

有限群の subclass algebra について

阪市大 理 奥山 哲郎

有限群のモジュラー表現の研究は、大きく、指標理論的、加群論的、群環論的考察に分けられる。ここでは、群環論的考察において興味深いと思われる部分群による subclass algebra などについての性質をいくつか調べてみたい。

以下、 p を素数、 k を標数 p の代数的閉体、 G を有限群とする。 kG で群環を表す。 kG は次の様にして、 $kG \times G$ -加群（加群は、右加群をいうものとする）；

$$kG \ni \alpha, G \times G \ni (x, y), \alpha(x, y) = x' \alpha y.$$

§1.

G の部分群 H に対し、 $k(G; H) = C_{kG}(H)$ とおく（ G の H による subclass algebra）。 $k(G; H)$ は、 k 上、 G の H -共役和で張られている。この節では、 $k(G; H)$ の性質を調べてみたい。

(1.1). $k(G;H)$ の元を kG に左からかけることによって kG の $kH \times G$ -準同型がえられるが、これは、同型；

$$k(G;H) \simeq \text{End}_{H \times G}(kG)$$

を与える。また、 $H^A = \{(h, h) ; h \in H\} \subseteq H \times G$ とおくとき

$$L_0(H^A)^{H \times G} \simeq kG \quad (L_0(H^A) \text{ は, trivial } kH^A\text{-加群})$$

(1.2). $\tau : kH \times G \rightarrow kG$, $\tau((h, g)) = h'g$ とする。

(1). τ は、 $H \times G$ -準同型で全型である。

(2). $e \in G$ の block idempotent, D は e の defect group とする。 $D^x \cap H = 1$ for $\forall x \in G$ ならば、 kGe は projective $kH \times G$ -加群で、 τ と、 $kG \rightarrow kGe$ (projection) の合成は、split-epi である。

興味深いのは（取り扱いやすいのは）、 H が p' -部分群、 p -部分群のときであるように思われる。以下、この節では、 H を p' -部分群と仮定して議論していく。

(1.3). $k(G;H)$ は symmetric k -algebra である。

証明は、 kG が symmetric k -algebra であることのおく知られた証明が適用できることより得られる。

環 A に対し、 $J(A)$, $S(A)$ で、それぞれ Jacobson radical, Socle を表すことにする。

kG と $k(G;H)$ について次の関係が成立する。

$$(1.4). \quad J(k(G;H)) = J(kG) \cap k(G;H)$$

$$S(k(G;H)) = S(kG) \cap k(G;H).$$

証明. H が p' -部分群であるから、(1.1) より、 kG は、projective $kH \times G$ -加群である。また、 $J(kG)$ は、 $kH \times G$ -加群としての kG の radical である。このとき、(1.1) の前半の同型を調べると、(1.4) が導かれる。

$S(kG)$ は kG の中心のある元で生成される (中山) ことに注意して次を得る。

$$(1.5). \quad S(k(G;H))kG = S(kG) = kG(S(k(G;H))).$$

H が p' -部分群であることより、Fossum [], あるいは Green [] の議論を適用して、 $kH \times G$ -加群と、 $k(G;H)$ -加群の間についての様な対応が存在する。

(1.6).

(1). $S(k(G;H)) \supseteq L$ を irreducible $k(G;H)$ -加群とすると、 LkG は、irreducible $kH \times G$ -加群となる。

(2). $S(kG) \supseteq M$ を irreducible $kH \times G$ -加群とすると

$M \cap k(G:H)$ は, irreducible $k(G:H)$ -加群, または, O -加群となる。

(3). 上の対応で $\{\text{Irreducible } k(G:H)\text{-加群}\}$ と $\{\text{Irreducible } k H \times G\text{-加群}, M \text{ で } \text{Inv}_{H \times G}(M) \neq 0 \text{ なるもの}\}$ との 1 対 1 の対応ができる。

(1.6) と関連して, 次の問題が, 古くからある Brauer の予想として生じてくる。

(1.7) - 問題 - $D \in \text{Syl}_p(C_G(H)), D \subseteq P \in \text{Syl}_p(G)$ とする。 L を (1.6), (1) の irreducible $k(G:H)$ -加群とすると, $(\dim_K L)_p \mid P:D \mid \geq (\dim_K L kG)_p$ が成立するか？。

(1.8). (1.7) は, Brauer の次の予想と同値な内容である。
 (R, K, k) を p -modular system とする。 φ を irreducible Brauer character, $G \ni x$ を p' -element とするとき,

$$|G:C_G(x)| \varphi(x) / \varphi(1) \in R$$

が成立するか？。

(1.7) と関連して, 次の事柄が成立している。

(1.9) D, P を (1.7) のとおりとする。このとき

$k(G;H) \subseteq kD$ で、 $k(G;H)$ は 右, 左, 自由 kD - AD 群となる。特に、 $\dim_k k(G;H) \equiv 0 \pmod{|D|}$
 したがって $(\dim_k k(G;H))_p |D| \geq (\dim_k kG)_p$.

§ 2.

有限群のモジュラー表現の理論において、 p -部分群の中心化群との関係を調べるのに、Brauer による、Brauer homomorphism は、大事な道具である。最近、Alperin, Broué, Puig などによって、それが拡張された形で議論がなされ、さらに有効な手段として役立っている。 p -部分群の正規化群に関しても、Brauer homomorphism と類似した homomorphism があることも、以下で示す。応用があるわけではないが、単に参考として記すのみにする。

以下、 P を G の p -部分群とし、 $\hat{P} = \sum x_{x \in P} x \in kG$ とおく

$C_{kG}(\hat{P}) \supset A = \{\alpha \in C_{kG}(\hat{P}), \alpha \hat{P} = 0\}$ とし、

$k(G; \hat{P})^\circ = C_{kG}(\hat{P})/A$ とおく。

(2.1). $\sigma: C_{kG}(\hat{P}) \rightarrow kN_G(P)$ を、次の様に定義する。
 $C_{kG}(\hat{P}) \ni \alpha = \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in N_G(P)} a_g g$.

このとき、 σ は、次の k -algebra epi を誘導する。

$$k(G:\hat{P})^\circ \longrightarrow kN_G(P)/J(kP)kN_G(P)$$

$$(2.2). \quad k(G:\hat{P})^\circ \simeq \text{End}_{kG}(\hat{P}kG)$$

$$kN_G(P)/J(kP)kN_G(P) \simeq \text{End}_{kN_G(P)}(\hat{P}kN_G(P))$$

証明. (2.2). $C_{kG}(\hat{P})$ の元を左から $\hat{P}kG$ にかけることによって、 $\hat{P}kG$ の kG -導同型が得られる。そのとき、 A は 0-写像となるものである。また、計算によって、 $k(G:\hat{P})^\circ$ の次元は、 (P, P) -両側分解したときの cosets の個数であることがわかる。このことから、(2.2) の同型が得られる。

(2.1). 直接計算して確かめることもできるが、(2.2) を使って証明することもできる。 $\hat{P}kN_G(P)$ は、trivial source をもつ加群の直和であるから、 $P \leq Q$ なる Q に対し、 kQ -導同型 $f: \hat{P}kA_G(P) \rightarrow \hat{P}kN_G(P)$ について、 $T_Q^{N_G(P)}(f)$ は 0-写像となる。この事実と、 $\hat{P}kG$ と $\hat{P}kN_G(P)$ が Green Correspondant であることから (2.1) が導かれる。

(2.3). Brauer homomorphism ; $k(G:P) \rightarrow kC_G(P)$ は、(2.1) の特別な場合となっている。

証明. (2.1) の G とし $P \times G$, P とし $P^\Delta = \{(x, x); x \in P\}$ をとる。このとき、 $\widehat{P^\Delta} k P \times G \cong L_0(P^\Delta)^{P \times G}$
 $N_{P \times G}(P^\Delta) = P^\Delta \rtimes (1 \times G(P))$ とする。したがって、自然な同型
 $k(G:P) \simeq \text{End}_{k P \times G}(\widehat{P^\Delta} k P \times G)$, $k(G(P)) \simeq \text{End}_{k N_{P \times G}(P^\Delta)}(\widehat{P^\Delta} k N_{P \times G}(P^\Delta))$
 が得られる。(2.1), (2.2) を適用して、証明が
 終わる。

参考文献

- [1]. Alperin, Broué; Local methods in block theory,
Ann. Math. 110 (1979), 143-157
- [2]. Feit; Representations of Finite Groups, Yale Univ.
(1969)
- [3]. Fossum; Endomorphism rings of induced linear
representations, Illinois J. Math. 16 (1972), 143-153.
- [4]. Green; On a theorem of H. Sawada. J. London
Math. Soc. (2) 18 (1978) 247-252