

2階線型微分方程式の変形について

東大 理 木村俊房

はじめに.

本稿はこの短期共同研究において話したことにその後分ったことと加えたものである.

2階線型常微分方程式の変形は Painlevé の方程式と深く結びついている. Painlevé の方程式については岡本和夫氏が詳しく書くであろうから省略してもよかつたのであるが, それと変形の関係について書くことにした. その理由は岡本氏と違う記号を用いるかも知れず, また私自身の頭と整理することにある. 個人的理由でパルプを無駄に使うのは気が引けるが, しかし一般の読者にはその方が読みやすいだろう^{という}のが筆者の辯解である.

ある方程式に, たとえば, 変換

$$\lambda = 1 + \varepsilon \lambda_1, \quad t = \varepsilon t_1$$

を行い, 変換された方程式で, λ_1 を λ に, t_1 を t に変えるこ

と簡単には、変換

$$\lambda \longrightarrow 1 + \varepsilon \lambda, \quad t \longrightarrow \varepsilon t$$

を行うと書くことにする。

§1. Painlevé の方程式

動く分岐点をもたない代数的常微分方程式の決定は常微分方程式論における重要な問題の1つである。1階の場合はすでに前世紀中に解決された。2階の場合は、完全に決定されたのは有理的方程式に止まっている。2階有理的方程式の決定後80年たつが、その後この方面での進展は大したことはない。その理由はいろいろあるが、問題が難しいというのが最大の理由であろう。有理的方程式であつても、とにかく2階の方程式が決定されたのは Painlevé の天才的着想によるものである。まず Painlevé の結果と述べておく。

2階微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = R(*, \lambda, \frac{d\lambda}{dt})$$

で R は λ, λ' については有理的、 t については解析的とする。もし (1.1) が動く分岐点をもたなければ、

i) 1階の方程式に帰着されるか、つまり代数的な1積分をもつか、

ii) 3階線型微分方程式に帰着できるが、3階である

iii) 次の6つの方程式のどれかに帰着できる6つの方程式は実際動点分岐点と重ならない。

$$(I) \quad \lambda'' = 6\lambda^2 + t$$

$$(II) \quad \lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha$$

$$(III) \quad \lambda'' = \frac{1}{\lambda} \lambda'^2 - \frac{1}{t} \lambda' + \frac{1}{t} (\alpha \lambda^2 + \beta) + \gamma \lambda^3 + \frac{\delta}{\lambda}$$

$$(IV) \quad \lambda'' = \frac{1}{2\lambda} \lambda'^2 + \frac{3}{2} \lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2 - \alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda}$$

$$(V) \quad \lambda'' = \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right) \lambda'^2 - \frac{1}{t} \lambda' + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2} \left(\alpha \lambda + \frac{\beta}{\lambda} \right) + \frac{\gamma \lambda}{t} + \frac{\delta \lambda (\lambda+1)}{\lambda-1}$$

$$(VI) \quad \lambda'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda' + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \frac{\beta t}{\lambda^2} + \frac{\gamma(t-1)}{(\lambda-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right)$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である。

Painlevé が発見したのは (I) ~ (III) であり、Painlevé の計算に見落としがあることは直ぐに分かる、(IV) ~ (VI) を補足したのはその弟子の Gambier である。しかし、(I) ~ (VI) は Painlevé の方程式と呼ばれる。

Painlevé の方程式の番号付けがややしいものからむすしいものという二にすれば、(III) と (IV) とは番号を交換すべきである。以下では、混乱を承知の上で 番号 (III) と (IV) と交換する ことにした。

Painlevé の方程式に ついて知られたことは $\varepsilon = 2, 3$ まであり、 $\varepsilon = 1$ である。

a) Painlevé の方程式 (V) ~ (I) は次の順序で (VI) から出発し順次退化して行くことをみる:

$$(VI) \rightarrow (V) \begin{cases} \nearrow (IV) \\ \searrow (III) \end{cases} \rightarrow (II) \rightarrow (I)$$

すなわち、矢印の左の方程式に対し、パラメータ ε を含む適当な変換を行い、つぎに $\varepsilon \rightarrow 0$ とするこゝにより矢印の右の方程式が得られる。以下、その変換を記しておく。

$$(VI) \rightarrow (V) : t \rightarrow 1 + \varepsilon t, \quad \gamma \rightarrow -\frac{\delta}{\varepsilon^2} + \frac{\gamma}{\varepsilon}, \quad \delta \rightarrow \frac{\delta}{\varepsilon^2}$$

$$(V) \rightarrow (IV) : t \rightarrow t^2, \quad \lambda \rightarrow 1 + \varepsilon t \lambda, \\ \alpha \rightarrow \frac{\gamma}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon}, \quad \beta \rightarrow -\frac{\gamma}{\varepsilon^2}, \quad \gamma \rightarrow \varepsilon \beta, \quad \delta \rightarrow \varepsilon^2 \delta$$

$$(V) \rightarrow (III) : t \rightarrow 1 + \sqrt{2} \varepsilon t, \quad \lambda \rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \lambda, \\ \alpha \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon^4}, \quad \beta \rightarrow \frac{\beta}{4}, \quad \gamma \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon^4}, \quad \delta \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^4} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2}$$

$$(IV) \rightarrow (II) : t \rightarrow 1 + \varepsilon^2 t, \quad \lambda \rightarrow 1 + 2\varepsilon \lambda, \\ \alpha \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^6}, \quad \beta \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon^6} (1 + 4\alpha\varepsilon^3) \\ \gamma \rightarrow \frac{1}{4\varepsilon^6}, \quad \delta \rightarrow -\frac{1}{4\varepsilon^6}$$

$$(III) \rightarrow (II) : t \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2^{2/3}} t \right), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{2^{1/3}} \lambda \right), \\ \alpha \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^3}, \quad \beta \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^6}$$

$$(II) \rightarrow (I) : t \rightarrow -\frac{6}{\varepsilon^{5/3}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6} t \right), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^{5/6}} (1 + \varepsilon \lambda), \quad \alpha \rightarrow \frac{4}{\varepsilon^{5/2}}$$

b) 変数 μ を適当に導入して, Painlevé の方程式を λ, μ に関する方程式系

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = P(t, \lambda, \mu) \\ \frac{d\mu}{dt} = Q(t, \lambda, \mu) \end{cases}$$

に書き直し, P, Q は次のようにとることからできる.

i) P, Q は λ, μ の多項式で係数は t の有理関数,

ii) (1.2) は Hamilton 系, すなわち,

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = P, \quad -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = Q$$

を満たす関数 $H(t, \lambda, \mu)$ が存在する.

以上のことから, Painlevé の方程式は, それに対応する Hamilton 関数 H から方程式系

$$(1.3) \quad \lambda' = \partial H / \partial \mu, \quad \mu' = -\partial H / \partial \lambda$$

を作り, それから μ を消去すれば得られる. 念のため Hamilton 関数に列挙してあげる.

$$(I): H_I = \frac{1}{2} \mu^2 - (2\lambda^3 + \lambda t)$$

$$(II): H_{II} = \frac{1}{2} \mu^2 - (\lambda^2 + \frac{t}{2}) \mu - \frac{2\alpha+1}{2} \lambda$$

$$(III): H_{III} = 2\lambda \mu^2 - (\lambda^2 + 2t\lambda + 2\theta_0) \mu + \theta_\infty \lambda$$

$$(IV): H_{IV} = \frac{1}{t} [2\lambda^2 \mu^2 - (2\gamma_\infty t \lambda^2 + (2\theta_0 + 1)\lambda - 2\gamma_0 t) \mu + \gamma_\infty (\theta_\infty + \theta_0) t \lambda]$$

$$(V): H_V = \frac{\lambda(\lambda-1)^2}{t} \left[\mu^2 - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\gamma_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} \right) \mu + \frac{1}{4} ((\theta_0 + \theta_1)^2 - \theta_\infty^2) \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \right]$$

$$(VI): H_{VI} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} \left[\mu^2 - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t-1}{\lambda-t} \right) \mu + \frac{1}{4} ((\theta_0 + \theta_1 + \theta_t - 1)^2 - \theta_\infty^2) \frac{1}{\lambda(t-1)} \right]$$

ここで $\theta_0, \theta_1, \dots, \eta_0, \eta_1, \dots$ は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ から次の関係式によって定まる定数である。

$$(III): \alpha = -\theta_0 + 2\theta_\infty + 1, \quad \beta = -2\theta_0^2$$

$$(IV): \alpha = -4\eta_\infty \theta_\infty, \quad \beta = 4\eta_0(\theta_0 + 1), \quad \gamma = 4\eta_\infty^2, \quad \delta = -4\eta_0^2$$

$$(V): \alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2, \quad \gamma = -\eta_1(\theta_1 + 1), \quad \delta = -\frac{1}{2}\eta_1^2$$

$$(VI): \alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta_1^2$$

Painlevé の方程式に対し、それに対する Hamilton 関数は一通りに定まるというわけでない。実際、たとえば (VI) をみると、 $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ はそれぞれ2通りのとり方がある。

Painlevé の方程式に対する方程式系 (1.3) と Painlevé 系とを、同じ番号をつけることにする。上に記した H に対応する Painlevé 系を固本の第1種標準形とよぶことにしよう。

c) Painlevé の方程式について a) で述べたことは Painlevé 系に翻訳される。固本の第1種標準形に対する変換と Hamilton 関数の変化と記しておく。

$$(VI) \rightarrow (V): t \rightarrow 1 + \varepsilon t, \quad \lambda \rightarrow \lambda, \quad \mu \rightarrow \mu$$

$$\theta_0 \rightarrow \theta_0, \quad \theta_1 \rightarrow \frac{\eta_1}{\varepsilon} + \theta_1 + 1, \quad \theta_t \rightarrow -\frac{\eta_1}{\varepsilon}, \quad \theta_\infty \rightarrow \theta_\infty,$$

$$\varepsilon H_{VI} \rightarrow H_V \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

最後の式の意味は H_{VI} に対し上記変換を行い、それに ε を掛けつけたものが $\varepsilon \rightarrow 0$ の時 H_V に収束することである。以下も同様とする。

$$(V) \rightarrow (IV): t \rightarrow t^2, \lambda \rightarrow 1 + \varepsilon t \lambda, \mu \rightarrow \frac{\mu}{\varepsilon t}$$

$$\theta_0 \rightarrow \frac{\gamma_\infty}{\varepsilon}, \gamma_1 \rightarrow \varepsilon \gamma_0, \theta_1 \rightarrow \theta_0, \theta_\infty \rightarrow \frac{\gamma_\infty}{\varepsilon} - \theta_\infty,$$

$$H_V \rightarrow \frac{1}{2t} (H_{IV} + \frac{\lambda \mu}{t}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

$$(V) \rightarrow (III): t \rightarrow 1 + \sqrt{2} \varepsilon t, \lambda \rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \lambda, \mu \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \mu$$

$$\theta_0 \rightarrow \theta_0, \gamma_1 \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon^2}, \theta_1 \rightarrow +\frac{1}{\varepsilon^2} + 2\theta_\infty - \theta_0, \theta_\infty \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2},$$

$$\sqrt{2} \varepsilon (H_V + \frac{1}{4} ((\theta_0 + \theta_1)^2 - \theta_\infty^2)) \rightarrow H_{III} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$(IV) \rightarrow (II): t \rightarrow 1 + \varepsilon^2 t, \lambda \rightarrow 1 + 2\varepsilon \lambda, \mu \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon} \mu$$

$$\theta_0 \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^3} - 2\alpha - 1, \gamma_0 \rightarrow -\frac{1}{4\varepsilon^3}, \gamma_\infty \rightarrow \frac{1}{4\varepsilon^3}, \theta_\infty \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^3}$$

$$\varepsilon^2 (H_{IV} - \gamma_\infty (\theta_\infty + \theta_0)) \rightarrow H_{II} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$(III) \rightarrow (I): t \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon^{3/2}} (1 - \frac{\varepsilon^2}{2^{2/3}} t), \lambda \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} (1 + 2^{1/3} \varepsilon \lambda), \mu \rightarrow \frac{\varepsilon^{1/2}}{2^{1/3}} \mu$$

$$\theta_0 \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon^3}, \theta_\infty \rightarrow -\frac{2\alpha+1}{2}$$

$$2^{-\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} (H_{III} + \frac{2\alpha+1}{2\varepsilon^{3/2}}) \rightarrow H_I \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Painlevé 系 (II) と上のようになす ... 2"

$$\begin{cases} \lambda' = \mu \\ \mu' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha \end{cases}$$

とすれば, 二つから a) と同様に (I) が導かれる.

§2. 動く分岐点を持つた二多項式型 2 連立方程式系

Painlevé によつて動く分岐点を持つた二 2 階有理的方程式が決定された後, 目標は動く分岐点を持つた二高階有理的方程式, 2 階代数方程式, 有理的方程式系の決定へと移

つたのは当然であるが、結果はいずれも極めて不完全なものであった。

有理的 2 連立系

$$(2.1) \quad \begin{cases} \lambda' = P(t, \lambda, \mu) \\ \mu' = Q(t, \lambda, \mu) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} P, Q \text{ は } \lambda, \mu \text{ について有理的, } t \text{ について} \\ \text{解析的} \end{array} \right)$$

と目標とするとき、まず P, Q が λ, μ の多項式の場合から調べるのが自然である。実際 Painlevé 系はそうなっている。

以下、 P, Q は λ, μ の多項式で係数は t の解析関数とする。

P, Q の λ, μ についての次数の大きさを n と m としよう。まず、Painlevé 系に対しては

$$m = 2, 3, 4, 5$$

であり、 P の μ に関する次数は常に 1、 Q の μ についての次数は 0, 1, 2 であることに注意しておく。

お茶の水女子大学の松田千鶴子教授と筆者は m が小さい場合にしらみつぶしに調べてみた。たゞし計算の大半は松田教授による。 $m=5$ のとき、1つの場合が左つく不十分であるが、 $m=2, 3, 4, 5$ ならば、Painlevé 系 (I) ~ (VI) が現われ、それ以外新しい型の方程式系は得られなかった。詳しくいうと、1階の方程式、3階の線型方程式に帰着される場合を除くと、Painlevé 系 (I) ~ (VI) のどれかに帰着してしまうのである。たとえば、 $m=2$ のときには Painlevé 系 (I), (II), (III) が得る

れら.

$m=6$ の場合から次の方程式系

$$(2.2) \begin{cases} \lambda' = \frac{1}{t(t-1)} (3\lambda^4 \mu^2 - 2(a+b+c)\lambda^3 \mu - 2(t+1)\lambda^2 \mu + (ab+bc+ca)\lambda^2 \\ \quad + (dt-d+a+b+c)\lambda + t) \\ \mu' = \frac{1}{t(t-1)} (-4\lambda^3 \mu^3 + 3(a+b+c)\lambda^2 \mu^2 + 2(t+1)\lambda \mu^2 - 2(ab+bc+ca)\lambda \mu \\ \quad - (dt-d+a+b+c)\mu + abc) \end{cases}$$

が得られる. a, b, c, d は定数である. この方程式系

$$H = \frac{1}{t(t-1)} (\lambda^4 \mu^3 - (a+b+c)\lambda^3 \mu^2 - (t+1)\lambda^2 \mu^2 + (ab+bc+ca)\lambda^2 \mu \\ + (dt-d+a+b+c)\lambda \mu + t\mu - abc\lambda)$$

は Hamilton 関数と Hamilton 系である.

変換

$$\lambda \longrightarrow \frac{1}{\mu},$$

$$\mu \longrightarrow a\mu + \mu^2 \lambda \quad (a \text{ は } t, c \text{ でありかえり})$$

によつて, (2.2) は多項式型の方程式系に移ることは松田-木村によつて知られてゐるが, 関本によつて変換された方程式系は Painlevé系(VI)であることが確認された. パラメータの間の関係は次のようである.

$$\theta_0 = -a, \theta_1 = d-a, \theta_t = b+c-d+1, \theta_\infty = c-b.$$

動く分岐点を持つた方程式の決定は 2 段階に命ぜられる. まず, 動く分岐点を持つたための必要条件を求め, そ

れによつて方程式の形をきめて行く。こうして得られた方程式が実際に動く分岐点を持たないことを証明する。Painlevé は必要条件を求めるため、いわゆる“パラメータの導入とその極限化法”を案出した。我々の方法も Painlevé の方法を活用することにある。2階有理的方程式の決定でもそうであつたように、次数 m が小さくても計算は容易でない。長大な計算から得た我々の感觸は、多項式型の系からは Painlevé 系しか得られないであらうということである。

では、有理的の場合はどうであらうか。松田教授は簡単な場合から當つてゐる。

§3. 2階線型微分方程式の変形による Painlevé 系の導出。

Painlevé の方程式の発見さへと同様に、R. Fuchs (Fuchs の理論で有名な L. Fuchs の息子) によつて、まったく違つた観点から Painlevé の方程式 (VI) が導き出された。彼は2階線型方程式

$$(3.1) \quad y'' = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{d}{4(x-\lambda)^2} + \frac{p}{x} + \frac{q}{x-1} + \frac{r}{x-t} + \frac{s}{x-\lambda} \right) y$$

から出発する。この方程式は

$$x = 0, 1, t, \infty$$

に確定特異点をもつ Fuchs 型の方程式で、その Riemann 同式は

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ \frac{1-\theta_0}{2} & \frac{1-\theta_1}{2} & \frac{1-\theta_t}{2} & -\frac{1}{2} & \nu \\ \frac{1+\theta_0}{2} & \frac{1+\theta_1}{2} & \frac{1+\theta_t}{2} & \frac{3}{2} & 1+\theta_\infty \end{array} \right\}$$

である。 $x=0, 1, t, \lambda$ における指数の和はすべて 1 (したがって y' の係数は 0 である), 積はそれぞれ $-a, -b, -c, -\frac{3}{4}$ に等しいことに注意しておく。また, $x=0, 1, t, \lambda, \infty$ における指数の差はそれぞれ ($\pm$ を除いて) $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ である。

$x=\infty$ が確定特異点であることから

$$(3.2) \quad \rho + \sigma + \tau + \omega = 0$$

である。

まず, $x=\lambda$ はみかけの特異点, すなわち, $x=\lambda$ における基本解系に対数項が現れないとする。そのための必要十分条件は

$$(3.3) \quad \rho^2 - \left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{\rho}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda-1} + \frac{\tau}{\lambda-t} \right) = 0$$

である。

この仮定のもとで, R. Fuchs は (3.1) に含まれる λ, t, x と $\rho, \sigma, \tau, \omega, a, b, c$ とを動かしたとき, (3.1) の monodromy 群が不変であるための条件を求めた。そのとき, $x=0, 1, t, \infty$ の指数は mod 1 で不変である。したがって, 解^群の λ 因子で考えれば, a, b, c は定数と見做すことができる。すなわち,

$x=\infty$ の指数が定数であるから

$$(3.4) \quad \sigma + t\tau + \lambda\omega \equiv \kappa \quad (\kappa \text{ は定数})$$

である。(3.2), (3.4) から (3.1) は

$$y'' = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\kappa}{x(x-1)} + \frac{t(t-1)\tau}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\omega}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y$$

と書ける。

R. Fuchs は ω は t の関数として, Painlevé の方程式 (VI) を満たす κ ことを示したのである。彼のアイデアは次のようなものである。

パラメータ $t, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ を含む方程式

$$y'' = p(x, t, \lambda_1, \lambda_2, \dots) y$$

を考える。パラメータ t を動かしたとき、その monodromy 群は t によらな、すなわち他のパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ を t の適当な関数 $\lambda_1 = \lambda_1(t), \lambda_2 = \lambda_2(t), \dots$ とすればよいことも知らな。そのとき、

$$p(x, t) = p(x, t, \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots)$$

とあければ、

$$(3.5) \quad y'' = p(x, t) y$$

が t に依存しない monodromy 群をもつ。そのための条件は (3.5) の基本解系 $\vec{y}(x, t) = (y_1(x, t), y_2(x, t))$ を適当に選んだとき、

$$(3.6) \quad \frac{\partial \vec{y}}{\partial t}(x, t) = A(x, t) \vec{y}(x, t) + B(x, t) \frac{\partial \vec{y}}{\partial x}(x, t)$$

を満たす関数 A, B (x について有理的) が存在することである。

(3.6) と

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial x}(x, t) = p(x, y) \vec{y}(x, t)$$

との完全積分可能条件として, A, B に対する偏微分方程式系が得られる. A は簡単に消去でき, B は

$$(3.7) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} - 2p \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} B + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

を満たさなければならないことが分る。

R. Fuchs は (3.1) の各特異点における標準的基本解の展開式から, B は x について

$$B(x, t) = J \frac{x(x-1)}{x-\lambda} = Jx + K + \frac{L}{x-\lambda}$$

の形であることと確かめ, B と p とを (3.7) に代入し, $p, \sigma, \tau, \omega, J, K, L$ に対する条件を求めた. これから λ は Painlevé の方程式 (VI) を満たし, p, σ, τ, ω は $t, \lambda, d\lambda/dt$ の有理関数であることを示した。

次いで, Garnier は

$$(3.8) \quad y'' = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{bt^2}{(x-1)^4} + \frac{ct}{(x-1)^3} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{t\tau}{x(x-1)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)\omega}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y,$$

$$(3.9) \quad y'' = \left(\frac{at^2}{x^4} + \frac{bt}{x^3} + \frac{\tau}{x^2} + \frac{ct}{x} + dt^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\lambda\omega}{x(x-\lambda)} \right) y,$$

$$(3.10) \quad y' = \left(\frac{a}{x^2} + \frac{\tau}{x} + b + \frac{x^2}{16} + \frac{tx}{4} + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\lambda\omega}{x(x-\lambda)} \right) y,$$

$$(3.11) \quad y'' = \left(x^4 + tx^2 + 2ax + \tau + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\omega}{x-\lambda} \right) y,$$

$$(3.12) \quad y'' = \left(4x^3 + 2tx + \tau + \frac{3}{4} \frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\omega}{x-\lambda} \right) y$$

を考え, (3.6), λ について (3.7) とみよす B の存在と仮定して, Painlevé の方程式 (V) ~ (I) と導いた. Garnier は §1, a) で述べた Painlevé (VI) から (V) ~ (I) と導いた変換を利用して (3.1) から (3.8) ~ (3.12) と導いた^{その}と想像される.

方程式 (3.8) ~ (3.12) はやはり Fuchs 型ではなく, 不確定特異点をもつが, そのとき, (3.6) を満たす A, B の存在の意味と Garnier は何も書かないから, 彼は形式的に Fuchs のまねをしたのかも知れない. その意味をはつきり述べたのは岡本氏である. すなわち, 彼は, (3.6) とみよす A, B の存在は monodromy 群の不変性だけではなく, 不確定特異点での Stokes の接続行列の不変性を加えたものと同値であることを示した.

Fuchs と Garnier も λ へのみ注目して Painlevé の方程式を得たが, その一歩前の λ と ω に対する方程式系に注意すると, それは Hamilton 系である. その Hamilton 関数は τ (τ は $x=\lambda$ がみかけの特異点であることから, t, λ, ω の関数となる) と少し変形したものである.

方程式 (3.8) ~ (3.12) の Riemann 図式を並べておこう.

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \overbrace{-\sqrt{b}t}^1 & \lambda & \infty & \\ \frac{1-\theta_0}{2} & \frac{c}{2\sqrt{b}} + 1 & -\frac{1}{2} & \nu & \\ \frac{1+\theta_0}{2} & \sqrt{b}t & -\frac{c}{2\sqrt{b}} + 1 & \frac{3}{2} & \nu + \theta_\infty \end{array} \right\}$$

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \lambda & \infty \\ \overbrace{-\sqrt{a}t}^0 & -\frac{1}{2} & \overbrace{-\sqrt{d}t}^0 + \frac{c}{\sqrt{d}} \\ \sqrt{a}t & \frac{3}{2} & \sqrt{d}t - \frac{c}{\sqrt{d}} \end{array} \right\}$$

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & \overbrace{-\frac{1}{8} - \frac{t}{2}}^\infty & b + \frac{1}{2} & \\ \frac{1-\theta_0}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{t}{2} & -b + \frac{1}{2} \\ \frac{1+\theta_0}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} & \frac{t}{2} & -b + \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & \overbrace{-\frac{1}{3} \quad 0 \quad -\frac{t}{2}}^\infty & a+1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{t}{2} & -a+1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{t}{2} & -a+1 \end{array} \right\}$$

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & \overbrace{-\frac{4}{5} \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{\infty *} & -t & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t & \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

こゝで

$$\begin{array}{cc} \overbrace{a \quad b}^0 & \overbrace{a \quad b \quad c}^\infty \\ a' \quad b' & a' \quad b' \quad c' \end{array}$$

正にこの記号は福原によつておこす、 $x=0$ で形式解

$$e^{\frac{a}{x}} x^b \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad e^{\frac{a'}{x}} x^{b'} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha'_k x^k$$

と $\gamma = 2$, $x = \infty$ で形式解

$$e^{ax^2+bx} x^{-c} \sum \alpha_k x^{-k}, e^{a'x^2+b'x} x^{-c'} \sum \alpha'_k x^{-k}$$

と $\gamma = 2$ と示してゐる。最後の

$$\begin{array}{cccccc} & \infty x & & & & \\ \hline -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \pm & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \pm & \frac{3}{4} \end{array}$$

は $x = \infty$ で形式解

$$e^{-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} \pm x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{3}{4}}, e^{\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} \pm x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{3}{4}}$$

と持つことは示してゐる。

(3.8) ~ (3.12) に対応する B の形は次の通りである。

$$(3.8) \quad B = J \frac{x(x-1)}{x-\lambda} = Jx + K + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$(3.9) \quad B = Jx + K + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$(3.10) \quad B = K + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$(3.11) \quad B = \frac{L}{x-\lambda}$$

$$(3.12) \quad B = \frac{L}{x-\lambda}.$$

§4. 図本による修正

まず、次のことに注意しよう。方程式

$$(4.1) \quad y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

は変換

$$y \longrightarrow y \exp\left(-\int \frac{p_1}{2} dx\right)$$

に ↓ 2

$$y'' = p y$$

に移る. z, z''

$$(4.2) \quad p = \frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2 - p_2.$$

p_1, p_2 が λ の $x-t$ 平面に含み, (4.1) の monodromy 群 M があり Stokes の接続行列が t により与えられる, やはり

$$(4.3) \quad \frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = A \vec{y} + B \frac{\partial \vec{y}}{\partial x}$$

を満たす $\vec{y}, A, B$ が存在する. (4.1) と (4.3) との完全積分可能条件から A を消去すれば, 当然ながら, p は (4.2) で定義される, (3.7) が得られる.

図本氏は方程式 (3.1) の代りに, その Riemann 図式が

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_t & 2 & \nu + \theta_\infty \end{array} \right\}$$

となる方程式を考えた. z は

$$y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{1-\theta_1}{x-1} + \frac{1-\theta_t}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda} \right) y' + \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y = 0$$

と書かれる. z, z''

$$\kappa = \frac{1}{4} \left((\theta_0 + \theta_1 + \theta_t - 1)^2 - \theta_\infty^2 \right),$$

二、で変形を行うと、まさに Painlevé 系 (VI) が得られ、H は
その Hamilton 関数 である ことに気付いたのである。この
線型方程式も (VI) で表わす ことにする。

これに対応する ことが Painlevé 系 (V) ~ (I) に対して 成
り立つ のである。線型方程式とその Riemann 図式を書き上げ
ておこう。

$$(V): y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{\gamma_1 t}{(x-1)^2} + \frac{1-\theta_1}{x-1} - \frac{1}{x-\lambda} \right) y' \\ + \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{tH}{x(x-1)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \lambda & \infty & \\ 0 & \underbrace{0 \quad 0} & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \gamma_1 t & \theta_1 + 1 & 2 & \nu + \theta_\infty \end{array} \right\}$$

$$\kappa = \frac{1}{4} ((\theta_0 + \theta_1)^2 - \theta_\infty^2).$$

$$(IV): y'' + \left(\frac{\gamma_0 t}{x^2} + \frac{1-\theta_0}{x} - \gamma_\infty t - \frac{1}{x-\lambda} \right) y' \\ + \left(\frac{\gamma_\infty (\theta_\infty + \theta_0)t}{2x} - \frac{tH + \lambda\mu}{2x^2} + \frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & \infty & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_\infty + \theta_0}{2} & \\ \gamma_0 t & \theta_0 + 1 & 2 & \gamma_\infty t & \frac{\theta_\infty - \theta_0}{2} \end{array} \right\}$$

$$(III): y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} - \frac{x}{2} - t - \frac{1}{x-\lambda} \right) y' + \left(\frac{\theta_\infty}{2} - \frac{H}{2x} + \frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & \infty & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\theta_\infty \\ \theta_0 & 2 & \frac{1}{4} & t & -\theta_\infty - \theta_0 + 1 \end{array} \right\}$$

$$(II): \quad y'' - \left(2x^2 + t + \frac{1}{x-\lambda}\right)y' + \left(-(2\alpha+1)x - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right)y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ 0 \\ 2 \end{array} \quad \overbrace{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & t & -\alpha + \frac{1}{2} \end{array}}^{\infty} \right\}$$

$$(I): \quad y'' - \frac{1}{x-\lambda}y' + \left(-4x^3 - 2tx - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right)y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ 0 \\ 2 \end{array} \quad \overbrace{\begin{array}{ccccc} -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t \end{array}}^{\infty *} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

線型方程式 (VI) ~ (II) は線型方程式 (3.1), (3.8) ~ (3.11) とある意味で規格化したものである。しかし、規格化は1通りとは限らない。たとえば、(II) として

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ 0 \\ 2 \end{array} \quad \overbrace{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -t & -\alpha + \frac{1}{2} \end{array}}^{\infty} \right\}$$

に対応する方程式ととることもできる。もちろん、この方程式は (II) から変換

$$y \longrightarrow y \exp\left(-\frac{2}{3}x^3 - tx\right)$$

で得られる。

方程式 (I) は規格化されていない。無理にしようとしても係数は x の分数中に表われる。

Painlevé 系 (V) ~ (II) は (VI) から順次得られるように、同じ変換で線型方程式 (V) ~ (II) は (VI) から得られる。ところで

λ に対応する変換を λ に t 行かなくては行けない。

§5. みかけの特異点における指数の差を大きくするにと。

線型方程式 (VI) ~ (I) において, みかけの特異点で指数はすべて 0, 2 であつた。これを 0, $n+1$ として変形が可能であらうか。パルゾと惜ます, 線型方程式とその Riemann 図式と書いておく。

$$(VI)_n: y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{1-\theta_1}{x-1} + \frac{1-\theta_t}{x-t} - \frac{n}{x-\lambda} \right) y' + \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_t & n+1 & \nu + \theta_\infty \end{array} \right\},$$

$$\kappa = \frac{1}{4} ((\theta_0 + \theta_1 + \theta_t - 1) - \theta_\infty^2).$$

$$(V)_n: y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} + \frac{\gamma_1 t}{(x-1)^2} + \frac{1-\theta_1}{x-1} - \frac{n}{x-\lambda} \right) y' + \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{tH}{x(x-1)^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \overbrace{1} & & \lambda & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ \theta_0 & \gamma_1 t & \theta_{t+1} & n+1 & \nu + \theta_\infty \end{array} \right\}$$

$$\kappa = \frac{1}{4} ((\theta_0 + \theta_1)^2 - \theta_\infty^2).$$

$$(IV)_n: y'' + \left(\frac{\gamma_0 t}{x^2} + \frac{1-\theta_0}{x} - \gamma_\infty t - \frac{n}{x-\lambda} \right) y' + \left(\frac{\gamma_\infty(\theta_\infty + \theta_0)t}{2x} - \frac{tH + \lambda\mu}{2x^2} + \frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \overbrace{0}^{\lambda} & & \overbrace{\infty}^{\lambda} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_\infty + \theta_0}{2} \\ \gamma_0 t & \theta_0 + 1 & n+1 & \gamma_\infty t & \frac{\theta_\infty - \theta_0}{2} - n+1 \end{array} \right\}$$

$$(III)_n: y'' + \left(\frac{1-\theta_0}{x} - \frac{x}{2} - t - \frac{n}{x-\lambda} \right) y' + \left(\frac{\theta_\infty}{2} - \frac{H}{2x} + \frac{\lambda\mu}{x(x-\lambda)} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \lambda & \overbrace{\infty}^{\lambda} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_\infty \\ \theta_0 & n+1 & \frac{1}{4} & t & -\theta_\infty - \theta_0 - n+2 \end{array} \right\}$$

$$(II)_n: y'' - \left(2x^2 + t + \frac{n}{x-\lambda} \right) y' + \left(-(2\alpha+1)x - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda} \right) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & \overbrace{\infty}^{\lambda} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{2} \\ n+1 & \frac{2}{3} & 0 & t & -\alpha - n + \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

$$(I)_n: y'' - \frac{n}{x-\lambda} y' + (-4x^3 - 2tx - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}) y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & \overbrace{\infty^*}^{\lambda} & & & \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{1}{4} \\ n+1 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & t & \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

2-で次の注意としておく. $(VI)_n$ は Fuchs 型であるから Fuchs の関係式により, 指数の総和は 3 である. $(V)_n \sim (II)_n$ に対し 2^番形式解 (確定特異点ではもちろん収束) に表わされるべきの総和はやはり 3 である. これは Fuchs-福原の関係式である.

$x = \lambda$ のみかけの特異点であるという条件から, t, λ, μ , H の間に 1 つの関係式が成り立つ. H を t, λ, μ の関数とみ
 るとき, $n=1$ ならば H は λ, μ の多項式であり, $n=2$ ならば
 H は λ, μ の有理式である. しかし $n \geq 3$ ならば H は t, λ
 μ の代数関数となる.

一般の n に対しては計算が大変なので, $n=2$ の場合と
 考える. 結論をいうと,

変形可能で, λ, μ は H を Hamilton 関数とする Hamilton
 系を満す,
 となる.

そのとき, H は次のように与えられる.

$$(VI)_2: H = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} \frac{S}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\theta_1}{\lambda-1} - \frac{\theta_t}{\lambda-t}},$$

$$\begin{aligned} S = & \frac{\mu^3}{4} + \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4} \frac{1}{\lambda-1} - \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda-t} \right] \mu^2 \\ & + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t} \right)^2 - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t} \right) \frac{1}{\lambda-t} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_0}{\lambda^2} + \frac{\theta_1}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_t}{(\lambda-t)^2} \right) + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda-t)^2} \right] \mu \\ & - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} + \frac{\theta_t}{\lambda-t} \right) \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \end{aligned}$$

$$(V)_2: H = \frac{\lambda(\lambda-1)^2}{t} \frac{S}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} - \frac{\theta_1+1}{\lambda-1}},$$

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{\mu^3}{4} - \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} \right) \right] \mu^2 \\
 & + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_0}{\lambda^2} - \frac{2\eta_1 t}{(\lambda-1)^3} + \frac{\theta_1}{(\lambda-1)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)} - \frac{2}{(\lambda-1)^2} - \frac{2}{\lambda-1} \right] \mu \\
 & - \left(\frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} \right) \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)}.
 \end{aligned}$$

$$(IV)_2 : H = \frac{2\lambda^2}{t} \frac{S}{\mu + \frac{\eta_1 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0 + 1}{\lambda} - \eta_\infty t}$$

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{\mu^3}{4} - \left[\frac{3}{4} \left(-\frac{\eta_1 t}{\lambda^2} + \frac{\theta_0 + 1}{\lambda} + \eta_\infty t \right) \right] \mu^2 \\
 & + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\eta_0 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0}{\lambda} + \eta_\infty t \right)^2 - \left(\frac{\eta_0 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0}{\lambda} - \eta_\infty t \right) \frac{1}{2\lambda} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{2\eta_0 t}{\lambda^3} - \frac{\theta_0}{\lambda^2} \right) + \frac{2}{\lambda^2} \right] \mu \\
 & + \left(\frac{\eta_0 t}{\lambda^2} - \frac{\theta_0}{\lambda} - \eta_\infty t \right) \frac{\eta_\infty (\theta_\infty + \theta_0) t}{2\lambda}
 \end{aligned}$$

$$(III)_2 : H = \frac{2\lambda S}{\mu - \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} - t}$$

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{\mu^3}{4} - \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} + t \right) + \frac{1}{4\lambda} \right] \mu^2 \\
 & + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} + t \right)^2 + \frac{\theta_0}{2\lambda^2} + \frac{\theta_\infty}{2} - \frac{1}{4} \right] \mu \\
 & - \frac{\theta_\infty}{2} \left(\frac{\theta_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} + t \right) + \frac{\theta_\infty}{2\lambda}
 \end{aligned}$$

$$(II)_2 : H = \frac{S}{2(\mu - 2\lambda^2 - t)}$$

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{\mu^3}{4} - \frac{3}{4} (2\lambda^2 + t) \mu^2 + \left(\frac{1}{2} (2\lambda^2 + t)^2 - 2\lambda - 2\alpha - 1 \right) \mu \\
 & + (2\alpha + 1) (2\lambda^3 + t\lambda - 1)
 \end{aligned}$$

$$(I)_2: H = \frac{\mu^2}{8} - (2\lambda^3 + t\lambda) - \frac{6\lambda^2 + t}{\mu}.$$

次上のことを検証するためには、まず、線型方程式 $(VI)_2 \sim (I)_2$ を

$$(5.1) \quad y'' = p y,$$

$$p = \left(\frac{2}{(x-\lambda)^2} + \dots + \frac{\omega}{x-\lambda} \right)$$

の形に変形する。次に B を

$$B = \begin{cases} Jx + K + \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M}{(x-\lambda)^2} & ((VI)_2, (V)_2, (IV)_2 \text{ に対して}) \\ K + \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M}{(x-\lambda)^2} & ((III)_2 \text{ に対して}) \\ \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M}{(x-\lambda)^2} & ((II)_2, (I)_2 \text{ に対して}) \end{cases}$$

とおき、(3.7) に代入する。それを整理して、 λ, ω に対する方程式を導く。その方程式系が Hamilton 系であることは λ, μ と λ, ω との間の関係などを使い、 $(VI)_2 \sim (I)_2$ と導けばよい。

計算は $(I)_2 \sim (III)_2$ は比較的楽であるが、 $(IV)_2$ から $(VI)_2$ へかけてかなり面倒となる。

Painlevé 系 (VI) から順次 $(V) \sim (I)$ が導かれたように、方程式系 $(VI)_2$ から順次 $(V)_2 \sim (I)_2$ が導かれる。その変換は Painlevé 系のとまったく同様である。それに対応する変換で線型方程式 $(VI)_2$ から線型方程式 $(V)_2 \sim (I)_2$ が導

かれる。

n が 2 より大きい場合, 同様なことが成り立つことと計算で確かめようとするは大変である。予想をける述べておく。

$(VI)_n \sim (I)_n$ と (5.1) と変換し,

$$B = \begin{cases} Jx + K + \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{(x-\lambda)^k} & ((VI)_n, (V)_n, (IV)_n \text{ に対し}) \\ K + \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{(x-\lambda)^k} & ((III)_n \text{ に対し}) \\ \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{(x-\lambda)^k} & ((II)_n, (I)_n \text{ に対し}) \end{cases}$$

とあき, (3.7) から λ, ω に対する Hamilton 系が得られる。
 二から, λ, μ に対する Hamilton 系 $(VI)_n \sim (I)_n$ が導かれる。Hamilton 関数は H_2 , $n \geq 3$ は H_5 , H は λ, μ の代数関数である。

このことから $(I)_3$ に対しが成り立つことを確かめるのはそう面倒ではない。

§6. 今後の問題

前節の予想が正しいとすれば, Hamilton 系の 6 個の無限系列

$$(VI)_n, (V)_n, \dots, (I)_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

が得られる。 $n=1$ のとき, これは Painlevé 系で多項式型である。 $n=2$ のときは, 有理的である。

もし $(VI)_2$ が動く分岐点をもたなければ—— *Panduro*
系 (VI) から類推でそう思い込めるが、—— $(I)_2$ も動く分岐
点を持たないことになる。しかし、 $(I)_2$ は動く分岐点を持つ
可能性が大きい。もし、持つとすれば、

(i) $(VI)_n, \sim (I)_n$ は動く分岐点をもたない
という命題は $n=1$ のときにのみ正しく、 $n=2$ になると
そのときは、(i) を弱めた命題と考へねばならぬ。その條
補して、

(ii) $(VI)_n \sim (I)_n$ は動く分岐点を持つが、それは代数的
でしかも有限個である

(iii) 動く分岐点は代数的で、そのまわりで有限多面体
ある。

(iv) 動く分岐点は代数的である。

等と考へておいてよい。さらに、これらの性質が n とどう
関係するかなども問題である。

いずれにしても、 $(I)_2$ から調べていくしかない。

あとがき

本稿に書かれた式は筆者の不注意による間違いが多いかも知れないが、御了承を乞う次第である。

なお、 $(V)_n$ には現れるパラメータ θ_0 は、 θ_0 と
26 θ_0 と $(IV)_n$ に現れる

$\sqrt{B_1-1}$

B_0-1 であまかえた方がよかったかも知れない。後から気がつ
いたので、そのままにしておいた。