

複数のボトルネックをもつ通勤時刻選択問題とその均衡解

林 俊介（東北大学 情報科学研究科）

概要 通勤ラッシュにおける渋滞は世界中で依然深刻な問題であり、その本質的な原因を解明すべく様々な数理モデルが提案されている。その端緒となるのが、Vickrey の提唱した出発時刻選択均衡問題である。Vickrey モデルは単一のボトルネックのみを考慮しており、同様のモデルに関してはこれまで多くの研究がなされてきた。一方、複数のボトルネックを考慮したモデルに関しては、渋滞による旅行時間の伸縮が複雑に絡み合うため、これまでモデル化および解析が困難とされてきた。この困難を解決すべく、赤松らは複数のボトルネックを考慮したコリドー型（直列型）道路網に対して、到着時刻をベースとした時刻座標系を新たに導入することにより、出発時刻選択均衡問題の均衡解を無限次元の相補性問題として定式化した (Akamatsu, Wada, and Hayashi, Transportation Research Part B, 2015)。さらに、時刻を離散化し、相補性問題を有限近似することにより、均衡解の有する性質を解析的および実験的に調べた。本稿ではこの赤松らのモデルについて概説する。

1 序論

都市における朝晩の交通渋滞は深刻な経済的損失の原因となる。このような交通渋滞問題に対して、ある種の理解と特徴づけを与えるべく提案されたのが Vickrey のボトルネックモデル [12] である。このモデルでは、単一のボトルネックに対して複数の通勤者が各々の旅行費用を最小化するように出発時刻を選択し、それによって実現しうる均衡状態が表現されている。Vickrey のモデルは、単純性と明快性ゆえ、多くの研究者により盛んに研究がなされ、様々な問題に応用されてきた [4, 5, 6, 10]。

一方、複数のボトルネックを含むような道路ネットワークに対するモデル研究についてもこれまでいくつかなされてきた。桑原 [8] および Arnott ら [2] は二つのボトルネックが直列に連なった場合のユーザー均衡を解析した。また、Lago and Daganzo [9] は spillover と merging effect を有するような同様の問題について解析を行った。これらの一般化は、異なる出発点をもつ通勤者の間での混雑の分布に有用な見識を与えるものであるといえる。しかし、これらの研究では解析的アプローチのみを用いているため、ボトルネックが多数存在する一般的なケースに対しては均衡解を得るのはほぼ不可能であった。実際、Arnott and de Palma [3] は「コリドー問題」というある種の一般化問題を考えたが、均衡解を完全な形で得るに至っていない。一方、一般のネットワークにおいて動的ユーザー均衡 (DUE) を考えた研究も存在する。たとえば、Szeto and Wong の研究 [11] などがそれにあたるが、これらのモデル化において、ネットワーク中の

リンクとパス旅行時間の『複雑な入れ子状』になった構造を取り扱わなければならない、その理由により均衡解の性質を解析するのが極端に複雑であった。したがって、均衡解の存在性や唯一性や安定性といった多くの性質に関する課題が残ったままである [7]。また、これまで多くのアルゴリズムが提案されているにもかかわらず、均衡解への収束を保証するアルゴリズムが存在しないが、これは問題にある種の単調性が成り立つことが収束保証のために必要とされるからである。しかしながら、この単調性に関しては、後に述べるように一般的には成り立たない。

赤松ら [1] は、複数のボトルネックが直列に連なったコリドー問題に対する出発時刻選択均衡に対して、DUE を解析し、その性質を明らかにするためのアプローチを提案した。そのアプローチの基本は、均衡条件の表現法を既存の絶対時刻をベースとした座標系から目的地到着時刻をベースとした座標系に変換したところが鍵となっている。これにより、朝ラッシュ型 (many-to-one) や夜ラッシュ型 (one-to-many) の構造をもつ問題に対して、前述の『複雑な入れ子状』の構造に起因する困難を回避でき、問題の数理的構造による深い洞察を与えることができる。さらに、相補性問題や変分不等式問題への変換を用いることにより、均衡解の存在性や一意性に対する議論も可能となる。以下では赤松らの提案したモデルとその解析結果について述べる。

2 コリドー問題

2.1 朝ラッシュ型 (many-to-one) のネットワーク

図1のような N 個のボトルネックが直列に連なった many-to-one 型の OD ペアを考える。複数の出発地が住宅街、単数の目的地が都心の勤務街 (Central Business District: CBD) と考えることにより、このネットワークは朝の通勤ラッシュをモデル化したものと考えることができる。各ボトルネック $i = 1, \dots, N$ に対して各ゾーン $i = 1, \dots, N$ が対応しており、ゾーン i におけるユーザー数 (交通需要) は Q_i である。毎朝、すべてのユーザーが同じ CBD に通勤し、ゾーン i に在住するユーザーはより下流のボトルネック $i, i-1, \dots, 2, 1$ を通過するものとする。ただし、ゾーン i に在住するユーザーがボトルネック i に到着するまでの時間は 0 とし、すべてのユーザーに対して追い越しが無い、すなわち、First-In-First-Out (FIFO) が成り立つものとする。

各ユーザーは各々の旅行費用が最小となるような出発時刻 t を選択するものとする。さらに、 $\lambda_i(t) \geq 0$ をゾーン i に住み出発時刻 t を選択するユーザーの密度とする。このとき、時刻区間 $[t', t'']$ 内にゾーン i を出発するユーザーの総数は $\int_{t'}^{t''} \lambda_i(t) dt$ である。したがって、十分大きな閉区間 $[0, T]$ を考えたとき、

$$Q_i = \int_0^T \lambda_i(t) dt$$

が各 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して成り立つ.

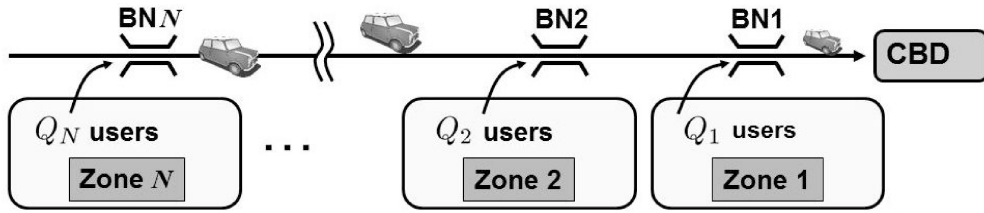


図 1: many-to-one コリドー型道路網

2.2 行列生成条件

単数ボトルネックの場合

まず, ボトルネックが1つしかない場合について議論する. $A(t)$, $D(t)$ をそれぞれ, 時刻0から t までにボトルネックに到着した車の累積台数および離脱した車の累積台数とする. また, $\mu > 0$ をボトルネックの容量とする. このとき, 両者の関係を表したのが図2である. この図より, $E(t) := A(t) - D(t)$ が時刻 t にボトルネックに並んでいる車の台数, $d(t) := E(t)/\mu$ が列に並んだ車の待ち時間を表すことが分かる. さらに, 単位時間当たりのボトルネック離脱台数はボトルネックの容量 μ を超えられないことに注意すると, $\dot{D}(t)$ に関して以下の式が成り立つ. ($\dot{D}(t)$ は $dD(t)/dt$ を意味する. 他も同様.)

$$\dot{D}(t) = \begin{cases} \mu & (d(t) > 0) \\ \min(\dot{A}(t), \mu) & (d(t) = 0) \end{cases}$$

よって, 上式より

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) &= (\dot{A}(t) - \dot{D}(t))/\mu \\ &= \begin{cases} [\dot{A}(t)/\mu] - 1 & (d(t) > 0) \\ \max(0, [\dot{A}(t)/\mu] - 1) & (d(t) = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

すなわち, 以下の相補性条件を得る.

$$0 \leq d(t) \perp \dot{d}(t) - ([\dot{A}(t)/\mu] - 1) \geq 0 \quad (2.1)$$

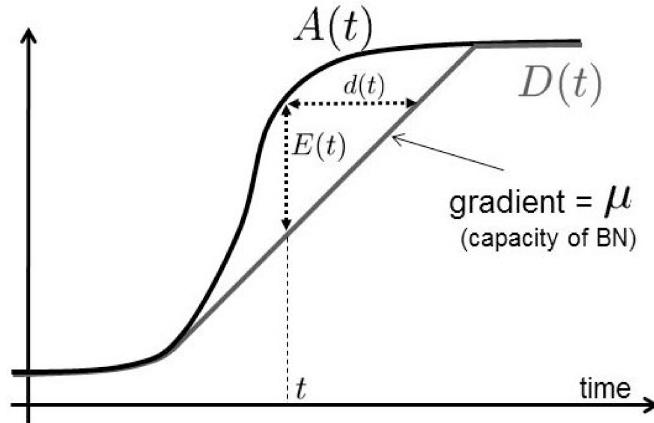


図 2: 累積到着台数と離脱台数

複数ボトルネックへの拡張

次に、上記の定式化を複数ボトルネックの場合に対して直接拡張を試みる。 t_i をボトルネック i への到着時刻^{*1}、 $\pi_i(t_i)$ をゾーン i を時刻 t_i に出発したユーザーの総旅行時間、 c_i をボトルネック i から $i-1$ までの自由走行時間、 $d_i(t_i)$ を時刻 t_i にボトルネック i に到着したユーザーがそのボトルネックを抜けるまでにかかる時間（待ち時間）とする。このとき、これらの変数の関係を図的に整理したものが図3である。この図が示すように、各ボトルネックに到着する時刻 $t_i, t_{i-1}, t_{i-2}, \dots$ の関係が『入れ子』状になり、このままでは変数を整理して数理モデル化を行うのは困難である。

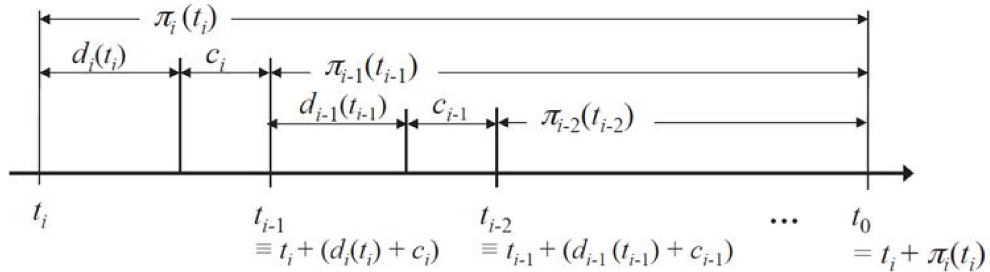


図 3: 旅行時間や到着時刻の構造

そこで、赤松ら [1] は旅行時間や各ボトルネックへの到着時刻を、絶対時刻ベースから CBD 到着時刻ベースに座標変換することにより、ボトルネック到着時刻の『入れ子』構造を回避し

^{*1}出発ゾーンが i であるユーザーであれば、 t_i はゾーン出発時刻でもある。（ゾーンを出発してからボトルネックに到着する時間は 0 としているので。）

た. $s \in S$ を CBD 到着時刻とする. ただし, $S = [\underline{s}, \bar{s}]$ は十分広い時間区間であるとする. また, $\tau_i(s)$ を CBD 到着時刻が s であるようなユーザーのボトルネック i への到着時刻とする. このとき, 単数ボトルネックの場合と同様の考え方でもって, (2.1) に $t = \tau_i(s)$ を代入すると以下を得る.

$$0 \leq d_i(\tau_i(s)) \perp \dot{d}_i(\tau_i(s)) - ([\dot{A}_i(\tau_i(s))/\mu_i] - 1) \geq 0 \quad (2.2)$$

しかし, 本式は $\dot{d}_i$ や $\dot{A}_i$ といった実時刻 t に関する微分が含まれているため, これらを CBD 到着時刻 s に関する微分に変換する必要がある. 実際, $\tilde{\tau}_i(s) := d\tau_i(s)/ds$ とする (ゝの用法は他も同様.) と, FIFO の仮定より $\tilde{\tau}_i(s) > 0$ であることから相補性条件 (2.2) は

$$0 \leq d_i(\tau_i(s)) \perp \dot{d}_i(\tau_i(s)) \cdot \tilde{\tau}_i(s) - ([\dot{A}_i(\tau_i(s)) \cdot \tilde{\tau}_i(s)/\mu_i] - \tilde{\tau}_i(s)) \geq 0 \quad (2.3)$$

と書き換えられる. さらに, $w_i(s) := d_i(\tau_i(s))$ を CBD 到着時刻が s であるようなユーザーのボトルネック i での待ち時間, $Y_i(s) := A_i(\tau_i(s))$ を CBD 到着時刻が s であるようなユーザーがボトルネック i に到着するまでのボトルネック i での累積到着台数とすると, (2.3) はさらに以下のように書き換えられる.

$$0 \leq w_i(s) \perp \dot{w}_i(s) - ([\dot{Y}_i(s)/\mu_i] - \tilde{\tau}_i(s)) \geq 0 \quad (2.4)$$

2.3 出発時刻選択原理

次に各ユーザーが出発時刻をどのようなポリシーでもって選ぶかについて考える. $s \in S$ をユーザーが選択する CBD 到着時刻^{*2} とし, $q_i(s) \geq 0$ をゾーン i に在住し CBD 到着時刻として s を選ぶユーザーの密度, $Q_i > 0$ をゾーン i に在住するユーザーの総数であるとする. このとき, 区間 $[s', s'']$ に CBD に到着するユーザーは $\int_{s'}^{s''} q_i(s) ds$ と表されるため,

$$Q_i = \int_S q_i(s) ds \quad (2.5)$$

が成り立つ. また, ゾーン i に在住するユーザーが CBD 到着時刻 s を選んだときのコストは

$$u_i(s) := s - \tau_i(s) + p(s) \quad (2.6)$$

で表される. 各ユーザーはこのコストが最小となるような CBD 到着時刻 s を選択する. ここで, $s - \tau_i(s)$ は総旅行時間であり, $p(s)$ はスケジュール遅れ関数である. スケジュール遅れ関数とは, 希望到着時刻からのズレをペナルティとして表したもので,

$$p(s) := \begin{cases} -\alpha(s - t_w) & (s < t_w) \\ \beta(s - t_w) & (s \geq t_w) \end{cases} \quad (2.7)$$

^{*2}CBD 到着時刻が s となるように出発時刻を選択すると考える.

で定義される。ただし、 α, β は $0 < \alpha < 1 < \beta$ を満たす定数であり、 $t_w \in \mathcal{S}$ は希望到着時刻を表す。

次に、各ユーザーがどのような基準で CBD 到着時刻 s を選択するかについて考える。本研究では次にあげる2つの基準 (min type と logit type) を導入する。

選択基準 A (min type)

ゾーン i ($i = 1, \dots, N$) に在住する各ユーザーはコスト $u_i(s)$ が最小となるような CBD 到着時刻 s を選択する。よって、ユーザー密度 $q_i(s)$ に関して以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} q_i(s) > 0 &\implies u_i(s) = \min_{s' \in [\underline{s}, \bar{s}]} u_i(s') \\ q_i(s) = 0 &\iff u_i(s) > \min_{s' \in [\underline{s}, \bar{s}]} u_i(s') \end{aligned}$$

すなわち、時刻 s を選択するユーザーが居ればそのコストは最小となり、コストが最小とならないような時刻 s はどのユーザーも選択しないという意味である。ここで、 $\rho_i := \min_{s' \in [\underline{s}, \bar{s}]} u_i(s')$ を導入すると、上式は次のような相補性条件で表すことができる。

$$0 \leq q_i(s) \perp u_i(s) - \rho_i \geq 0 \quad (2.8)$$

選択基準 B (logit type)

各ユーザーは CBD 到着時刻 s を確率的に選び、その確率密度関数 $P_i(s)$ は次で与えられる。

$$P_i(s) = \frac{\exp(-\theta u_i(s))}{\int_{\mathcal{S}} \exp(-\theta u_i(s)) ds}$$

ここで $\theta > 0$ は確率密度関数の感度を示す。これを用いると、CBD 到着時刻 s を選択するユーザーの密度は

$$\begin{aligned} q_i(s) &= Q_i P_i(s) \\ &= \frac{Q_i \exp(-\theta u_i(s))}{\int_{\mathcal{S}} \exp(-\theta u_i(s)) ds} \end{aligned} \quad (2.9)$$

で表される。なお、 $\theta \rightarrow \infty$ とすれば本選択基準は min type と等価になる。

3 相補性問題への変換とその性質

3.1 朝ラッシュ型 (many-to-one) の場合

本節では、出発時刻均衡問題を相補性問題に定式化し、その性質について議論する。 $\tau_i(s)$ はボトルネック i への到着時刻であったので、CBD 到着時刻 s から遡ることにより、

$$\tau_i(s) = s - \sum_{j=1}^i (w_j(s) + c_j) \quad (3.1)$$

と書ける。さらに、 $Y_i(s)$ はボトルネック i での累積到着台数であったので、その微分 $\dot{Y}_i(s)$ は

$$\dot{Y}_i(s) = \sum_{j=i}^N q_j(s) \quad (3.2)$$

で表される。よって、これらを用いることにより、選択基準が min type の場合と logit type の場合について、それぞれ出発時刻選択均衡問題が相補性問題として定式化できる。

選択基準 A (min type)

これまで得てきた式のうち、(2.6), (3.1), (3.2) を (2.4), (2.8) に代入して整理する。さらに、(2.5) 式を併せると、選択基準が min type の場合の出発時刻選択均衡問題が以下のような無限次元の線形相補性問題として書くことができる：

$$\begin{aligned} &\text{Find } (w, q, \rho) \\ &\text{s.t. } 0 \leq w_i(s) \perp \mu_i - \mu_i \sum_{j=1}^{i-1} \dot{w}_i(s) - \sum_{j=i}^N q_j(s) \geq 0 \\ &\quad 0 \leq q_i(s) \perp \sum_{j=1}^i (w_j(s) + c_j) + p(s) - \rho_i \geq 0 \\ &\quad 0 \leq \rho_i \perp \int_{\mathcal{S}} q_i(s) - Q_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, N, s \in \mathcal{S}). \end{aligned}$$

ただし、 $\rho_i > 0$ より最後の相補性条件は (2.5) 式と等価であることに注意する。また、本相補性問題は連続時刻集合 $[\underline{S}, \bar{S}]$ を離散時刻集合

$$(s_1, s_2, \dots, s_K) = (\underline{S} + \Delta s, \underline{S} + 2\Delta s, \dots, \underline{S} + K\Delta s) \quad (3.3)$$

(ただし $\Delta s = (\bar{S} - \underline{S})/K$) で近似することにより、次のような有限次元の線形相補性問題として書くことができる。

$$\begin{aligned} &\text{Find } x := (q, w, \rho) \in \mathbb{R}^{NK} \times \mathbb{R}^{NK} \times \mathbb{R}^K \\ &\text{s.t. } 0 \leq x \perp Mx + b \geq 0, \end{aligned}$$

where

$$M := \begin{bmatrix} I_K \otimes L & -\mathbf{1}_K \otimes I_K \\ -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes C(I - L) \\ \mathbf{1}_K^\top \otimes I \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} p + I_K \otimes Lc \\ I_K \otimes C\mathbf{1} \\ -Q \end{bmatrix}, \quad C := \text{diag}(\mu_i), \quad \Delta s := 1,$$

$$L := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_K := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad p := \begin{bmatrix} p(s_1) \\ \vdots \\ p(s_K) \end{bmatrix}, \quad Q := \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix}, \quad c := \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

選択基準 B (logit type)

同様に, logit type の場合は, これまで得てきた式のうち, (2.6), (3.1), (3.2) を (2.4), (2.9) に代入して整理する^{*3}と, 出発時刻選択均衡問題が以下のような無限次元の非線形相補性問題として書くことができる:

$$\begin{aligned} &\text{Find } (w, q) \\ &\text{s.t. } 0 \leq w_i(s) \perp \mu_i - \mu_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{w}_j(s) - \sum_{j=i}^N q_j(s) \geq 0 \\ &\quad 0 \leq q_i(s) \perp q_i(s) - \frac{Q_i \exp(-\theta \sum_{j=1}^i (w_j(s) + c_j) + p(s))}{\int_S \exp(-\theta \sum_{j=1}^i (w_j(s) + c_j) + p(s)) ds} \geq 0 \\ &\quad \quad \quad (i = 1, \dots, N, s \in S) \end{aligned}$$

また, 時刻集合 S を (3.3) のように離散化することにより, 非線形相補性問題として定式化される。(詳細は [1] を参照のこと.)

3.2 タ方ラッシュ型 (one-to-many) の場合

これまでは図 1 のような many-to-one の問題のみを考えてきたが, 図 4 のような one-to-many の問題も同様の枠組みで考えることができる。これは夕方の帰宅ラッシュを表現したものと考えられる。このモデルでは, 各ユーザーが CBD 出発時刻 s を選ぶものとし, これまでの議論を時系列を逆から辿るような考え方をを用いることにより, one-to-many の場合と同様の議論が可能である。実際, 時刻選択基準が min type の場合は線形相補性問題として, logit type の場合は非線形相補性問題として定式化できる [1].

^{*3}(2.5) 式は自動的に満たされることに注意。

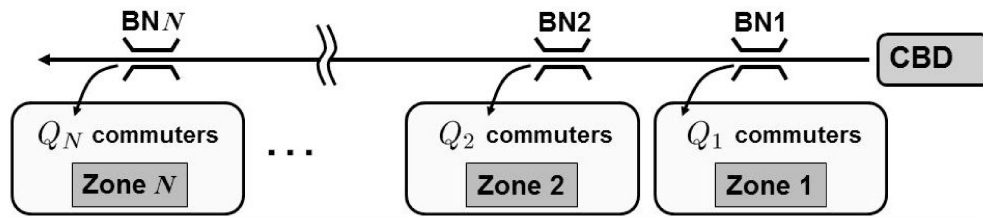


図 4: one-to-many コリドー型道路網

3.3 均衡解の存在性と一意性について

赤松ら [1] は many-to-one (min type), many-to-one (logit type), one-to-many (min type), one-to-many (logit type) の 4 つのタイプの問題に対してそれぞれ均衡解の存在性と一意性について議論した。実際、存在性に関しては 4 つのタイプすべてにおいて成立することが証明された。この証明では、相補性問題や変分不等式問題の解の存在性の定理を直接用いるのではなく、解くべき相補性問題をある種の点集合写像および関数を含むような不動点問題として定式化し、それに対して角谷や Brouwer の不動点定理を適用している。一方、一意性に関しては、今のところ one-to-many (logit type) のみ完全な形で証明がなされており、many-to-one (logit type) の場合はある仮定の下での証明がなされている。一方、min type の場合は、 q に対して一意性が成り立たないような反例が見つかった。しかし、実験的には w に関しては一意性が成り立たない例は見つかっておらず、 w の部分のみで見れば一意性が成り立つのではないかと予想されている。

参考文献

- [1] T. AKAMATSU, K. WADA, AND S. HAYASHI, *The corridor problem with discrete multiple bottlenecks*, Transportation Research Part B, 81 (2015), pp. 808–829.
- [2] R. ARNOTT, A. DE PALMA, AND R. LINDSEY, *Properties of dynamic traffic equilibrium involving bottlenecks, including a paradox and metering*, Transportation Science, 27 (1993), pp. 161–179.
- [3] R. ARNOTT AND E. DE PALMA, *The corridor problem: preliminary results on the no-toll equilibrium*, Transportation Research Part B, 45 (2011), pp. 743–768.
- [4] C. F. DAGANZO, *The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck*, Transportation Science, 19 (1985), pp. 29–37.

- [5] C. F. DAGANZO AND R. C. GARCIA, *A pareto improving strategy for the time-dependent morning commute problem*, Transportation Science, 34 (2000), pp. 303–311.
- [6] C. HENDRICKSON AND G. KOCUR, *Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model*, Transportation Science, 15 (1981), pp. 62–77.
- [7] T. IRYO, *Properties of dynamic user equilibrium solution: existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology*, Transportmetrica B: Transport Dynamics, 1 (2013), pp. 52–67.
- [8] M. KUWAHARA, *Equilibrium queueing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak*, Transportation Science, 24 (1990), pp. 217–229.
- [9] A. LAGO AND C. F. DAGANZO, *Spillovers, merging traffic and the morning commute*, Transportation Research Part B, 41 (2007), pp. 670–683.
- [10] M. J. SMITH, *The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck*, Transportation Science, 18 (1984), pp. 385–394.
- [11] W. Y. SZETO AND S. C. WONG, *Dynamic traffic assignment: model classifications and recent advances in travel choice principles*, Central European Journal of Engineering, 2 (2011), pp. 1–18.
- [12] W. S. VICKREY, *Congestion theory and transport investment*, The American Economic Review, 59 (1969), pp. 251–260.