

複素球面上の内積集合について

愛知教育大 須田庄 (Sho Suda)
Aichi University of Education

1 序

複素球面上の有限点集合 X に対して, それらの相異なる二点間の内積の個数を固定した際に, X の要素数の最大値を決定する問題は基本的な問題である. 本講究録では現れる内積が二個の場合を扱う. 本研究は野崎寛氏との共同研究である. 省略された証明については [3] を参照されたい.

2 複素球面上の有限集合について

複素球面上のコード, デザイン理論の基本的な内容は [6] を参照されたい. $\Omega(d)$ を $\mathbb{C}^d$ の単位球面とし, $\langle, \rangle$ を複素内積とする. $\Omega(d)$ の有限点集合 X の内積集合を $A(X) := \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in X, x \neq y\}$ とする. $s := |A(X)|$ を次数といい, 本講究録では $s = 2$ の場合を扱う. $A(X)$ の要素がすべて実数であれば, X は実単位球面上で実現されるので, $A(X)$ の要素の少なくとも一つは実数でないとする.

複素球面上の次数 2 の有限集合から以下のようにして有向グラフが得られる. X を $\Omega(d)$ の次数 2 の有限集合とし, $A(X) = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$ ($\alpha \notin \mathbb{R}$) をその内積集合とする. 点集合を X , 辺集合を $E = \{(x, y) \in X \times X \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}$ とする有向グラフ (X, E) はトーナメントと呼ばれる. すなわち, 次の性質を満たす: 任意の相異なる頂点 $x, y \in X$ に対し, $(x, y) \in E$ もしくは $(y, x) \in E$ のいずれか一方のみが成り立つ.

逆にトーナメントから複素球面上の次数 2 の有限集合は以下のようにして得られる. $G = (X, E)$ をトーナメントとし, その隣接行列 A を以下のように定める. X で添え字づけられた正方行列で, $x, y \in X$ に対し,

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in E, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とする. G はトーナメントであるので,

$$A + A^T + I = J \tag{2.1}$$

が成り立つ (I は単位行列, J は成分がすべて 1 の正方行列である). 任意の零でない複素数 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, $H := \alpha A + \bar{\alpha} A^T$ を考える. H はエルミート行列であるので固有値はすべて実数である. また H は零行列ではなく H のトレースは 0 であるので, H の最小固有値は負である (これを τ とする). このとき $H - \tau I$ は半正定値行列である. 従って $I - \frac{1}{\tau} H$ も半正定値行列である. $d := \text{rank}(H)$ としたとき, $I - \frac{1}{\tau} H$ は $\Omega(d)$ のある有限集合 X のグラム行列に一致する. 式 (2.1) より $I - \frac{1}{\tau} H = I - \frac{1}{\tau} (\alpha A + \bar{\alpha} A^T)$ の非対角成分は $-\frac{\alpha}{\tau}, -\frac{\bar{\alpha}}{\tau}$ の二種類であるので, X の次数は 2 である. このようにしてトーナメント G から次数 2 の有限集合 X を得る操作を埋め込みと呼ぶ.

任意の零でない複素数 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して, トーナメントの埋め込みが存在することが分かった. 次元と次数を固定したときサイズが最小となる複素球面の有限集合が興味深いので, トーナメントの複素球面への埋め込みでは d が最小となるような α を決定することが重要である (そのような d を $\text{Rep}(G)$ と表す). トーナメントの最小次元の埋め込みに関して, 次の結果が得られた. 以下の定理で用いられる main angle の定義を与える. 一般に, 位数が n のエルミート行列 H のスペクトル分解が $H = \sum_{i=1}^s \tau_i E_i$ で与えられたとき, 固有値 τ_i に関する main angle とは $\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{(E_i \cdot j)^*(E_i \cdot j)}$ で定義される. ここで j は成分がすべて 1 の列ベクトルである.

Theorem 2.1. [3, Theorem 3.1] G を頂点数が n のトーナメントとし, A をその隣接行列とする. $\sqrt{-1}(A - A^T)$ の固有値を $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s$, τ_i の main angle を β_i , 重複度を m_i とする. α ($\text{Im}(\alpha) > 0$) を G の $\Omega(\text{Rep}(G))$ への埋め込みで現れる内積とすると, 次が成り立つ.

- (1) If $\beta_1 = 0$, then $\text{Rep}(G) = n - m_1 - 1$, and $\alpha = (1 - c_1 \sqrt{-1}) / (1 + c_1 \tau_1)$, where $c_1 = \sum_{i=2}^s n \beta_i^2 / (\tau_i - \tau_1)$.
- (2) If $\beta_1 \neq 0$, and $m_1 > 1$, then $\text{Rep}(G) = n - m_1$, and $\alpha = -\sqrt{-1} / \tau_1$.
- (3) If $m_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, and $c_2 < 0$, then $\text{Rep}(G) = n - m_2 - 1$, and $\alpha = (1 - c_2 \sqrt{-1}) / (1 + c_2 \tau_2)$, where $c_2 = n \beta_1^2 / (\tau_1 - \tau_2) + \sum_{i=3}^s n \beta_i^2 / (\tau_i - \tau_2)$.
- (4) Otherwise $\text{Rep}(G) = n - 1$.

Remark 2.2. 無向グラフには類似の考察により実ユークリッド空間の 2 距離集合との対応がある. この場合にも最小次元への埋め込みがもっとも興味深い, 無向グラフの隣接行列のスペクトルの情報を用いて最小次元が Roy[4] により決定されている. Theorem 2.1 は Roy による定理の, トーナメントへの類似といえる.

3 次数が2の複素球面上の有限集合の最大サイズと特徴づけ

X を $\Omega(d)$ の次数が2の有限集合とし, $A(X)$ の要素は実数でないとする. このとき写像 $\phi: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R}^{2d}; (x_i)_{i=1}^d \mapsto (\operatorname{Re}(x_1), \operatorname{Im}(x_1), \dots, \operatorname{Re}(x_d), \operatorname{Im}(x_d))$ により, X は相異なる二点間の距離が一つしか現れない $\mathbb{R}^{2d}$ の単位球面上の有限集合に移される. よって, $|X| \leq 2d+1$ の不等式が直ちに得られる. この不等式を達成する次数が2の有限集合, および $|X| = 2d$ を満たす次数が2の有限集合の特徴づけは以下の通り与えられる.

Theorem 3.1. X を $\Omega(d)$ の次数が2の有限集合とし, A をその隣接行列, $S = \sqrt{-1}(A - A^T)$ とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $|X| = 2d+1$ であることの必要十分条件は A が $AJ = JA = dJ$, $AA^T = \frac{d+1}{2}I + \frac{d-1}{2}J$ を満たすことである. このとき, 特に d は奇数でなければならない.
- (2) 偶数である d に対して, $|X| = 2d$ であることの必要十分条件は A が $(I + A - A^T)(I + A - A^T)^T = 2dI$ を満たすことである.
- (3) 奇数である d に対して, $|X| = 2d$ であることの必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである
 - (a) $|Y| = 2d+1$ となる Y から適当な一点を除いた集合と X が一致する.
 - (b) 同じ置換による行と列の入れ替えにより S^2 が

$$\begin{pmatrix} kI + lJ & 0 \\ 0 & kI + lJ \end{pmatrix},$$

と一致する. ここで k, l はある正整数である

(1) の条件を満たすトーナメントは二重正則トーナメント (doubly regular tournament) と呼ばれる. (2) に現れる $I + A - A^T$ は歪対称アダマール行列 (skew Hadamard matrix) と呼ばれる. (3)(b) において $(k, l) = (2d-3, 2)$ のとき $I + A - A^T$ は D -optimal design と呼ばれる. このように上界を達成する, もしくは上界に近いところではさまざまな組合せ構造が付随していることが分かる.

証明は [3] を参照されたいが, おおまかな方針は以下のとおりである. (1) の必要性は複素球面上のデザイン理論 [6] を用いる. 等号成立する次数2の有限集合はある強さを持つ複素球面上のデザインになることを示し, さらに次数がデザインの強さに十分近いときにアソシエーションスキームの構造を有することを用いる. このとき次数が2で隣接行列が非対称なので, 対応するアソシエーションスキームはクラスが2の非対称なアソシエーションスキームである. このアソシエーションスキームは二重正則トーナメントと同値な対象である. 十分性は Theorem 2.1 を用いる.

(2),(3) は該当する複素球面上の有限集合を最小次元の埋め込みを持つトーナメントに対して, 行列 $S = \sqrt{-1}(A - A^T)$ のスペクトル解析と Theorem 2.1 を用いることで行う.

(3)(a) では次の結果を用いている [2].

Theorem 3.2. n を $n \equiv 3 \pmod{4}$ となる自然数とする. このとき次は同値である

- (1) 頂点数が n の二重正則トーナメントが存在する.
- (2) 頂点数が $n-1$ のトーナメントで, $\sqrt{-1}(A - A^T)$ の固有値が $(\tau_i)_{i=1}^4 = (-\sqrt{n}, -1, 1, \sqrt{n})$, 対応する *main angle* が $(\beta_i)_{i=1}^4 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ となるものが存在する.

二重正則トーナメントの存在性と同値な組合せ論的な対象は多数知られているが, 次の命題が最も重要だと思われる [5].

Theorem 3.3. n を $n \equiv 3 \pmod{4}$ となる自然数とする. このとき次は同値である

- (1) 頂点数が n の二重正則トーナメントが存在する.
- (2) 位数が $n+1$ の歪対称アダマール行列が存在する.

4 おわりに

複素球面上の次数 2 の有限集合の最大サイズとその上限に近いところでの特徴づけについて論じた. 最後に関連する興味深いと思われる問題を掲げる.

- (1) $|X| = 2d - 1$ となる $\Omega(d)$ 上の内積が実数でない次数 2 の有限集合を特徴づけよ.
- (2) Theorem 3.1(3)(b) を満たすものを構成せよ.

次数 2 の研究では隣接行列 A ではなく, $S = \sqrt{-1}(A - A^T)$ を有効に用いた. 隣接行列は一般には正規行列ではないが, S はエルミート行列であることが S を用いるメリットであった. 一般の有向グラフに対する S の類似として, Guo-Mohar[1] により有向グラフ $G = (X, E)$ に対するエルミート隣接行列 H が定義された:

$$H_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y), (y, x) \in E, \\ \sqrt{-1} & \text{if } (x, y) \in E, (y, x) \notin E, \\ -\sqrt{-1} & \text{if } (x, y) \notin E, (y, x) \in E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- (3) エルミート隣接行列を用いて, 一般の有向グラフと複素球面上の次数 3, 4 の有限集合を調べよ.

参考文献

- [1] K. Guo, B. Mohar, Hermitian adjacency matrix of digraphs and mixed graphs, preprint, arXiv:1505.01321.
- [2] H. Nozaki, S. Suda, A characterization of skew Hadamard matrices and doubly regular tournaments, *Linear Algebra and Appl.* **437** (2012), no. 3, 1050–1056.
- [3] H. Nozaki, S. Suda, Complex spherical codes with two inner products, *European J. Combin.*, to appear.
- [4] A. Roy, Minimal Euclidean representation of graphs, *Discrete math.* **310** (2010), 727–733.
- [5] K. B. Reid, E. Brown, Doubly regular tournaments are equivalent to skew Hadamard matrices, *J. Combin. Theory, Ser. A* **12** (1972), 332–338.
- [6] A. Roy, S. Suda, Complex spherical designs and codes, *J. Combin. Des.* **22** (2014), 105–148.