

ハミルトン系のカオスの拡大率スペクトル

九大理 堀田 武彦、九州共立大 森 肇

ラグランジュ乱流における染料の混合について考える。ラグランジュ乱流では染料は引き伸ばされ折り畳まれて、混ざり拡がる。引き伸ばしの方向と直交する方向には染料は縮む、そのため、この方向の濃度勾配は増大する。隣接した2つの流体粒子は時間と共に指数関数的に分離して行く(カオス)、したがって、濃度勾配も指数関数的に増大する。濃度勾配の増大は、分子拡散を強め、流体粒子に乗った移流と共に、染料の混合・拡散に寄与する。

今、時間的に周期変動をする速度場を持った2次元非圧縮流体の層流を考える。速度場の変動の1周期ごとに離散化された時刻を用いると、流体粒子の運動は2次元の面積保存写像 T によって記述される。時刻 n 、点 X での染料の濃度を $C_n(X)$ 濃度勾配を $\nabla C_n(X)$ とすると

$$\begin{aligned} C_{n+1}(X) &= \int \delta(X - T(Y)) C_n(Y) dY, \\ &= C_n(T^{-1}(X)) \quad (\because \det DT = 1), \end{aligned}$$

$$\nabla C_{n+1}(X) = {}^t DT^{-1}(X) \nabla C_n(T^{-1}(X)),$$

$$\nabla C_n(X) = [{}^t DT(T^{-1}(X)) {}^t DT(T^{-2}(X)) \cdots {}^t DT(T^{-n}(X))]^{-1} \nabla C_0(T^{-n}(X))$$

となる。ここでは、スタンダード・マップ ($\theta_{t+1} = \theta_t + J_{t+1}$, $J_{t+1} = J_t - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_t)$) をこの T モデルとしてとり、 $n=0$ での濃度勾配は、一様であるとして、 $\nabla C_t(X)$ の振る舞いを数値実験により調べた。

$$\gamma_n(X) \equiv (1/n) \log |\nabla C_n(X)|$$

とし、 $\gamma_n(X)$ の分布を求めた。図1は、 $K=3.86$ において、 $r=0.5$ の線分上の51200個の点 X について $\gamma_n(X)$ のヒストグラム $P(\gamma; n)$ をとり、

$$\psi(\gamma) \equiv -(1/n) \log P(\gamma; n) / P(\bar{\gamma}_n; n)$$

をプロットしたものである(ここで、 $\bar{\gamma}_n$ は、 $P(\gamma; n)$ を、最大とする γ の値)。これは、軌道拡大率のスペクトル $\psi(\Lambda)[1]$ と同様の振る舞いを示す事がわかる(図2参照)。このことは、実験的に、軌道拡大率のスペクトルが、濃度勾配の測定によって求められる事を示唆する、

また、はじめに述べたように、濃度勾配の増大は分子拡散を強める、そのため、流体の混合の度合いのメジャーとして、 $\psi(\Lambda)$ が役立つ可能性も示唆している。今後の課題として、 $\psi(\gamma)$ と混合の関係を明らかにしたい。

前回の講演（８９年１２月）では、 $\Lambda_n(X)$ の定義の際、ヤコビアン行列の最大固有値を用いたが[1]、今回は、不安定多様体に沿った方向の接ベクトルを用いた。このため、 Λ の値として、負の値が許されるようになり新たな側面が見えてきた。図２は、 $K = 3.96$ における $\psi(\Lambda)$ を、示したものである。 $\Lambda < 0$ の領域に直線部分が現れている事がわかる。図３は、これをはっきりと見えるように、 n を小さくし、大きな値の ψ まで見えるようにしたものである。 Λ が負の領域で $\psi(\Lambda) \sim -2\Lambda$ であることがわかる。これは、安定多様体と不安定多様体の homoclinic tangency point によるものである。傾き-2 は理論的に導ける。[2]

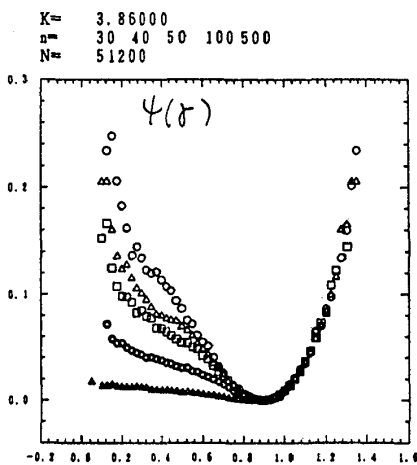


図 1

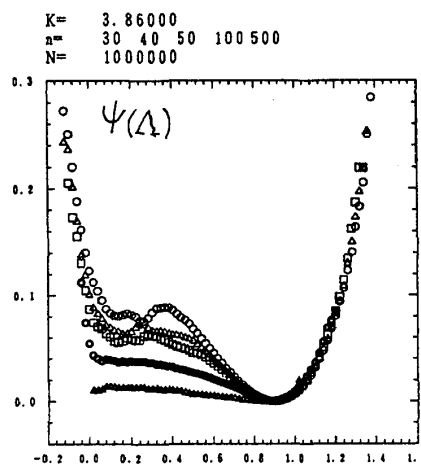


図 2

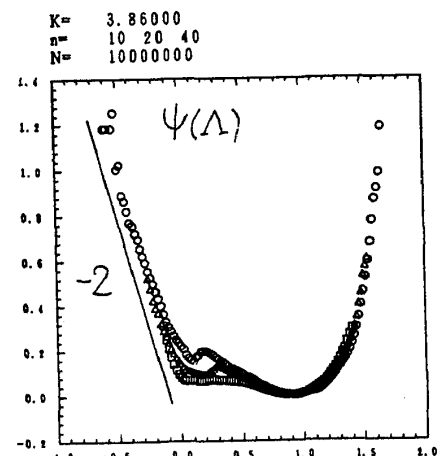


図 3

[1] H.Mori et al. Prog. Theor. Phys. Suppl. 99(1989) 1.

T.Horita et al. Prog. Theor. Phys. 83(1990), 1065.

[2] T.Horita et al. 準備中