

## 半正定値計画法に対する主双対内点法の群対称性

京都大学大学院 工学研究科  
 京都大学大学院 工学研究科  
 京都大学 数理解析研究所  
 京都大学大学院 工学研究科

寒野 善博 (Yoshihiro Kanno)  
 大崎 純 (Makoto Ohsaki)  
 室田 一雄 (Kazuo Murota)  
 加藤 直樹 (Naoki Katoh)

**1. 序**

半正定値計画法 (Semidefinite Programming, SDP) は非線形凸計画法に属する数値計画法であり, 多くの応用をもつ [1–4]. また, 主双対内点法 [5–8] と呼ばれる, 問題のサイズの多項式時間で最適解を得る手法が提案されたため, 近年注目を集めている. 主双対内点法の多くは, 中心パスと呼ばれる曲線を数値的に追跡することで最適解を得る手法と捉えることができる. 従って, SDP の中心パスが持つ特別な性質を明らかにすることは重要である [9, 10].

本稿ではまず, 群表現論の枠組に基づいて群対称な SDP という SDP 問題の 1 つのクラスを定義する. そして, その中心パスや, 主双対内点法におけるいくつかの探索方向が群対称性を持つことを明らかにする. このような性質は, 主双対内点法を用いて得られる最適解の群対称性を理論的に保証する.

最適解が群対称性を持つことは, 次のような観点から, 実用上の重要な意味を持つ. 著者らは, 固有振動数の制約条件下におけるトラスの構造最適化問題が SDP に帰着されることを示した [2]. さらに, 主双対内点法を用いて SDP 問題を解くと, トラスの形状が対称性を持つ場合には, 得られる最適解もまた対称であることを数値実験を通じて明らかにした. 一方, 既往の非線形計画法を用いた場合には, 一般に対称な最適解は得られない. 通常のトラス構造物は何らかの対称性を有するように設計されることが多いため, 対称な最適解が得られることは, 主双対内点法の実用上のメリットの 1 つであると言える.

本稿では, SDP 問題の対称性を群表現論の枠組を用いて記述する. これにより, 問題や解の対称性を一般的かつ簡潔に表現することができる. 3 節では, 中心パスが群対称性を持つことを示す. また, 4 節では主双対内点法の探索方向の群対称性について考察する. 主双対内点法は, 中心パスを, 非線形方程式系に対するニュートン法を適用することで数値的に追跡する方法として捉えることができる. その際の探索方向については多くの提案がなされているが, ここでは NT (Nesterov–Todd [8]) 探索方向, HRVW/KSH/M (Helmberg–Rendl–Vanderbei–Wolkowicz/Kojima–Shindoh–Hara [6]/Monteiro) 探索方向, および dual HRVW/KSH/M 探索方向について, その群対称性を示す. 最後に, 中心パスや探索方向の群対称性の応用例として, トラス構造物の最適設計問題を取り上げる. トラスの形状が対称性をもつならば, その固有振動数制約下での最適設計問題は群対称な SDP 問題に帰着できる. 従って, 主双対内点法を用いることで, 群対称な断面積分布を得ることができる. 5 節では, いくつかの数値実験を通じて, 解の対称性を例証する. 最適解が唯一ではない場合や, 既往の手法では対称解に収束しない場合にも, 主双対内点法で得られる解は高い精度の群対称性を持つことを示す.

**2. 半正定値計画法と主双対内点法**

$S^n \subset \mathbf{R}^{n \times n}$  を  $n \times n$  実対称行列の集合とする. 行列  $Q = [Q_{pq}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $V = [V_{pq}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  に対して記号  $Q \bullet V$  を  $Q \bullet V = \text{Tr}[Q^T V] = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n Q_{pq} V_{pq}$  で定義する.  $S_+^n \subset S^n$ ,  $S_{++}^n \subset S_+^n$  をそれぞれ,  $n \times n$  半正定値行列および正定値行列の集合とする.

このとき, SDP の等式標準形と, その双対問題は次のように表される.

$$\left. \begin{array}{ll} \mathcal{P}: \min & C \bullet X \\ \text{s.t.} & A_p \bullet X = b_p, \quad (p = 1, 2, \dots, m), \quad X \in \mathcal{S}_+^n; \\ \mathcal{D}: \max & \sum_{p=1}^m b_p z_p \\ \text{s.t.} & \sum_{p=1}^m A_p z_p + Y = C, \quad Y \in \mathcal{S}_+^n. \end{array} \right\} \quad (1)$$

ただし,  $A_p \in \mathcal{S}^n$  ( $p = 1, 2, \dots, m$ ),  $b = (b_p) \in \mathbf{R}^m$ ,  $C \in \mathcal{S}^n$  である. また, 変数は  $X \in \mathcal{S}^n$ ,  $Y \in \mathcal{S}^n$ ,  $z = (z_p) \in \mathbf{R}^m$  である.

以下では,  $A_p$  ( $p = 1, 2, \dots, m$ ),  $b$ ,  $C$  で定義される SDP (1) を SDP 問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  と表記することにする. また, 次の仮定を設ける.

**仮定 2.1.** 行列  $A_p$  ( $p = 1, 2, \dots, m$ ) は 1 次独立である.

**仮定 2.2.**  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{D}$  は内点許容解を持つ. 即ち,  $X \in \mathcal{S}_{++}^n$  および  $Y \in \mathcal{S}_{++}^n$  を満たす  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{D}$  の実行可能解  $X$  および  $(Y, z)$  が存在する.

**仮定 2.2** が成り立つとき,  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{D}$  は最適解  $\bar{X}$  および  $(\bar{Y}, \bar{z})$  を持つ ([7], Theorem 4.2.1). SDP (1) に対する中心パスは,  $\mu > 0$  をパラメータとした次の問題  $(\text{CP}_\mu)$  の解  $(X, Y, z)$  の集合として定義される.

$$(\text{CP}_\mu): \quad A_p \bullet X = b_p, \quad (p = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

$$\sum_{p=1}^m A_p z_p + Y = C, \quad (3)$$

$$XY = \mu I, \quad (4)$$

$$X, Y \in \mathcal{S}_{++}^n. \quad (5)$$

ただし  $I$  は  $n \times n$  単位行列である. 以下では,  $(X, Y, z)$  が  $(\text{CP}_\mu)$  の解であることを  $(X, Y, z) \in (\text{CP}_\mu)$  と書く. 中心パスの性質に関して, 次の定理が知られている.

**定理 2.3** ([6], Theorem 3.1). 任意の  $\mu > 0$  に対して,  $(X, Y, z) \in (\text{CP}_\mu)$  は一意に存在する.

主双対内点法の多くは,  $(\text{CP}_\mu)$  にニュートン法を適用し, 中心パスを  $\mu \rightarrow 0$  の方向に数値的に追跡することで SDP (1) の最適解を得る手法と捉えることができる. SDP における主双対内点法の探索方向については, 多くの提案がなされている. いま, ある反復で生成された解を  $(X, Y, z) \in \mathcal{S}_{++}^n \times \mathcal{S}_{++}^n \times \mathbf{R}^m$  とすると,  $(X, Y, z)$  における HRVW/KSH/M 探索方向は, 次の方程式系(6)–(8)の解  $(dX, dY, dz) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times \mathbf{R}^m$  として定義される [6].

$$A_p \bullet dX = r_{Xp}, \quad (p = 1, 2, \dots, m), \quad (6)$$

$$\sum_{p=1}^m A_p dz_p + dY = R_Y, \quad (7)$$

$$(dX + dX')Y + XdY = H \text{ for some } dX' \in \hat{\mathcal{S}}^n. \quad (8)$$

ここで,  $\hat{S}^n$  は  $n \times n$  実歪対称行列の集合である. また,  $r_X = (r_{Xp}) \in \mathbf{R}^m$ ,  $R_Y \in \mathcal{S}^n$ ,  $H \in \mathcal{S}^n$  は次式で定義される定ベクトルおよび定行列である.

$$r_{Xp} = b_p - A_p \bullet X, \quad R_Y = C - \sum_{p=1}^m A_p z_p - Y, \quad H = \mu I - XY. \quad (9)$$

方程式系(6)–(8)には解  $(dX, dY, dz)$  が常に存在し, かつ唯一であることが知られている [6].

### 3. 中心パスの群対称性

有限群  $G$  に対して, 正則行列  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  および  $D \in \mathbf{R}^{m \times m}$  を  $G$  の  $n$  次表現および  $m$  次表現とする. SDP 問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  に対する  $g \in G$  の作用を次式で定義する.

$$g : (A_1, \dots, A_m, b, C) \mapsto (\tilde{A}_1(g), \dots, \tilde{A}_m(g), \tilde{b}(g), \tilde{C}(g)),$$

ただし,

$$\tilde{A}_q(g) = \sum_{p=1}^m P(g)^T A_p P(g) D_{pq}(g), \quad (q = 1, 2, \dots, m), \quad (10)$$

$$\tilde{b}_q(g) = \sum_{p=1}^m b_p D_{pq}(g), \quad (q = 1, 2, \dots, m), \quad (11)$$

$$\tilde{C}(g) = P(g)^T C P(g). \quad (12)$$

$A_1, \dots, A_m, b, C$  が

$$(A_1, \dots, A_m, b, C) = (\tilde{A}_1(g), \dots, \tilde{A}_m(g), \tilde{b}(g), \tilde{C}(g)), \quad \forall g \in G \quad (13)$$

を満たすとき, “SDP 問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  は対称性  $G$  を持つ” という. 簡単のために, 以下では  $\tilde{A}_p(g)$ ,  $\tilde{b}(g)$ ,  $\tilde{C}(g)$  を  $\tilde{A}_p$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{C}$  と書くことがある.

次に, SDP の解  $(X, Y, z) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times \mathbf{R}^m$  に対する  $g \in G$  の作用を  $g : (X, Y, z) \mapsto (\tilde{X}(g), \tilde{Y}(g), \tilde{z}(g))$  で定義する. ここで,

$$\tilde{X}(g) = P(g)^{-1} X P(g)^{-T}, \quad (14)$$

$$\tilde{Y}(g) = P(g)^T Y P(g), \quad (15)$$

$$\tilde{z}(g) = D(g)^{-1} z. \quad (16)$$

ただし,  $P(g)^{-T} = (P(g)^{-1})^T$  である.  $(X, Y, z)$  が

$$(X, Y, z) = (\tilde{X}(g), \tilde{Y}(g), \tilde{z}(g)), \quad \forall g \in G \quad (17)$$

を満たすとき, “ $(X, Y, z)$  は対称性  $G$  を持つ” という.

次の定理は, 中心パスの  $G$  対称性を主張する.

**定理 3.1.** *SDP 問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  が  $G$  対称ならば, 任意の  $\mu > 0$  に対して  $(X, Y, z) \in (\text{CP}_\mu)$  は  $G$  対称である.*

*Proof.*  $(X, Y, z) \in (\text{CP}_\mu)$  とする. このとき,

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_p \bullet \tilde{X} &= \left( \sum_{q=1}^m P^T A_q P D_{qp} \right) \bullet (P^{-1} X P^{-T}) \quad (\text{from (10) and (14)}) \\
 &= \sum_{q=1}^m \text{Tr}[(P^T A_q P)(P^{-1} X P^{-T})] D_{qp} \\
 &= \sum_{q=1}^m \text{Tr}[A_q X] D_{qp} \\
 &= \sum_{q=1}^m b_q D_{qp} \quad (\text{from (2)}) \\
 &= \tilde{b}_p. \quad (\text{from (11)})
 \end{aligned} \tag{18}$$

SDP 問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  の  $G$  対称性(13) を用いると, (18) より  $A_p \bullet \tilde{X} = b_p$  が得られる. 即ち,  $\tilde{X}$  は(2) を満たす. 次に, 方程式(3) に対して,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{p=1}^m \tilde{A}_p \tilde{z}_p + \tilde{Y} \\
 &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^m (P^T A_q P D_{qp}) ((D^{-1})_{pr} z_r) + P^T Y P \quad (\text{from (10), (15) and (16)}) \\
 &= \sum_{q=1}^m P^T A_q P z_q + P^T Y P \\
 &= P^T \left( \sum_{q=1}^m A_q z_q + Y \right) P \\
 &= \tilde{C}, \quad (\text{from (3) and (12)})
 \end{aligned} \tag{19}$$

が成り立つ. 従って, 方程式(3) は  $G$  不変である. (13), (19) より,  $\sum_{p=1}^m \tilde{A}_p \tilde{z}_p + \tilde{Y} = C$  を得る. 即ち,  $(\tilde{Y}, \tilde{z})$  は(3) を満たす. 同様に,  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  は(4) の解であることを示すことができる. 即ち,

$$\begin{aligned}
 \tilde{X} \tilde{Y} &= (P^{-1} X P^{-T})(P^T Y P) \quad (\text{from (14) and (15)}) \\
 &= P^{-1}(XY)P \\
 &= P^{-1}(\mu I)P \quad (\text{from (4)}) \\
 &= \mu I.
 \end{aligned}$$

また, (5) より  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in S_{++}^n$  は直ちに得られる.

従って, 方程式系  $(\text{CP}_\mu)$  ((2)–(5)) は  $G$  不変であり,  $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{z})$  は  $(\text{CP}_\mu)$  の解である.  $(\text{CP}_\mu)$  の解の一意性 (定理 2.3) より,  $(X, Y, z)$  は(17) を満たす.  $\square$

#### 4. 探索方向の群対称性

本節では,  $(X, Y, z)$  は  $(X, Y, z) \in S_{++}^n \times S_{++}^n \times \mathbf{R}^m$  を満たす定行列および定ベクトルとする. このとき,  $(X, Y, z)$  における HRVW/KSH/M 探索方向  $(dX, dY, dz) \in S^n \times S^n \times \mathbf{R}^m$  は, 方程式系(6)–(8) の解である.

探索方向  $(dX, dY, dz)$  に対する  $g \in G$  の作用を  $g : (dX, dY, dz) \mapsto (d\tilde{X}(g), d\tilde{Y}(g), d\tilde{z}(g))$  で定義する。ただし  $d\tilde{X}(g), d\tilde{Y}(g), d\tilde{z}(g)$  は  $\tilde{X}(g), \tilde{Y}(g), \tilde{z}(g)$  と同様に(14)–(16)で与えられるものとする。任意の  $g \in G$  に対して  $(dX, dY, dz) = (d\tilde{X}(g), d\tilde{Y}(g), d\tilde{z}(g))$  が成り立つならば, “ $(dX, dY, dz)$  は対称性  $G$  を持つ” という。

$r_X, R_Y, H$  に対する  $g \in G$  の作用は, 定義(9) から導かれる。即ち,  $r_{\tilde{X}}(g), \tilde{R}_Y(g), \tilde{H}(g)$  は(9)において  $A_p, b, C, X, Y, z$  を  $\tilde{A}_p(g), \tilde{b}(g), \tilde{C}(g), \tilde{X}(g), \tilde{Y}(g), \tilde{z}(g)$  で置き換えることによって得られる。このとき,  $(X, Y, z)$  が  $G$  対称ならば  $r_X, R_Y, H$  は  $G$  対称であることを示すことができる。また,  $dX'$  に対する  $g \in G$  の作用を  $g : dX' \mapsto d\tilde{X}'(g) = P(g)^{-1}dX'P(g)^{-T}$  で定義する。

**定理 4.1.**  $SDP$  問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  が  $G$  対称, かつ  $(X, Y, z)$  が  $G$  対称ならば,  $HRVW/KSH/M$  探索方向は  $G$  対称である。

*Proof.* 定理 3.1 と同様に, 方程式系(6)–(8) が  $G$  不変であること, および解の一意性による。□

定理 4.1 と同様にして,  $SDP$  問題  $(A_1, \dots, A_m, b, C)$  が  $G$  対称, かつ  $(X, Y, z)$  が  $G$  対称ならば, dual  $HRVW/KSH/M$  探索方向および  $NT$  探索方向 [8] についても  $G$  対称性を示すことができる。

主双対内点法において, 初期解  $(X^0, Y^0, z^0) \in S_{++}^n \times S_{++}^n \times \mathbf{R}^m$  を  $G$  対称性を持つように与えたとする。このとき, 定理 4.1 より, その後の各ステップでの探索方向の  $G$  対称性が保証される。

## 5. 例題

$G$  対称性を持つ  $SDP$  問題の実例として, トラスの形状が与えられたとき, その部材断面積を最適化する問題を考える。トラスとは, 軸方向の力のみを伝える棒材 (部材) を, ピン節点と呼ばれる接合部でつなぎ合わせることで構成される構造物である。1 次固有振動数が指定値以上であるという制約条件の下では, トラスの最適設計問題は  $SDP$  として定式化できる [2]。

ところで, 実用上はトラス形状は何らかの対称性を持つように与えられることが多い。そのような場合には, 最適化の結果として得られる断面積配置も対称性を持つことが望ましい。トラスの形状や力学的な性質の対称性は, 群表現論を用いて自然な形で表現できる [11, 12]。与えられたトラス形状が  $G$  対称性を持つならば, その形状に対する最適設計問題は  $G$  対称な  $SDP$  問題であることを示すことができる。

### 5.1. 最適設計問題の定式化

トラスの剛性行列を  $K \in S^n$ , 構造質量行列を  $M_S \in S^n$ , 非構造質量行列を  $M_0 \in S^n$  とする。ただし, 以下では  $n$  を節点変位の自由度とする。自由振動の固有値 (固有円振動数の 2 乗) を  $\Omega_r$ , 固有モードを  $\Phi_r \in \mathbf{R}^n$  とおくと,  $\Omega_r$  および  $\Phi_r$  は次の一般固有値問題の解である。

$$K\Phi_r = \Omega_r(M_S + M_0)\Phi_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

部材長および部材断面積を表すベクトルを  $b = (b_p) \in \mathbf{R}^m$ ,  $z = (z_p) \in \mathbf{R}^m$  とする。ただし  $m$  は部材数である。ここで,  $\Omega_r$  は設計変数である  $z$  の関数である。  $\Omega_r$  の最小制限値を  $\bar{\Omega}$  とおくと, 固有 1 次振動数の制約条件下での最適設計問題は次のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{OP:} & \min \quad \sum_{p=1}^m b_p z_p \\ & \text{s.t.} \quad \Omega_r \geq \bar{\Omega}, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \\ & \quad \quad z_p \geq \bar{z}_p, \quad (p = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right\} \quad (21)$$

ただし,  $\bar{z}_p \geq 0$  は  $z_p$  の最小制限値である. 著者らは, 問題 OP が次の SDP 問題  $\mathcal{D}'$  に帰着されることを示した [2].

$$\mathcal{D}' : \left. \begin{array}{ll} \max & -\sum_{p=1}^m b_p z_p \\ \text{s.t.} & -\sum_{p=1}^m (K_p - \bar{\Omega} M_p) z_p + Y = -\bar{\Omega} M_0, \quad Y \in \mathcal{S}_+^n, \\ & z_p \geq \bar{z}_p, \quad (p = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right\} \quad (22)$$

ここで,  $K_p, M_p$  は,

$$K_p = \frac{\partial K}{\partial z_p}, \quad M_p = \frac{\partial M_S}{\partial z_p}, \quad (p = 1, 2, \dots, m) \quad (23)$$

で定義される, トラスの形状に固有の定行列である.

### 5.2. 最適設計問題 $\mathcal{D}'$ の $G$ 対称性

3次元空間における, 1つの軸まわりの回転変換や, 平面に関する鏡映変換などを考える. 対称なトラス形状に対しては, 形状を不変に保ついくつかの変換が存在し, そのような一組の変換がなす群を考えることができる [11]. たとえば, 図1に示すトラス形状は次数6の正2面体群の要素である変換に対して不変である.

以下では, トラスの最適設計問題  $\mathcal{D}'$  において, 行列  $D(g), P(g)$  を具体的に示す. トラス形状が  $G$  対称性を持つとする.  $g \in G$  は部材の置換および節点変位の1次変換を引き起こす. いま,  $\Pi = \{\Pi(p) | p = 1, 2, \dots, m\}$  を  $1, 2, \dots, m$  の順列とし,  $g \in G$  の作用によって部材  $p$  が部材  $q = \pi(p)$  に重なる位置に移されるとする.  $D(g) = [D_{pq}(g)]$  を次のような置換行列とする.

$$D_{pq}(g) = \begin{cases} 1 & (q = \pi(p), \quad p = 1, 2, \dots, m), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (24)$$

このとき, トラスの幾何学的形状は不変に保たれるので, 部材長を表すベクトル  $b$  は次式を満たす.

$$b = D(g)^T b, \quad \forall g \in G. \quad (25)$$

トラスの節点変位ベクトルを  $u \in \mathbf{R}^n$  とおく.  $g \in G$  の作用によって,  $u$  は  $\tilde{u}$  に移されるとすると,

$$\tilde{u} = P(g)^T u$$

と書くことができる. ここで行列  $P(g) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  は,  $g \in G$  によって引き起こされるトラスの回転変換に対応する回転行列と, 節点番号の置換行列とのテンソル積で表されることが分かる. 従って,  $P(g)$  は直交行列である.

次に,  $g \in G$  による変換後のトラスに対する剛性行列および質量行列は,  $\tilde{u}$  を基底として構成される. 従って,  $K$  および  $M_S$  に対する  $g \in G$  の作用を  $g: K \mapsto \tilde{K}$  および  $g: M_S \mapsto \tilde{M}_S$  で定義すると, 次式が得られる.

$$\tilde{K}(g) = P(g)^T K P(g), \quad \tilde{M}_S(g) = P(g)^T M_S P(g). \quad (26)$$

部材  $p$  が部材  $\pi(p)$  に移されていることより, 次式が成り立つ.

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial z_{\pi(p)}} = \frac{\partial K}{\partial z_p}, \quad \frac{\partial \tilde{M}_S}{\partial z_{\pi(p)}} = \frac{\partial M_S}{\partial z_p}, \quad (27)$$

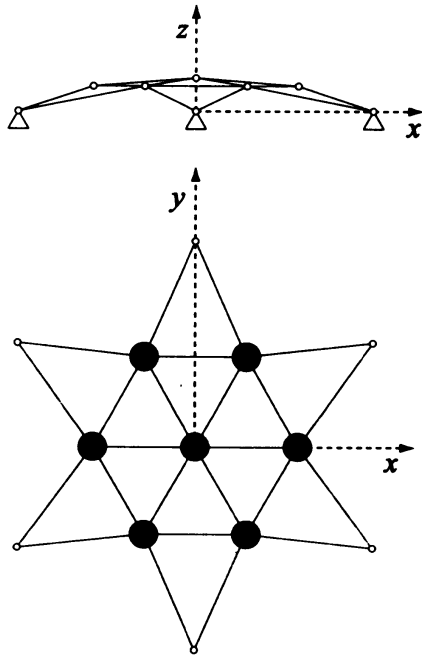


図 1: 24 部材球形シェル状トラス

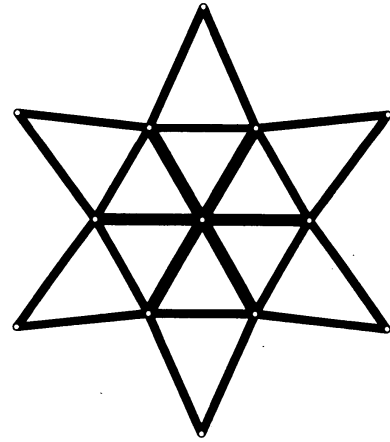


図 2: 24 部材球形シェル状トラスの最適解

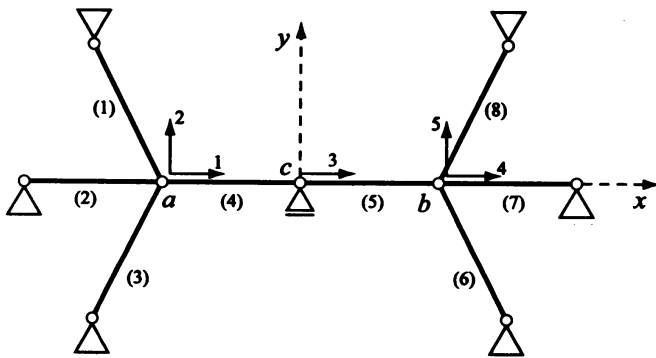


図 3: 5 自由度平面トラス

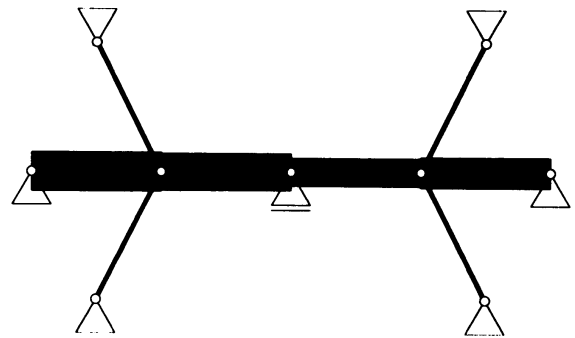


図 4: SQP で得られた非対称な最適解

(23), (24), (26), (27) より,

$$K_q = \sum_{p=1}^m P(g)^T K_p P(g) D_{pq}(g), \quad M_q = \sum_{p=1}^m P(g)^T M_p P(g) D_{pq}(g), \quad \forall g \in G \quad (28)$$

を得る. 非構造質量行列  $M_0$  に対しても, 同様にして次式が得られる.

$$M_0 = P(g)^T M_0 P(g), \quad \forall g \in G. \quad (29)$$

(25), (28), (29) より, 任意の  $g \in G$  に対して,

$$(\tilde{K}_1 - \bar{\Omega} \tilde{M}_1, \dots, \tilde{K}_m - \bar{\Omega} \tilde{M}_m, \tilde{b}, \bar{\Omega} \tilde{M}_0) = (K_1 - \bar{\Omega} M_1, \dots, K_m - \bar{\Omega} M_m, b, \bar{\Omega} M_0)$$

が成り立つ. 即ち(13) が満たされるので, SDP 問題  $\mathcal{D}'$  は  $G$  対称である.

**定理 3.1** より,  $\mathcal{D}'$  の中心パス上の解  $(X, Y, z) \in (\mathbb{CP}_\mu)$  は  $z = D(g)^{-1}z$  を満たす. また, 定理 4.1 より,  $G$  対称な  $(X, Y, z)$  における HRVW/KSH/M 探索方向  $(dX, dY, dz)$  は  $dz = D(g)^T dz$  を満たす.

表 2: 主双対内点法 (HRVW/KSH/M, NT, AHO) および SQP で得られた最適部材断面積 ( $\text{cm}^2$ )

| 部材    | 主双対内点法     |         |         | SQP     |
|-------|------------|---------|---------|---------|
|       | HRVW/KSH/M | NT      | AHO     |         |
| (1)   | 10.0000    | 10.0001 | 10.0000 | 10.0000 |
| (2)   | 108.673    | 108.676 | 108.662 | 122.494 |
| (3)   | 10.0000    | 10.0001 | 10.0000 | 10.0000 |
| (4)   | 102.039    | 102.040 | 102.028 | 115.858 |
| (5)   | 102.045    | 102.043 | 102.056 | 88.2260 |
| (6)   | 10.0000    | 10.0001 | 10.0000 | 10.0000 |
| (7)   | 108.679    | 108.679 | 108.691 | 94.8595 |
| (8)   | 10.0000    | 10.0001 | 10.0000 | 10.0000 |
| 目的関数値 | 46615.9    | 46615.9 | 46615.9 | 46615.9 |

表 1: 5 自由度トラスの節点座標 (cm)

| 節点  | $x$   | $y$   |
|-----|-------|-------|
| $b$ | 100.0 | 0.0   |
| $c$ | 0.0   | 0.0   |
| $d$ | 200.0 | 0.0   |
| $e$ | 150.0 | 100.0 |

す.  $z$  はトラスの部材断面積を並べたベクトルであるので, これらは主双対内点法で得られる最適断面積配置が  $G$  対称であることを理論的に保証している.

### 5.3. $D_6$ 対称なトラス

以下の例題では, 部材は鋼材とし, ヤング率を  $205.8 \text{ GPa}$ , 密度を  $7.86 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$  とする. また,  $\bar{\Omega} = 1000 \text{ rad}^2/\text{s}^2$  とする. SDP を解く際には, 主双対内点法の実装である SDPA [13] を用いる.

24 部材立体トラスの形状を図 1 に示す. 黒丸で示した各節点には  $2.1 \times 10^5 \text{ kg}$  の非構造質量が存在し, 残りの節点は全てピン支持されている. 部材断面積の最小制限値は  $\bar{z} = 0$  とする.  $s$  を  $xz$  平面に関する鏡映変換,  $r(\varphi)$  を  $z$  軸半時計まわりの角度  $\varphi$  の回転変換とする. 6 次の正 2 面体群  $D_6$  は, 次のように定義される.

$$D_6 = \left\{ r\left(\frac{2\pi k}{6}\right), sr\left(\frac{2\pi k}{6}\right) \mid k = 0, \dots, 5 \right\}.$$

図 1 のトラス形状は  $D_6$  の要素である任意の変換に対して対称であることが分かる.

SDPA の HRVW/KSH/M 探索方向を用いて得られた最適断面積を図 2 に示す. ただし, 図中の部材の太さは断面積の大きさに比例する. 得られた断面積分布は, 7 桁の精度で  $D_6$  対称である.

### 5.4. 5 自由度平面トラス

図 3 に示す 5 自由度平面トラスに対して, 主双対内点法と逐次 2 次計画法 (SQP) を用いて最適解を求め, 結果を比較する. 各部材の長さを  $100.0 \text{ cm}$ , 部材断面積の最小制限値を  $\bar{z}_p = 10.0 \text{ cm}^2$  ( $p = 1, 2, \dots, 8$ ) とする. 各節点の座標を表 1 に示す. 節点  $a$  および  $b$  に  $2.1 \times 10^5 \text{ kg}$ , 節点  $c$  に  $2.1 \times 10^6 \text{ kg}$  の非構造質量が存在する. このトラス形状は  $x$  軸および  $y$  軸に関して線対称である. 即ち, 2 次の正 2 面体群  $D_2$  の対称性を持つ.

主双対内点法の HRVW/KSH/M, NT, AHO (Alizadeh-Haeberly-Overton [5]) の 3 つの探索方向および SQP を用いて得られた最適解を表 2 に示す. これらの解は, いずれも制約条件を満たし, 目的関数値が同じであるので最適解である. 主双対内点法で得られた解は, いずれの探索方向でも, 4 桁ないし 5 桁の精度で  $D_2$  対称である. 一方, SQP で得られた解は, 図 4 に示すように非対称である.

## 6. 結論

群表現論に基づいて群対称性を持つ SDP 問題を定義し, 主双対内点法を用いてこれを解いた場合に得られる解の性質について考察した.

中心パスを定める方程式の解の一意性より, SDP 問題が  $G$  対称性を持つならば, その中心パスは  $G$  対称であることを示した. 主双対内点法では, 中心パスを表す非線形方程式にニュートン法を適



用し、得られる線形方程式を繰り返し解くことで最適解を得る。ニュートン法における現在のステップの解が  $G$  対称であるならば、主双対内点法で用いられる HRVW/KSH/M, dual HRVW/KSH/M, NT 探索方向の 3 種類の探索方向が  $G$  対称性を持つことを示した。従って、初期解を  $G$  対称性を持つように選ぶと、その後の各ステップにおける探索方向が  $G$  対称である。即ち、主双対内点法を用いて得られる解が  $G$  対称であることが理論的に保証される。

$G$  対称な解が常に得られることは、主双対内点法の実用上の重要な利点であると考えられる。その例として、トラスの最適設計問題について考察した。与えられたトラスの形状が対称性  $G$  を持つならば、その形状に関する固有振動数制約下での最適設計問題は  $G$  対称な SDP 問題として定式化できることを示した。 $D_6$  対称性を持つ立体トラス、および最適解集合に非対称な解を含むトラスに対して、最適設計解を求めた。逐次 2 次計画法は非対称な解に収束するが、主双対内点法では精度の良い  $G$  対称な最適解が得られることを例証した。

## 参考文献

- [1] L. Vandenberghe and S. Boyd, "Semidefinite programming," *SIAM Review*, vol. 38, pp. 49–95, 1996.
- [2] M. Ohsaki, K. Fujisawa, N. Katoh and Y. Kanno, "Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints," *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 180, pp. 203–217, 1999.
- [3] Y. Kanno and M. Ohsaki, "Necessary and sufficient conditions for global optimality of eigenvalue optimization problems," *Struct. Multidisc. Optim.*, to appear.
- [4] 寒野 善博, 大崎 純, 藤澤 克樹, 加藤直樹, "半正定値計画法を用いた指定座屈荷重係数を有するトラスのトポロジー最適化," 日本建築学会構造系論文集, No. 541, pp. 113–119, 2001.
- [5] F. Alizadeh, J.-P. A. Haeberly and M. L. Overton, "Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: convergence rates, stability and numerical results," *SIAM J. Optim.*, vol. 8, pp. 746–768, 1998.
- [6] M. Kojima, S. Shindoh and S. Hara, "Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problems," *SIAM J. Optim.*, vol. 7, pp. 86–125, 1997.
- [7] Yu. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii, *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [8] Yu. E. Nesterov and M. J. Todd, "Self-scaled barriers and interior-point methods in convex programming," *Math. Oper. Res.*, vol. 22, pp. 1–42, 1997.
- [9] D. Goldfarb and K. Scheinberg, "Interior point trajectories in semidefinite programming," *SIAM J. Optim.*, vol. 8, pp. 871–886, 1998.
- [10] M. Halická, "Analytical properties of the central path at boundary point in linear programming," *Math. Programming*, vol. 84, pp. 335–355, 1999.
- [11] K. Ikeda and K. Murota, *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials — Engineering Use of Group-theoretic Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 2001, to appear.
- [12] K. Murota and K. Ikeda, "Critical imperfection of symmetric structures," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 51, pp. 1222–1254, 1991.
- [13] K. Fujisawa, M. Kojima and K. Nakata, "SDPA (Semidefinite Programming Algorithm) –User's Manual–," *Tech. Report B-308*, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Japan, 1999.