

The Gauss map and the dual variety of real analytic submanifolds in a sphere or in hyperbolic space

東京都立大学理学部 ト部東介 (Tohsuke Urabe)

接空間の挙動の研究は幾何学における根本問題である。

この解説記事では N 次元球面または N 次元双曲空間内の実解析的多様体を考える。符号 $\varepsilon = \pm 1$ によってこのふたつの場合を区別する。 N 次元球面を考えるとときはいつも $\varepsilon = +1$ であり、 N 次元双曲空間を考えるとときはいつも $\varepsilon = -1$ であると約束する。 $N+1$ 次元実ベクトル空間 L と L 上の内積 $(\cdot, \cdot)$ を固定して考える。適当な L の基底 $b_0, b_1, \dots, b_N$ で $(b_0, b_0) = \varepsilon$ 、 $(b_i, b_i) = 1$ ($1 \leq i \leq N$)、 $(b_i, b_j) = 0$ ($i \neq j$) を満たすものが存在すると仮定する。

N 次元球面 $\varepsilon = +1$ の場合には

$$V = \{a \in L \mid (a, a) = 1\}$$

N 次元双曲空間 $\varepsilon = -1$ の場合には

$$V = \text{ふたつある } \{a \in L \mid (a, a) = -1\} \text{ の連結成分のひとつ}$$

と置く。 V は標準的な N 次元球面あるいは N 次元双曲空間である。

n 次元可微分多様体 M からの挿入写像 (immersion) $\sigma: M \rightarrow V$ を考える。点 $p \in M$ について

$$\hat{T}_p(M) = \sigma_* T_p(M) + \mathbb{R}\sigma(p)$$

と書く。これは埋め込まれた接空間 $\sigma_* T_p(M) \subset L$ と点 $\sigma(p)$ で張られる $n+1$ 次元ベクトル空間である。(ここで $T_{\sigma(p)}(L)$ と L とを同一視した。) L 内の $n+1$ 次元部分ベクトル空間全体をパラメトライズするグラスマン多様体を $G(n+1, L)$ と書く。 σ に対応して (一般化された) ガウス写像 $g: M \rightarrow G(n+1, L)$ が $g(p) = \hat{T}_p(M)$ と置くことにより定義される。

適当な稠密な開集合 $U \subset M$ について σ の U への制限 $\sigma|_U$ が単射であるとき $\sigma: M \rightarrow V$ はほとんど単射的であると言う。ほとんど単射的な挿入写像 $\sigma: M \rightarrow V$ の像 $\sigma(M)$ は一般の点では滑らかであるが、その点の近傍では滑らかな分岐の複数の合併集合になっているような特異点を持つ可能性があることに注意しておこう。また $\varepsilon = +1$ の場合には $\tau: V \rightarrow V$ により反極写像 $\tau(a) = -a$ を表わす。この場合には

定義により任意の挿入写像 $\sigma: M \rightarrow V$ について σ と $\tau\sigma$ は同一のガウス写像を持つ。

定理 1. M と M' を n 次元の滑らかな連結コンパクト実解析多様体、 $\sigma: M \rightarrow V$ と $\sigma': M' \rightarrow V$ をほとんど単射的な実解析的挿入写像とする。 σ に対応するガウス写像の像と σ' に対応するガウス写像の像とは集合として一致すると仮定する。このとき次の (1)、(2) のいずれかを満たす実解析的同型写像 $\rho: M \rightarrow M'$ が存在する。

(1) $\sigma = \sigma'\rho$. (2) V は球面であり $\sigma = \tau\sigma'\rho$.

球面、双曲空間の部分多様体のガウス写像はかなり研究されている (Obata [1], Sakaki [2], [3]) が、上の基本的な結果は微分幾何学者には知られていないように思える。

一方、代数幾何には双対多様体の理論がある。双対多様体の理論によれば複素射影空間 $\mathbb{CP}^N = \mathbb{CP}(L \otimes \mathbb{C}) = (L \otimes \mathbb{C} - \{0\})/(\mathbb{C} - \{0\})$ 内の代数多様体 X については類似の結果が成立することが容易に判る。ここで $\mathbb{CP}^N$ 上の有限個の斉次多項式の共通零点集合のことを代数的集合と呼び、そのうち既約性条件を満たすものをとくに代数多様体と呼ぶことを思い出しておく。 X の非特異点の集合を $X_{\text{smooth}} \subset X$ と書く。 X_{smooth} は X で稠密である。点 $p \in X_{\text{smooth}}$ に対して $\tilde{T}_p(X)$ で p における X の埋め込まれた射影的接空間をあらわす。 $\tilde{T}_p(X)$ は X と同じ次元を持つ $\mathbb{CP}^N$ の線型部分空間である。特に $\tilde{T}_p(X) \cong \mathbb{CP}^{\dim X}$ 。また p は代数的集合 $X \cap \tilde{T}_p(X)$ の特異点である。複素射影的超平面 $\tilde{H} \subset \mathbb{CP}^N$ を考えよう。 $\tilde{H}$ は双対射影空間 $\mathbb{CP}^{N^*} = (\text{Hom}(L, \mathbb{C}) - \{0\})/(\mathbb{C} - \{0\})$ の点であるとみなせる。 X^* により $\tilde{T}_p(X) \subset \tilde{H}$ となる点 $p \in X_{\text{smooth}}$ が存在するような超平面 $\tilde{H}$ 全体の集合の $\mathbb{CP}^{N^*}$ における閉包を表わす。 $X^* \subset \mathbb{CP}^{N^*}$ は代数多様体であり X の双対多様体と呼ばれる。

代数幾何において次の著しい定理が知られている。

$$(X^*)^* = X$$

一方 $\tilde{T}_p(X)$ は $L \otimes \mathbb{C}$ の $n+1$ 次元複素線型部分空間をパラメトライズするグラスマン多様体 $CG(n+1, L \otimes \mathbb{C})$ の点とみなすことができ、 $p \in X_{\text{smooth}}$ に $\tilde{T}_p(X)$ を対応させることにより射影代数多様体のガウス写像 $X_{\text{smooth}} \rightarrow CG(n+1, L \otimes \mathbb{C})$ が定義できる。定義により双対多様体 X^* は写像 $X_{\text{smooth}} \rightarrow CG(n+1, L \otimes \mathbb{C})$ の像により特徴づけられることが判る。

そこで、上の古典的定理と併せ考えれば、定理 1 は条件「実解析的」を「実代数的」で置き換えれば成立することが判る。ここで挿入写像 $\sigma: M \rightarrow V$ が実代数的であるとは、合成写像 $M \rightarrow V \subset L - \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}(L)$ の像が、実数を係数に持つ斉次多項式で定義された適当な代数多様体 $X \subset \mathbb{CP}(L \otimes \mathbb{C})$ を取るとき、共通部分 $X \cap \mathbb{RP}(L)$

に一致することをいう。 L に対応する実射影空間 $\mathbb{RP}(L) = (L - \{0\})/(\mathbb{R} - \{0\})$ は自然に $\mathbb{CP}(L \otimes \mathbb{C})$ の部分集合とみなせることを使った。

しかし、少数の例外を除いて与えられた挿入写像が実代数的かどうかを判定するのは非常に困難と思われ、条件「実代数的」を緩める一般化が望まれる。

実解析的な場合に双対多様体 $M^\vee$ を類似の方法で定義することは容易であるが、ここで困ることに $M^\vee$ は一般にもはや実解析的集合ではない。従って2回目の双対多様体 $(M^\vee)^\vee$ が定義できるかどうか判らなくなってしまう。この点が定理1の証明における最大の困難である。

定理1の設定に戻り実解析的挿入写像 $\sigma: M \rightarrow V$ を考える。空間 $V^\vee = \{a \in L \mid (a, a) = 1\}$ を考える。球面の場合には $V = V^\vee$ であり、双曲空間の場合には $V \cap V^\vee = \emptyset$ である。 a と $\hat{T}_p(M)$ が直交するような点 $p \in M$ が存在するような $V^\vee$ の点 a 全体の集合を $M^\vee$ で表わし、これを M あるいは挿入写像 $\sigma: M \rightarrow V$ の双対多様体と呼ぶ。

定理2. $M, M', \sigma: M \rightarrow V, \sigma': M' \rightarrow V$ は定理1と同じ。集合として $M^\vee = M'^\vee$ であると仮定する。このとき定理1と同じ結論が成立する。

定理1は定理2より従う。定理2の証明で本質的な部分は古典的なSardの定理を一般化して適用することである。一般化Sardの定理の証明にはしばしばStratification Theoryと呼ばれるWhitneyおよびThomのアイデアを用いる。

双対多様体 $M^\vee$ は興味深い性質を幾つか持っている。その中でも第2基本形式の双対性は特筆に値する。

適当な稠密な開集合 $W \subset M^\vee$ を取るとき、 W は実解析的多様体であり、すべての点 $a \in W$ について次の性質(1)、(2)をもつ点 $p \in M$ が存在する。

- (1) a は V の部分多様体としての M の点 p における法方向である。
- (2) $\sigma(p)$ は $V^\vee$ の部分多様体としての $M^\vee$ の点 a における法方向である。

以下このような対 (a, p) を固定する。

点 p における法方向 a の M の第2基本形式を $\bar{H}: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 、点 a における法方向 $\sigma(p)$ の $M^\vee$ の第2基本形式を $\bar{H}^\vee: T_a(M^\vee) \times T_a(M^\vee) \rightarrow \mathbb{R}$ とする。このふたつの双一次形式の根基をそれぞれ $\text{rad } \bar{H} = \left\{ X \in T_p(M) \mid \forall Y \in T_p(M), \bar{H}(X, Y) = 0 \right\}$ 、
 $\text{rad } \bar{H}^\vee = \left\{ X \in T_a(M^\vee) \mid \forall Y \in T_a(M^\vee), \bar{H}^\vee(X, Y) = 0 \right\}$ と書く。 $\sigma_* T_p(M)$ と $T_p(M)$ を同一視する。したがって $T_p(M)$ 、 $T_a(M^\vee)$ 、 $\text{rad } \bar{H}$ 、 $\text{rad } \bar{H}^\vee$ は L の部分ベクトル空間である。

定理 3. (1) $T_p(M) = \text{rad } \tilde{H} + (T_p(M) \cap T_a(M^\vee))$ (直交直和)

(2) $T_a(M^\vee) = \text{rad } \tilde{H}^\vee + (T_p(M) \cap T_a(M^\vee))$ (直交直和)

(3) $L = \mathbb{R}\sigma(p) + \text{rad } \tilde{H} + (T_p(M) \cap T_a(M^\vee)) + \text{rad } \tilde{H}^\vee + \mathbb{R}a$ (直交直和)

(4) $Z_{m+1}, Z_{m+2}, \dots, Z_n$ をベクトル空間 $T_p(M) \cap T_a(M^\vee)$ の正規直交基とする。このとき $\tilde{H}(Z_\alpha, Z_\beta)$ ($m+1 \leq \alpha, \beta \leq n$) を成分とする行列 $(\tilde{H}(Z_\alpha, Z_\beta))$ は行列 $(\tilde{H}^\vee(Z_\alpha, Z_\beta))$ の逆行列である。

問題 定理 1、2、3 を C^∞ 級カテゴリーに拡張せよ。

参考文献

- [1] Morio Obata, *The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature*, J. Differential Geometry 2 (1958), 217–223.
- [2] Makoto Sakaki, *Exceptional minimal surfaces whose gauss images have constant curvature*, Tokyo J. Math. 15 (1992), 381–388.
- [3] ———, *Minimal 2-tori in S^4 whose Gauss images have constant curvature*, Arch. Math. 62 (1994), 470–474.
- [4] Tohsuke Urabe, *The Gauss map and the dual variety of real-analytic submanifolds in a sphere or in hyperbolic space*, preprint (1995).

E-mail: urabe@math.metro-u.ac.jp