

On some conditions for ordering in learning process of one-dimensional arrayed self-organizing maps

秋田県立大学 システム科学技術学部 星野満博

Mitsuhiro Hoshino

Faculty of Systems Science and Technology,
Akita Prefectural University

1. 1次元配列実数値自己組織化マップ

本報告は Kohonen 型アルゴリズム [6] として知られている自己組織化マップに関する数理モデルとそこで用いられる学習プロセスを扱う。自己組織化マップのアルゴリズムは、クラスタリング他、広範囲に応用されている。

本報告では、1次元配列を有する実数値自己組織化マップを扱い、ノード集合上の写像として定義されるモデル関数の逐次学習に伴う更新過程に注目し、数値例と共にその単調化について論ずる。特に、単調化形成プロセスの一つである最小値ノードの局所的挙動とそれに伴うノード値と入力との関係について考察する。

本報告で扱う1次元配列を有する実数値自己組織化マップモデルはノード、ノード上の値、入力、学習プロセスの4つのオブジェクトによって、以下の様に特徴付けできる。

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset V, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

(i) I をすべてのノードから成る集合とし、距離付けされた有限集合と仮定する。

$$I = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$$

$$d(i, j) = |i - j|$$

とする。

- (ii) 各ノードは、それぞれ1つの値をもつ。ノードの値全体から成る集合を V とし、ここでは、 $V \subset \mathbb{R}$ の場合を扱う。 $m : I \rightarrow V$ をモデル関数と呼ぶ。
- (iii) $X \subset V$ を入力集合とし、 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$ を入力列とする。
- (iv) 与えられた初期モデル関数 m_0 と入力列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ に対して、モデル関数は、与えられた学習率 α_{m_k, x_k} と次の式によって逐次に更新され、関数列 $\{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ が構成される。

$$m_{k+1}(i) = (1 - \alpha_{m_k, x_k})m_k(i) + \alpha_{m_k, x_k}x_k. \quad (1)$$

ここで $0 \leq \alpha_{m_k, x_k} \leq 1$ を満たすものとする。

2. 閉性を有する状態クラスについて

実数値自己組織化マップの学習プロセスにおけるモデル関数列に関して、以下の基本的な性質が成り立つ。

定理 1 1次元入力をもつ実数値自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset V, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

において、次の学習プロセスを仮定する。

学習プロセス L_A (1次元配列, $\mathbb{R}$ -値ノード)

(a) 学習範囲: モデル関数が m_k , 入力 x_k であるとき

$$I(m_k, x_k) = \left\{ i^* \in I \mid |m_k(i^*) - x_k| = \min_{i \in I} |m_k(i) - x_k| \right\},$$

$$N_1(i) = \{j \in I \mid |j - i| \leq 1\} \quad (i \in I)$$

とする。

(b) 学習率: $0 < \alpha < 1$.

(c) 更新後のノード値: 各 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$m_{k+1}(i) = \begin{cases} (1 - \alpha)m_k(i) + \alpha x_k & \left(i \in \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき} \right) \\ m_k(i) & \left(i \notin \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

とする。

このとき、任意の入力 $x \in X$ に対して

- (i) $m_k(i) \leq m_k(i+1), \forall i$ ならば $m_{k+1}(i) \leq m_{k+1}(i+1), \forall i$.
- (ii) $m_k(i) \geq m_k(i+1), \forall i$ ならば $m_{k+1}(i) \geq m_{k+1}(i+1), \forall i$.
- (iii) $m_k(i) < m_k(i+1), \forall i$ ならば $m_{k+1}(i) < m_{k+1}(i+1), \forall i$.
- (iv) $m_k(i) > m_k(i+1), \forall i$ ならば $m_{k+1}(i) > m_{k+1}(i+1), \forall i$.

定理 1 より、モデル関数の更新の前後において単調性が保存されるが、同様にモデル関数が一度その状態になると、その状態が保存される場合、このような状態のクラスを自己組織化マップの学習プロセスにおける閉じた状態クラスと呼ぶことにする。

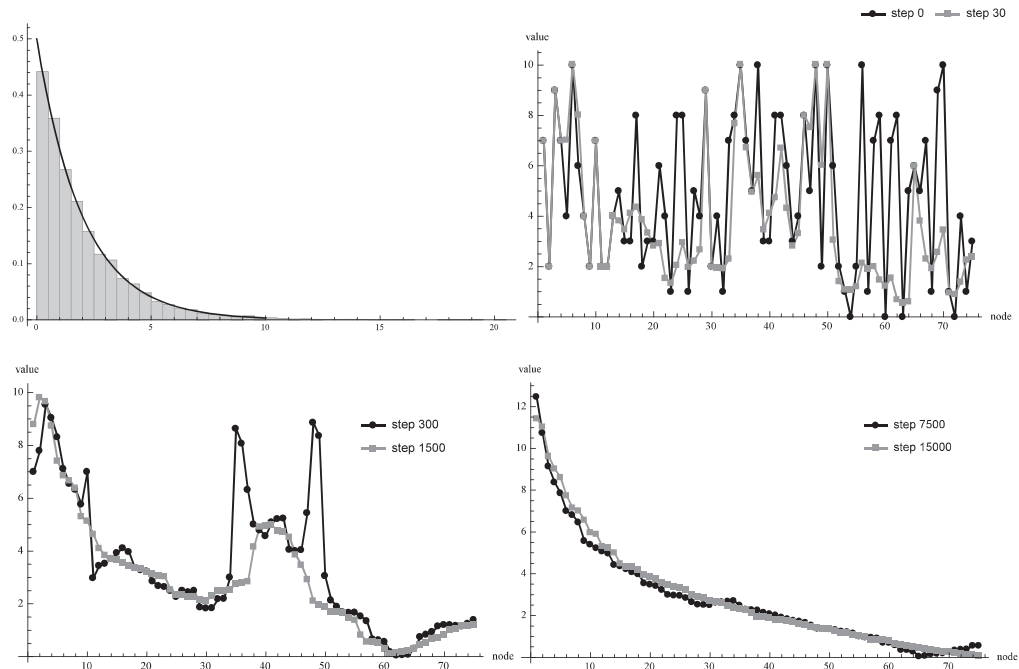


図 1: 入力分布（左上）と更新後のノード値の状態

3. モデル関数の推移と局所的挙動に関する考察

以下に、実数値自己組織化マップ $(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^\infty \subset V, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty)$ において、学習プロセス L_A を仮定した数値例を与える。

例 1 図1は、入力がポワソン分布（左上）に従う、75個のノードをもつモデルにおいて、15000回更新させたときのモデル関数の変化の様子を示したものである。右上，左下，右下は，初期値及び更新回数 30, 300, 1500, 7500, 15000 の場合のノード値の状態であり，また，横軸はノードインデックス，縦軸はノード値を表す。更新が進むに従い，徐々にモデル関数が単調化していることが観測される。また，図2において，上側の軌跡は各回の更新後のモデル関数における最小値をとるノードのインデックスの推移を表し，内側の軌跡は中央値をとるノードのインデックス，下側の軌跡は最大値をとるノードのインデックスの推移を表す。横軸，縦軸はそれぞれ，更新回数，ノードインデックスである。最大値ノードと最小値ノードは徐々に両端側に推移していることが観測される。 □

ここで，モデル関数の単調化への推移過程における一つの局所挙動に関する考察を与える。学習プロセス L_A の下での 1 次元配列をもつ実数値入力型モデル $(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset$

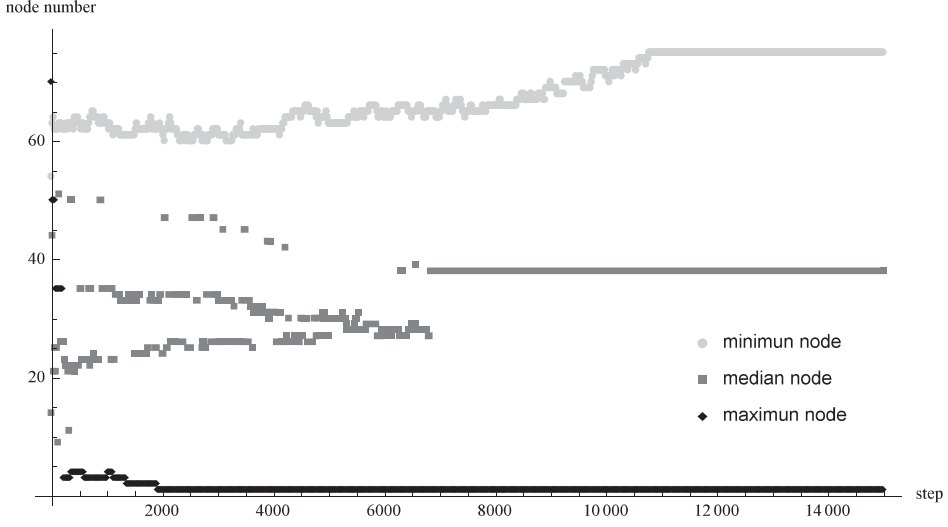


図 2: 最小値ノード，中央値ノード，最大値ノードの推移

$\mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset V, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ において，学習によって最小値ノードが左または右にシフトする為の一つの十分条件を与える．これは，モデル関数が単調化する前の段階における一つの局所的挙動と，その為の更新前モデル関数と入力に対する条件である．

定理 2 1次元入力型自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

において，定理 1 と同じ次の学習プロセス L_A を仮定する．また，ある回数の更新後のモデル関数 m とあるノード q ($3 \leq q \leq N-2$) に対して

$$m(1) > m(2) > \dots > m(q), m(q) < m(q+1) < \dots < m(N) \quad (2)$$

かつ $i \neq j$ に対して

$$m(i) \neq m(j)$$

が成り立つものとする．このとき，入力 x からの学習による m の更新後のモデル関数 m' に対して，以下が成り立つ．

(i) m, x が

$$s_- = \max\{s \geq 0 \mid m(q-s) < m(q+1)\} \geq 1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{m(q-s_-) + m(q+1)}{2}, \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m(q) + \frac{1}{\alpha}m(q-1) \right\} \\ < x < \frac{m(q+1) + \min\{m(q-s_- - 1), m(q+2)\}}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

または, $s_- = 1, m(q-2) > m(q+2)$,

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m(q) + \frac{1}{\alpha}m(q-1) < x = \frac{m(q+1) + m(q+2)}{2} \quad (5)$$

を満たすならば,

$$m'(1) > m'(2) > \cdots > m'(q-1), \quad m'(q-1) < m'(q) < \cdots < m'(N) \quad (6)$$

が成り立つ.

(ii) m と x が

$$s_+ = \max\{s \geq 0 \mid m(q+s) < m(q-1)\} \geq 1, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{m(q+s_+) + m(q-1)}{2}, \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m(q) + \frac{1}{\alpha}m(q+1) \right\} \\ < x < \frac{m(q-1) + \min\{m(q+s_++1), m(q-2)\}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

または $s_+ = 1, m(q-2) < m(q+2)$,

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m(q) + \frac{1}{\alpha}m(q+1) < x = \frac{m(q-1) + m(q-2)}{2} \quad (9)$$

を満たすならば,

$$m'(1) > m'(2) > \cdots > m'(q+1), \quad m'(q+1) < m'(q+2) < \cdots < m'(N) \quad (10)$$

が成り立つ.

不等式 (4) および (8) の中の項において, その値が定義されない場合は, これを取り除いたもので置き換えることとする.

上の結果は, [5] の定理 4.2 と同様に示すことができる.

参考文献

- [1] M. Cottrell and J.-C. Fort, *Étude d'un processus d'auto-organisation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 23(1) (1987), pp. 1–20 (in French).
- [2] E. Erwin, K. Obermayer, and K. Schulten, *Convergence properties of self-organizing maps*, In T. Kohonen, K. Mäkisara, O. Simula, and J. Kangas, editors, Artificial Neural Networks, Amsterdam Netherlands Elsevier (1991), pp. 409–414
- [3] M. Hoshino and Y. Kimura, *Ordered states and probabilistic behavior of self-organizing maps*, proceedings of Asian conferece on nonlinear analysis and optimization 2008, pp. 31–44.

- [4] M. Hoshino, *On state preserving property and nonexpansivity in self-organizing maps*, J. Nonlinear Convex Anal. Vol. 16 Num. 11 (2015), pp. 2255-2261.
- [5] M. Hoshino, *On some conditions for ordering in learning process of basic self-organizing Maps*, proceedings of the 10th international conference on nonlinear analysis and convex analysis, 2019.
- [6] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps, Third Edition*, Springer, 2001.