

戸田格子 Hierarchy の初期値問題の表現論的意味

東京大理学部 武部 尚志

(Takashi Takebe)

上野喜三雄、高崎金久は、佐藤の KP Hierarchy の理論と並行する形で、戸田格子 Hierarchy を次の $W = W^{(n)}, W^{(0)}$ に関する線形問題の可積分条件として導入した (Adv. Stud. in Pure Math. 4, 1984, pp 1-95):

$$(TL) \begin{cases} LW^{(n)}(x, y) = W^{(n)}(x, y)\Lambda, & MW^{(0)}(x, y) = W^{(0)}(x, y)\Lambda^{-1} \\ \partial_{x_n} W(x, y) = B_n W(x, y), & \partial_{y_n} W(x, y) = C_n W(x, y) \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad y = (y_1, y_2, \dots), \quad \Lambda = (\delta_{i+1, j})_{i, j \in \mathbb{Z}}$$

ここで、 L, M は、 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 型行列に値をとる (x, y) の関数で、

$$L = (b_{ij})_{i, j \in \mathbb{Z}}, \quad M = (c_{ij})_{i, j \in \mathbb{Z}}$$

とした時、 $b_{ij} = 0$ ($i+1 < j$), $= 1$ ($i+1 = j$); $c_{ij} = 0$ ($i-1 > j$), $\neq 0$ ($i-1 = j$) を満たす。つまり下のような形をしている。

$$L = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \ddots \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

また、 $B_n = (L^n)_+$, $C_n = (M^n)_-$ 、但し $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ に対して $A_{\pm}$ は

$$A_{\pm} \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \begin{cases} 0 & i > j(A_+); i \leq j(A_-) \\ a_{ij} & i \leq j(A_+); i > j(A_-) \end{cases}$$

で定義される。

L, M が 戸田格子 Hierarchy の解ならば、(i.e., (TL) が可積分ならば、) (TL) には次の形の解が存在する。(波動行列と呼ぶ、)

$$(WM) \quad \begin{aligned} W^{(\infty)} &= \hat{W}^{(\infty)}(x, y) \exp \xi(x, \Lambda), \\ W^{(0)} &= \hat{W}^{(0)}(x, y) \exp \xi(y, \Lambda^{-1}). \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{W}^{(\infty)}$ は可逆下三角行列で対角成分 = 1, $\hat{W}^{(0)}$ は可逆上三角行列である。また、 $\xi(x, \Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda^n$, $\xi(y, \Lambda^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Lambda^{-n}$,
そしてこれらは、次の双線形関係式を満たすことが分かる。

$$(BL) \quad W^{(\infty)}(x, y) W^{(0)}(x', y')^{-1} = W^{(0)}(x, y) W^{(\infty)}(x', y')^{-1}$$

(for all x, y, x', y')

逆に (WM) で指定される形をした $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ が (BL) を満たすならば、

$$L = W^{(\infty)} \Lambda W^{(\infty)-1}, \quad M = W^{(0)} \Lambda^{-1} W^{(0)-1}$$

とおくことにより 戸田格子 Hierarchy の解が得られる。つまり 戸田格子 Hierarchy の波動行列はすべて (BL) で特徴づけられて、したがって解を調べることは、(BL) を満たす波動行列を調べることに帰着される。

次に、

$$\hat{W}^{(\infty)}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{diag}_s[\hat{w}_j^{(\infty)}(s; x, y)] \Lambda^{-j}, \quad (\text{diag}_s[a_s] = \begin{pmatrix} \cdots & a_s & 0 \\ 0 & a_s & \cdots \end{pmatrix})$$

$$\hat{W}^{(0)}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{diag}_s[\hat{w}_j^{(0)}(s; x, y)] \Lambda^j,$$

であるとして、

$$\hat{w}^{(\infty)}(s; x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{w}_j^{(\infty)}(s; x, y) \lambda^{-j},$$

$$\hat{w}^{(0)}(s; x, y; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{w}_j^{(0)}(s; x, y) \lambda^j,$$

とおく。すると τ 関数 と呼ばれる $\tau(s; x, y)$ が存在して、

$$\hat{w}^{(\infty)}(s; x, y; \lambda) = \frac{\tau(s; x - \varepsilon(\lambda), y)}{\tau(s; x, y)}, \quad \varepsilon(\lambda) = (\lambda, \frac{\lambda^2}{2}, \frac{\lambda^3}{3}, \dots)$$

$$\hat{w}^{(0)}(s; x, y; \lambda) = \frac{\tau(s; x, y - \varepsilon(\lambda))}{\tau(s; x, y)},$$

と表わされる。 $\hat{W}^{(\infty)-1}$, $\hat{W}^{(0)-1}$ も同じ $\tau(s; x, y)$ によ、 τ 同様に表わすことができる。 (BL) も τ だけを使って書き直すこともできる。

結局、戸田格子 Hierarchy の解が τ 関数で表示される。ということになった。この τ 関数をパラメトライズすることが問題となるが、これについて [Take] で次の結果が得られた。

定理 擬正則な $\hat{w}^{(\infty)}$, $\hat{w}^{(0)}$ およびそれに対応する τ 関数は次のように表わされる:

$$\hat{w}^{(\infty)}(s; x, y; \lambda) e^{\xi(x, \lambda)} = \frac{\langle s+1 | e^{J_1^{(\infty)}} \psi(\lambda) (g \cdot \sigma e^u g_+) e^{-J_1^{(0)}} | s \rangle}{\langle s | e^{J_1^{(0)}} (g \cdot \sigma e^u g_+) e^{-J_1^{(\infty)}} | s \rangle}$$

$$\hat{w}^{(0)}(s; x, y; \lambda) e^{j(x, \lambda)} = \frac{\langle s-1 | e^{j(x, \lambda)} g_- \sigma e^+ g_+ \psi(\lambda) e^{-j(y, \lambda)} | s \rangle}{\langle s | e^{j(x, \lambda)} g_- \sigma e^+ g_+ e^{-j(y, \lambda)} | s \rangle}$$

$$\tau(s; x, y; \lambda) = \langle s | e^{j(x, \lambda)} g_- \sigma e^+ g_+ e^{-j(y, \lambda)} | s \rangle$$

$|s\rangle$ (resp. $\langle s|$) は, affine Lie環 A_∞ の level 1 highest weight 表現 (resp. lowest weight 表現) $L(\lambda_s)$ (resp. $L(\lambda_s)^\vee$) の highest (resp. lowest) vector, $\psi(\lambda)$ は Fock 空間 $\mathcal{F}(\cap L(\lambda_s))$ に作用する fermion operator $\psi(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \lambda^j$

$$J_+(x) = \sum_{n \geq 0} J_n x_n, \quad J_-(y) = \sum_{n \leq 0} J_n y_n,$$

$$J_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} : \psi_j^* \psi_{j+n} : \quad n \in \mathbb{Z},$$

(: : は normal ordering)

さらに, $A_\infty = n_- \oplus \mathfrak{g} \oplus n_+$ と三角形分割した時,

$$g_\pm \in \exp n_\pm, \quad u \in \mathfrak{g},$$

σ は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ の置換で, ある条件 ("荷電保存") を満たす,

逆に任意の $g_\pm, u, \sigma$ から上のようにして戸田格子 Hierarchy の解が得られる。

「擬正則」, 「荷電保存」等の定義を含め, 詳細は次を参照されたい。

[Take] ^[Takebe] Representation theoretical meaning of the initial value problem for the Toda lattice Hierarchy I to appear in Lett. Math. Phys. ; II to appear in Publ. RIMS.

これは, 次の論文を背景としている。

[Taka] K. Takasaki : Adv. Stud. in Pure Math. 4 (1984) pp. 139-163