

活性化されたクラスター群の動的特性

東北大工基礎

原 啓明

1. はじめに

最近, 神経回路網のモデルとして, Hopfield モデル¹⁾, Boltzmann マシン²⁾がスピングラスの問題と関連して注目されている。これ等のモデルでは, 温度が巨視的にシステムの状態を特徴づけるパラメーターとして重要な役目をしている。しかし, 生体のなかでも哺乳動物にとっては温度はいつも一定に保たれており, 温度のパラメーターとしての役割は必ずしも明らかではない。むしろ生物にとっては, 外界の状態をどんな形で情報として取り込み認識・学習して行くかと言う事の方が重要である。この立場から, 我々はニューラル・ネットワークの問題を情報源 (IS) と確率的に結合したランダム・ネットワーク (RN) から構成された合成系の問題としてとらえる事を提案した³⁾。この枠組みでは, 温度に変わるパラメーターとして「情報度」を導入している。

本報告では, 神経回路網に対する一つの理想化された系として情報度で特徴づけられたランダム・ネットワークを提案し, その動的特性を調べる。系は基本素子間の結合の強さによって類別されるクラスター群から構成された複合系である。各クラスター内の基本素子群がつくる空間構造には, 自己相似的なフラクタル構造が付与されているものと考え, ランダム・ネットワークの状態変化は, 情報源によって活性化されたクラスターの内部状態数の時間変化によって記述されるものとする。以下では, 内部状態数に臨界レベルを導入することによって系が示す動的特性を具体的に調べる。

2. 情報の記銘と保持

我々が考えるニューラル・ネットワークは図 1 で示すような基本素子の集合から構成されたクラスター群のネットワークである。このニューラル・ネットワークの系における情報処理を問題にするには, まず「どのようにし

で情報源の状態を記録するか？」，つぎに「その状態をどのようにして保持するか？」を規定する必要がある。

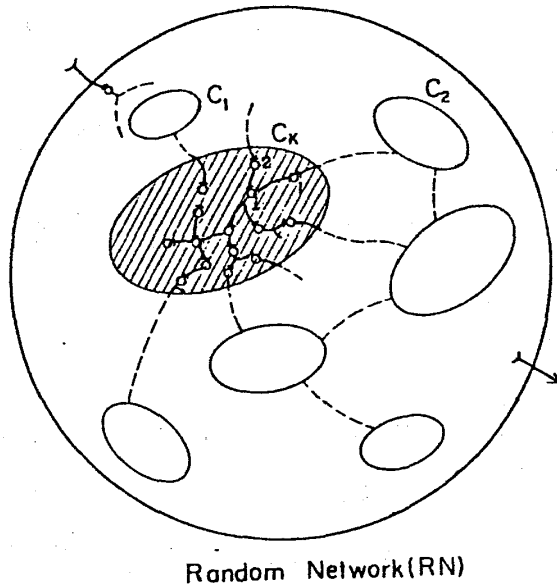


図 1

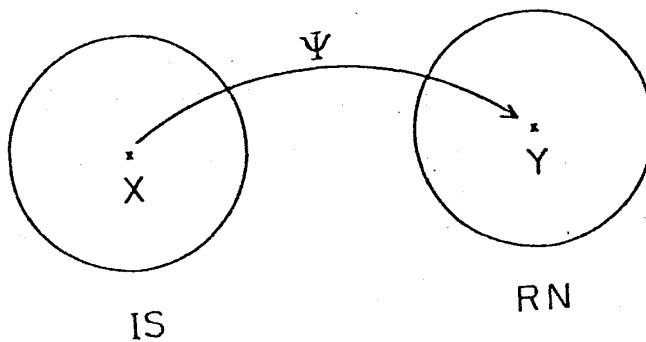


図 2

ここでは，記録とは RN の構成要素であるクラスター群が情報源の状態に応じて活性化された状態であると見なし，情報の保持は RN の確率分布関数の時間変化によって記述されるものとする。記録は情報源 (IS) とランダムネットワーク (RN) 間の写像 ψ によって形式的に表すことが出来る (図 2 参照)。すなわち，IS の状態ベクトル X の成分は状態値 A_k ，生起確率 P_k によって

$$X_k = \begin{vmatrix} A_k \\ P_k \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

で定義された状態ベクトル $X (= [X_1, X_2, \dots, X_n])$ は, 記銘を意味する ψ によって, 形式的に

$$\psi: X \rightarrow Y \quad (2.2)$$

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \quad (2.3)$$

$$Y_k = \begin{vmatrix} E_k \\ \rho_k \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

と RN の状態ベクトルに写像される。記銘ごとの状態の変化に関してはリハ－サル, 忘却効果などの相関を考慮して動的に調べることも出来る⁴⁾。 E_k ($k=1, 2, \dots, n$) は活性化されたクラスター C_k の状態を表わす”エネルギー”値である。 ρ_k はクラスター C_k の個数で決まる確率分布関数である。 E_k は各クラスター内の基本素子間の結合形態を考えたハミルトン関数

$$H^{(k)}(\{S\}) = \sum_a J_a^{(k)} S_a^{(k)} \quad (2.5)$$

の値である。係数 $J_a^{(k)}$ は, 添字 a で表された結合形態における基本素子間の結合定数である。定常状態では, RN の確率分布関数 ρ_k の関数形を具体的に求めることが出来る。すなわち単位エネルギー当りの情報量を, 条件 $\sum_i \rho_i = 1$ のもとで最大にする分布として求めると,

$$\rho_k = e^{-E_k / k_B \Theta} \quad (2.6)$$

となる。 k_B と Θ は, それぞれ (2.6) の分布で決まる平均エネルギーと情報エントロピーの逆数である³⁾。この分布関数は Hopfield モデル, Boltzman n マシンにおける分布関数と同形である。しかし Θ は RN の状態を特徴づける単なるパラメーターではなく, Θ は情報源の状態を明確に表現している。以下では Θ を温度と区別して「情報度」と呼ぶことにする。とくに, $\exp(1/k_B \Theta)$ を W とおくと, W は $\sum_k W^{-E_k} = 1$ を満足する値として決まる。この

ことから RN を一つの通信路とみれば、 Θ の逆数 $(1/k, \Theta = \beta)$ は RN の通信容量に相当する。また拘束条件を $\sum_i \rho_i = 1$ と $\sum_i E_i \rho_i = \langle E \rangle$ にとり、情報エントロピーを最大にすれば、 ρ_k の関数形は

$$\rho_k = e^{\alpha-1} e^{-\beta E_k} \quad (2.7)$$

となる。 α と β は拘束条件で決まる。 β の意味は情報源の状態 X_k と RN に関して次の要請：

- 1 刺激量は活性化された基本素子数に比例し、この基本素子数によってエネルギーレベルが決まる。
- 2 感覚量は刺激量の対数に比例する。— Weber-Fechner (WF) の法則 —

を行うことによって情報度 Θ の逆数は 外界に対する生体の応答を直接表現するパラメーターと見ることが出来る。

3. 臨界レベル

活性化されたクラスターのエネルギー E_k は クラスター C_k に含まれる活性化された基本素子数に比例する量である。また E_k は時間の経過と共に増大する状態数のレベルと考えることが出来る³⁾。

変化の様子は、レベル数、状態数、経過する時間からなる空間内の点の軌跡として理解される。すなわち、図3の点 I_0 から点 P への軌跡は IS の "情報" (刺激) によって活性化されていくクラスターの状態の変化を模式的に示したものである。

点 P は クラスター C_k の活性化の終了を示す点、 $N^{(k)}$ はレベル数の上限である。 I_{N_0} はレベル $N^{(k)}$ における状態数、 t_0 は状態レベルが $N^{(k)}$ に到達するまでの時間である。各状態数レベル間を n 分割し、各区間における増加率を b_k/n とすると、 $N^{(k)}$ レベルの状態数がもとまる。

レベル数 $N^{(k)}$ で規格化した状態数を $P_{N^{(k)}}(b_k)$ 、規格化因子を $\Omega^{(k)}$ で

表すと、その状態数密度関数は、

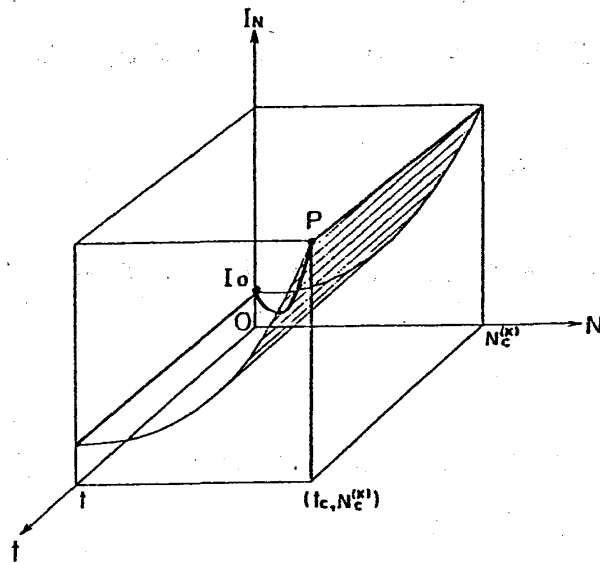


図 3

$$\Omega^{(k)} P_N^{(k)}(b_k) = D^{(k)}(N^{(k)}, b_k) dN^{(k)} \quad (3.1)$$

で定義される。時間の関数として状態変化を調べるために $N_c^{(k)}$ までの待ち時間 t を次式で導入する：

$$\frac{1}{t} = \omega_k [e^{b_k(N^{(k)} - N_c^{(k)})}]^{1/a_k} \quad (0 < N^{(k)} < N_c^{(k)}) \quad (3.2)$$

[] の中は $P_N^{(k)}(b_k)$ の因子である。 ω_k は定数でその次元は $[1/t]$ である。上式は待ち時間の逆数 $1/t$ が遷移確率に比例し、 t と $N^{(k)}$ の関係はパラメター a_k によって規定されていることを示している。

異なるクラスター間では、基本素子間の相互作用が弱いことを考慮しすると、(3.2) に相当する式は

$$\frac{1}{t} = \tilde{\omega} [e^{\tilde{b}(N - N_c)}]^{1/\tilde{a}} \quad (0 < N < N_c) \quad (3.3)$$

$$(\tilde{\omega} = \prod_{k=1} \omega_k)$$

となる。 $\tilde{b}$ と $\tilde{a}$ は、関係式

$$\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} (N - N_0) = \sum_k \frac{b_k}{a_k} (N^{(k)} - N_0^{(k)}) \quad (3.4)$$

を通じて、系のレベル数 N 、上限 N_0 、クラスター C_k に関する対応する量 $b_k, a_k, N^{(k)}, N_0^{(k)}$ と結ばれている。 k -和は各 C_k の個数についての和を意味する。 $\tilde{b} / \tilde{a}$ は情報度の逆数 β に等しい。

$$D(N, \beta) = \prod_{k=1} D^{(k)}(N^{(k)}, b_k) \quad (3.5)$$

と(3.3)を使って、待ち時間に関する確率密度関数 $\psi(t)$ を次式で定義する：

$$D(N, \beta) dN = -\Omega \psi(t) dt \quad (3.6)$$

$$(\Omega = \prod_{k=1} \Omega^{(k)})$$

a_k が a に等しい場合には、 $\psi(t)$ の t 依存性は、べき分布

$$\psi(t) \sim t^{-1-a} \quad (3.7)$$

となる。とくに $\tilde{b} / \tilde{a} (= \beta)$ が小さい場合、 $\psi(t)$ は指数分布

$$\psi(t) \sim e^{-\tilde{a}\omega t} \quad (3.8)$$

となる。図4は上の結果を描いたものである。

図中の t_0, t_* は関係式(3.3)で決まる t の下限と上限である。まとめると次の関係式

$$a \log \frac{t_*}{t_0} = \beta N_0 \quad (3.9)$$

が得られる。 N_0 以外の各量は $\psi(t)$ のプロファイルから直接決定できる量である。すなわち(3.9)によって系の動的特性を特徴づける臨界レベル N_0 。

を評価することが出来る。

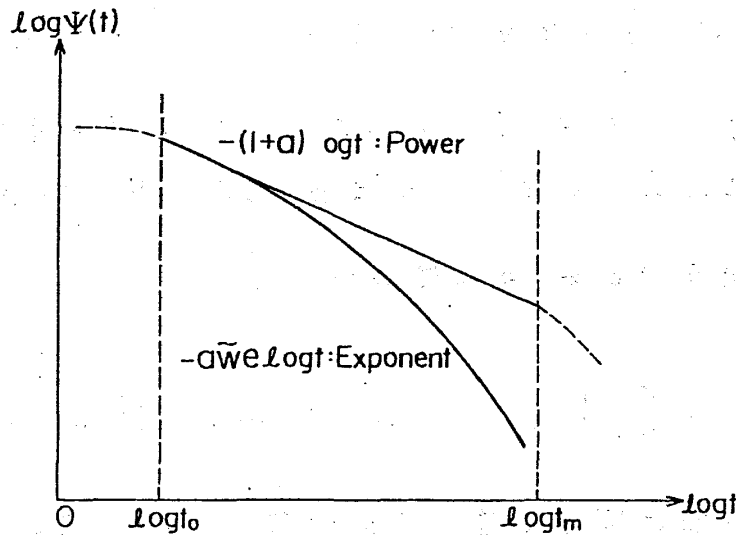


図 4

4. スケーリング則

基本素子は情報源の入力をシャット・アウトした後も絶えず周りにある他の基本素子群から影響を受けている。この意味では、基本素子の膜電位の値はランダムに変動する。クラスター C_k に属する基本素子がステップ N で膜電位の値 m をとる確率を $W(m, N)$ とすると、素子の取りうる状態のプロセスは、 $W(m, N)$ の漸化式

$$W(m, N) = \sum_{C=1}^N \sum_{\alpha} P_{N, N-C}^{\alpha}(m | m - \alpha \cdot 1) \cdot W(m - \alpha \cdot 1, N - C) \quad (4.1)$$

によって記述される³⁾。 $P_{N, N-C}^{\alpha}(m | m - \alpha \cdot 1)$ は状態間 $[N - C, m - \alpha \cdot 1$ から $N, m]$ のジャンプ確率（遷移確率）である。 C -和は上限 N までの和を、 α -和は記号 $+, -, 0$ に関する和を意味する。

一般化されたランダムウォーク（GRW）⁵⁾ では、 $P_{N, N-C}^{\alpha}(m | m - \alpha \cdot 1)$ は、次の規格化条件と付帯条件で規定されたジャンプ確率である。

$$\sum_{C=1}^{N_{\infty}} \sum_{\alpha} P_{N+C, N}^{\alpha} (m+\alpha \cdot 1 | m) = 1 \quad (4.2)$$

$$P_{N, N-1}^{\alpha} (m | m-\alpha \cdot 1) = F(\{ P_{N, N-C}^{\beta} (m-\alpha \cdot 1 | m-\alpha \cdot 1-\beta \cdot 1) \})$$

$$(\beta = +, -, 0) \quad (4.3)$$

N_{∞} はステップ数 N の上限， F はステップ数 N の異なるジャンプ確率間の関係を形式的に表す記号である。図5は(4.1)の漸化式で記述する素過程を模型的に描いたものである。図中の m は膜電位の値， N は時間の経過を表すステップ数である。点 (m_0, N_0) は活性化を特徴づける膜電位のいき値とステップ数である。また斜線部は活性化された状態を示す。

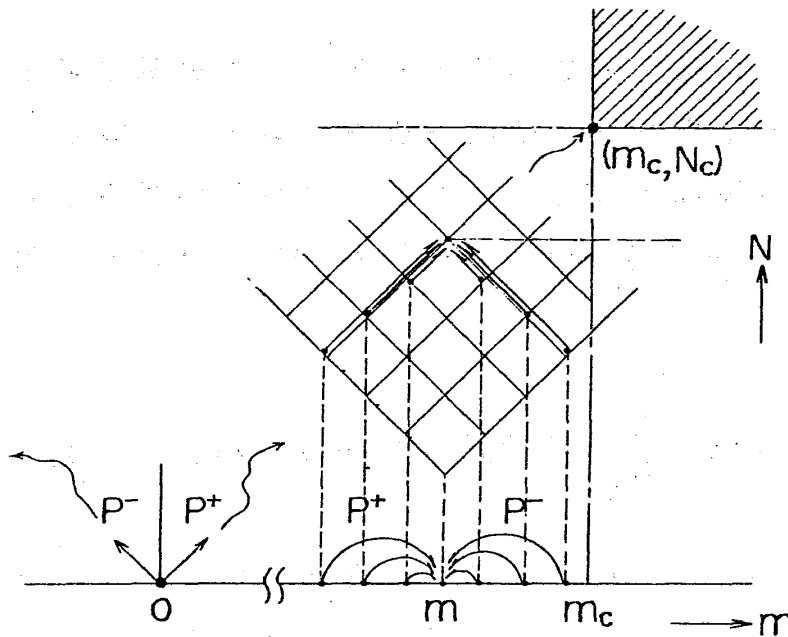


図 5

膜電位の変動を通して見た活性化のプロセスを規定するジャンプ確率は， N だけの関数であるとする。また付帯条件 F で表されたジャンプ確率は N の各区間毎に比例係数 b が異なるポアソン過程であると仮定する。連続時間の極限 [$N \rightarrow Nt_0$, t_0 : 単位時間] を取ると，(4.1), (4.3) は

$$W(m_0, t) = \int_0^t P(t-\tau) W(m_0, \tau) d\tau \quad (4.4)$$

$$E: \quad \frac{dP(t)}{dt} = - \frac{b(\varepsilon t)}{t_0} P(t) \quad (4.5)$$

$$(0 < b(\varepsilon t) < 1)$$

で表される。 ε は小さなパラメーターである。(4.5)を初期条件 $P(0)=1(<1)$ のもとで解くと

$$P(t) = a \cdot \exp(-b\tilde{t}), \quad (\tilde{t} = t/t_0) \quad (4.6)$$

$$b = \frac{1}{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}} b(\varepsilon t) dt \quad (4.7)$$

となる。

$P(t)$ によって基本素子の膜電位を記述するとき、この基本素子と周りの基本素子群との結合によって作られる空間構造を考慮する必要がある。ここでは、多数個の基本素子から構成されたクラスターの幾何学構造として自己相似なフラクタルを仮定して、 $P_n(t) = a b P_{n-1}(bt)$, $P_0(0)=1$ とおく。以上の条件を満たす解は

$$P(\tilde{t}) = A \sum_{n=1}^{\infty} a^n b^n e^{-b^n \tilde{t}} \quad (0 < a, b < 1) \quad (4.8)$$

となる⁶⁾。Aは区間 $[0, \infty]$ の積分で表された規格化因子である。 $\varepsilon \rightarrow 0$ ではAは定数 $(1-a)/a$ となる。Shlesiger達⁷⁾も違った方法で(4.8)を導出しているが、その根拠はあまり明らかではない。また直接 $P(t)$ に関するスケールリング則を考えても同じ結果を導出できる⁸⁾。

(4.8)は鞍部点法によって

$$P(\tilde{t}) \sim (A/2) a^{n_0} b^{n_0} \exp(-b^{n_0} \tilde{t})$$

$$\cdot \left[\frac{2\pi}{(\log b)^2 b^{n_0} \tilde{t}} \right]^{1/2}$$

$$\sim \tilde{t}^{-1-\gamma} \quad (4.9)$$

$$(\gamma = \log a / \log b)$$

と評価できる。

鞍部点 n_0 を決める条件は

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_0(\gamma+1)} [\exp(n_0 \log a)]^{1/\gamma} \quad (4.10)$$

である。系の他のクラスターにたいしても同様な議論を行うと(3.3)に対応する(4.10)がえられる。すなわち(3.2)から(3.3)へ拡張したように(4.10)の各項 γ , n_0 , a はそれぞれ " $\sim$ " を付けた系全体のクラスター群の積で決まる量で置き代える。この表式と(3.3)を比較すると, n_0 と $N_c - N$, γ と α , $\log a$ と $-\beta$ を対応させることが出来る。この対応関係によって上述のスケーリングの物理的意味を情報度によって考えることが出来る。また(4.7)における b の t -依存性によって(4.9)のべき指数はゆるやかな時間依存性を示す。

5. むすび

本報告では、生体の情報処理システムに対するモデルとして Random Neural network(RN)を提案して、その動的特性を調べた。系は基本素子間の結合によって類別されたクラスター群から構成されている。すなわち基本素子間の相互作用はクラスター内では強いが、異なるクラスターに属する基本素子間では弱いものとする。RNの動的特性は、情報源の状態で決まる「情報度」で特徴づけられ、実際の生体の行動解析と比較することが出来る⁹⁾。またモデルを構成する要素の意味を代えと、ここで導出したべき分布で表された動的特性から、不均質断層の震源スペクトル構造に関する知見もえられる¹⁰⁾。

文 献

- 1) J.J.Hopfield: Natl.Acad.ci.U.S.A.79 (1982) 2554; 81(1984),3088
D.Chowdhury: Spin Glasses and other Flustrated Sysystems. Pri
nceton Press (1986)
- 2) D.H.Ackley, G.E.Hinton,T.J.Sejnowski: Cognitive Sci.9 (1985) ,
147
P.Peretto: Neural network 1 (1988),306
- 3) 原 啓明: 研究会発表,(1984)京大基研; 数理科学 264 (1985),35;
H.Hara;Science Form 1(1985),59;MBE 85-87(1986); MBE 87-12
(1988),151
原 啓明, 加藤健二, S.D.Choi:応用情報学年報 13 (1988),115
原 啓明, 鈴木 彰: MBE 88-182 (1989) 157
- 4) Y.Tamura and H.Hara:(to be submitted)
- 5) H.Hara: Phys.Rev. B15 (1979),4062; B31 (1985),4612 ;Z.Physik B
32 (1979),405 ; B39 (1980),261
H.Hara,T.Obata,and S.J.Lee: Phys.Rev. B37 (1988),476
- 6) H.Hara,O.K.Chung,and J.Koyama:(to be submitted)
- 7) M.F.Shlesiger and B.D.Hughes:Physica 109A (1981),115
- 8) Th.Niemeijer and J.M.J van Leeuwen:Phase Transitions and Criti
cal Phenomena,Vol.6 C.Domb and M.S.Green, eds. Academic press,
London 1976
- 9) 嶋田一郎, 川添良幸, 原 啓明: 動物生理 (印刷中)
- 10) 小山順二, 原啓明: 地震 II 42 (印刷中)