する連結行列 A を用いて系統的に表現すること、この表現を用いて *Hamiltonian circuit* の存在に関する定理を求めること、この一つの応用として チェスのナイトの旅に関する *Euler* 問題の解の存在を示めることが目的である。なおこれらは 参考文献 [2], [3] によるものである。

§1. 連結行列 A を用いての表現

有向グラフ $G(X, P)$, $|X| = n$ において 連結行列 $A = (a_{ij})$ は

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : (x_i, x_j) \in U \\ 0 & : (x_i, x_j) \notin U \end{cases} \quad \dots (1)$$

で与えられる。ここに U は $G(X, P)$ の arc の全体である。

A の行ベクトルを $a_1, a_2, \dots, a_n$, 列ベクトルを $a^1, a^2, \dots, a^n$ で表わす。演算はすべて Boolean addition $+$ と Boolean multiplication $\times$ にておこなうこととし この A に対し $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$ を定義する。 I, E はそれぞれすべての元が 1 の n 次ベクトル, $n \times n$ 行列とし

$$A^0 = \sum_{i=1}^n A^{(i)}, \quad |A| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad |a_i| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \dots (2)$$

とおく。 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の置換を σ で表わし そのときの行列を $A(\sigma)$ とする。 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に対し $J_X = \{1, 2, \dots, n\}$ と表わす。

(i) 型, arc, path, 基本的数に関するもの。

	graph (X, P) , $ X = n$	incidence matrix A
1	simple	$\exists \sigma; A(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	complete	$A + A^T = E$
3	connected	$\sum_{i=1}^n A^{(i)} = E$
4	transitive	$\exists k > 0; a_{ij}^{(k)} = 1 \Rightarrow a_{ij} = 1$
5	$\begin{cases} \exists \text{ arc } (x_i, x_j) \\ \text{otherwise} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \exists \text{ path } (x_i, \dots, x_j) \text{ of length } k \\ \text{otherwise} \end{cases}$	$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \exists \text{ Circuit } (x_i, \dots, x_i) \text{ of length } k \\ \text{otherwise} \end{cases}$	$a_{ii}^{(k)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

8	$\exists$ perfect matching	$\exists$ partial graph $(X, \pi'), B;$ $ B = n$ $ b_i = b^* = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2)$
9	$\exists$ Hamiltonian path	$\exists \sigma; a_{i, i+1}(\sigma) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$
10	$\exists$ Hamiltonian circuit	$\exists \sigma; a_{i, i+1}(\sigma) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), a_{n1}(\sigma) = 1$
11	$\exists$ arborescence with root x_i	$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(4)} = I$
12	connected component p	$\exists \sigma; A(\sigma) = \left[\begin{array}{c} E \\ \vdots \\ E \end{array} \right] \Bigg\} p$
13	cyclomatic number $\nu(G)$	$\nu(G) = A - n + p$
14	chromatic number p	$\exists C^*(\sigma); \sigma_{i,i}^*(\sigma) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

(表 1)

(ii) X の部分集合 S に関するもの.

	set $S \subset X$	incidence matrix A
15	internally stable	$A Y_1 = Y_4$
16	externally stable	$A Y_3 = Y_5$
17	kernel	$A Y_1 = Y_2$
18	base	$A^0 Y_1 = Y_2$
19	support	$A Y_2 = Y_1$

(表 2)

ここに $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$ は n 次元ベクトルで 次の条件をみたすものとする。* は 1 または 0 で任意。

	at J_S	at $J_S^c (= J_{X-S})$
Y_1	1	0
Y_2	0	1
Y_3	1	*
Y_4	0	*
Y_5	*	1

(表 3)

§ 2. Hamiltonian circuit の存在について.

[Lemma 1] ある整数 p と k ($1 < k+p \leq n$) があって $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$, ..., $A^{(k+p-1)}$ は

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = I \quad \dots (3)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} A^{(k+i)} = E \quad \dots (4)$$

をみたす p 個のベクトル $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ より成るならば

$$A^{(k+p)} = A^{(k)}$$

$$A^{(k+1+p)} = A^{(k+1)}$$

$$i = 1, 2, \dots \quad \dots (5)$$

.....

$$A^{(k+p-1+p)} = A^{(k+p-1)}$$

である。すなわち

$$\sum_{n=0}^{p-1} A^{(k+p+n)} = E \quad i = 1, 2, \dots \quad \dots (6)$$

である。

[Theorem 1] グラフ $G(X, P)$, $|X|=n$ が 次の条件(i) (ii) をみたすならば Hamiltonian circuit をもつ。

(i) $\forall S \subset X$ に対し

$$|PS| \geq |S|. \quad \dots (7)$$

(ii) ある整数 p と k ($1 < p+k \leq n$) があって $A^{(k)}, A^{(k+1)}, \dots, A^{(k+p-1)}$ は

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = I \quad \dots (8)$$

$$|a_i| = \frac{n}{p} \quad (i=0, 1, \dots, p-1) \quad \dots (9)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} A^{(k+i)} = E \quad \dots (10)$$

をみたすベクトル $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ より成る。ただし

p は n の約数とする。

[Theorem 2] グラフ $G(X, P)$, $|X|=2n$ が Hamiltonian circuit をもつための必要十分条件は 次の (i) ~ (iii) をみたすことである。

(i) $\exists Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ ($2n$ 次元ベクトル) ;

$$AZ_1 = Z_2 \quad \dots (11)$$

$$AZ_3 = Z_4 \quad \dots (12)$$

$$|Z_1| = n \quad \dots (13)$$

$$Z_1 + Z_2 = I \quad \dots (14)$$

$$Z_1 + Z_3 = I \quad \dots (15)$$

$$Z_3 + Z_4 = I \quad \dots (16)$$

$$Z_1' \cdot Z_3 = 0 \quad (2+3-1) \quad \dots (17)$$

(ii) $\forall S \subset X$ に対し

$$|S \cap X_1| \leq |\pi S \cap X_2| \quad \dots (18)$$

$$|S \cap X_2| \leq |\pi S \cap X_1| \quad \dots (19)$$

ただし X_1 は Z_1 の 0 に対応する X の点, X_2 は Z_1 で 1 に対応する X の点.

(iii) (i) (ii) より 存在の保障される 2 組の matching を

$$(x_1, x_{i1}), (x_2, x_{i2}), \dots, (x_n, x_{in}) \quad \dots (20)$$

$$(x_{i1}, x_{j1}), (x_{i2}, x_{j2}), \dots, (x_{in}, x_{jn}) \quad \dots (21)$$

とすると $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ は $(1, 2, \dots, n)$ の巡回置換となる。

§3. チェスのナイトの旅に関する Euler 問題の解の存在の証明。

Euler 問題というのは チェス盤上のナイトを 1 つのます目と 1 回そして唯一回通るように動かすことができるか いるかないかということである。この問題に対し 実際には解をみつける手順はいくつかみつけられて いるが、それらの理論的根拠がなかった。(cf. [1]) ここでは すでに述べた[定理 1], [定理 2] を使って、Euler 問題が解をもつことを証明する。

$$a_1 = I - a_0 \quad \dots (24)$$

である。すなわち

$$A^{(5)} + A^{(6)} = E \quad \dots (25)$$

で $A^{(5)}$ において a_0 より成る行ベクトルの番号は

$$2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 34, 36, 38, 40, \dots (26)$$

$$41, 43, 45, 47, 50, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 63$$

a_1 より成る行ベクトルの番号は

$$1, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 33, \dots (27)$$

$$35, 37, 39, 42, 44, 46, 48, 49, 51, 53, 55, 58, 60, 62, 64$$

また (26) と (27) との間には 次のような matching がある。

$$(1, 11) \quad (2, 19) \quad (3, 9) \quad (4, 14) \quad (5, 15) \quad (6, 12) \quad (7, 13)$$

$$(8, 23) \quad (9, 26) \quad (10, 4) \quad (11, 17) \quad (12, 2) \quad (13, 3) \quad (14, 8)$$

$$(15, 32) \quad (16, 6) \quad (17, 27) \quad (18, 1) \quad (19, 25) \quad (20, 5) \quad (21, 31)$$

$$(22, 28) \quad (23, 29) \quad (24, 7) \quad (25, 10) \quad (26, 20) \quad (27, 21) \quad (28, 18) \dots (28)$$

$$(29, 35) \quad (30, 21) \quad (31, 16) \quad (32, 22) \quad (33, 43) \quad (34, 49) \quad (35, 41)$$

$$(36, 30) \quad (37, 47) \quad (38, 44) \quad (39, 45) \quad (40, 55) \quad (41, 58) \quad (42, 36)$$

$$(43, 37) \quad (44, 34) \quad (45, 60) \quad (46, 40) \quad (47, 64) \quad (48, 38) \quad (49, 59)$$

$$(50, 33) \quad (51, 42) \quad (52, 52) \quad (53, 53) \quad (60, 50) \quad (61, 51)$$

$$(62, 56) \quad (63, 46) \quad (64, 54)$$

したがって 求める Hamiltonian circuit μ は

$$\mu = [1, 11, 17, 27, 21, 31, 16, 6, 12, 2, 19, 25, 10, 4, \\ 14, 8, 23, 29, 35, 41, 58, 52, 62, 56, 39, 45, 60, \\ 50, 33, 43, 37, 47, 64, 54, 48, 38, 44, 37, 49, 59, \\ 53, 63, 46, 40, 55, 61, 51, 57, 42, 36, 30, 24, 7, \\ 13, 3, 9, 26, 20, 5, 15, 32, 22, 28, 18] \quad \dots(29)$$

(ii) [定理 2] による解の存在の証明

$$Z_1 = Z_4 = a_0 \quad \dots(30)$$

$$Z_2 = Z_3 = a_1$$

となる。(あとは略)

REFERENCES

- [1] C. Berge, (1962), "The Theory of Graphs and its Applications,"
English translation by Alison Doig, Methuen, London, and
Wiley, New York.
- [2] Y. Takenaka, (1968), On the existence of a Hamiltonian
path in a graph, Inform. Contr. 13, No. 6, 555-564
- [3] Y. Takenaka, (1970), Graph theoretic concepts and the
incidence matrix, Inform. Contr. 17, No. 2, 113-121