

ネットワークとマトロイド

北大 木下 循

内容 Capacity にマトロイド的な制限を持つネットワークについての $\max$ -flow $\min$ -cut 定理の解説。

定義

$\text{Map}(E, \mathbb{Z}^+)$ で E から $\mathbb{Z}^+$ への写像全体からなる集合を表わす。(ただし $\mathbb{Z}^+$ は非負整数全体の集合。)

$\varphi, \psi \in \text{Map}(E, \mathbb{Z}^+)$ について $\varphi \leq \psi \stackrel{\text{def.}}{\iff} \varphi(a) \leq \psi(a)$
($\forall a \in E$), また $\|\varphi\| := \sum_{a \in E} \varphi(a)$ と定義する。(ただし E は有限集合とする。)

定義 (integral) polymatroid ;

有限集合 E と $\mathcal{F} \subseteq \text{Map}(E, \mathbb{Z}^+)$ への組 $(E, \mathcal{F}) =: M$ が次を満たすとき M を (E 上の, independent vectors $\mathcal{F}$ を持つ) polymatroid と言う。

i) 0 の写像は $\mathcal{F}$ に含まれる。

ii) $\varphi \in \mathcal{F}$, $\psi \leq \varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{F}$ 。

iii) 任意の $\varphi_0 \in \text{Map}(E, \mathbb{Z}^+)$ について,

$$\mathcal{F}_{\varphi_0} := \{ \varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \leq \varphi_0 \}$$

とおくと $\mathcal{F}_{\varphi_0}$ のすべての極大元 φ についての $\|\varphi\|$ は一定。(この一定の値を M の φ_0 における rank と言いい $\text{rank}(\varphi_0)$ で表す。)

ここではさうに便宜上 $\max_{\varphi \in \mathcal{F}} \|\varphi\| < \infty$ を仮定する。

polymatroid $M = (E, \mathcal{F})$ が特に $\forall \varphi \in \mathcal{F}$, $\forall a \in E$ について $\varphi(a) \leq 1$ を満たすとき M はマトロイドと言う。この場合 $\varphi \in \text{Map}(E, \mathbb{Z}^+)$, $\varphi(a) \leq 1$ ($\forall a \in E$) と $\{ a \in E \mid \varphi(a) = 1 \}$ を同一視することにより $\mathcal{F}$ は E の部分集合の族と考えるとよい。

$\varphi_0 \in \text{Map}(E, \mathbb{Z}^+)$ に対して $\langle \varphi_0 \rangle := \{ \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \}$,
 $M \langle \varphi_0 \rangle := (E, \langle \varphi_0 \rangle)$ と置く。 $M \langle \varphi_0 \rangle$ はポリマトロイドとなる。

以下ではネットワークの概念を拡張することを目指す。
 有限集合 V (点集合) ($|V| = n$ とおく) と V 上の $2n$ 個の
 ポリマトロイドの族 (*capacity*)

$$\Pi^+ := \{ (V, \mathcal{F}_a^+) \}_{a \in V}, \quad \Pi^- := \{ (V, \mathcal{F}_a^-) \}_{a \in V},$$

の組 $G = (V, \Pi^+, \Pi^-)$ を考える。この時 G の independent graph
 2

(with capacity) で次の条件を満たす $\varphi \in \text{Map}(V \times V, \mathbb{Z}^+)$ (或いは組 (V, φ)) を意味することにする。

「 $\forall a \in V$ に対し, $\varphi(a, \cdot) \in \mathcal{F}_a^+$, $\varphi(\cdot, a) \in \mathcal{F}_a^-$ 。」

次に source, 及び sink と呼ばれる特別な2点 $c, d \in V$ を固定する。

G の (independent) flow (from c to d) とは, G の independent graph φ でさらに $\forall a \in V, a \neq c, d$ について $\|\varphi(c, \cdot)\| = \|\varphi(\cdot, c)\|$ を満たすものを言う。 φ の value $w(\varphi)$ を $w(\varphi) := \|\varphi(c, \cdot)\| - \|\varphi(\cdot, c)\|$ で定める。(これは $\|\varphi(\cdot, d)\| - \|\varphi(d, \cdot)\|$ に等しい。)

$V = A \dot{+} B$, $A \ni c$, $B \ni d$ なる分割 (cut) に対して, capacity $C(A, B)$ を次のように定める; G の independent graph φ で $\varphi|_{A \times A} = \varphi|_{B \times B} = \varphi|_{B \times A} = 0$ を満たすもの全体の集合を $\mathcal{P}$ とする。このとき

$$C(A, B) := \max_{\varphi \in \mathcal{P}} \|\varphi\|$$

と置く。

定理 (max-flow, min-cut theorem):

$$\max_{\varphi: \text{flow}} w(\varphi) = \min_{\substack{A \dot{+} B = V \\ A \ni c \\ B \ni d}} C(A, B)$$

応用例, 2部グラフに関するある命題。

(言葉が簡単になるので) - 応用デザインの言葉を使って説明する。

1デザイン $D = (P, B)$ (P_i 点の集合, B ; 辺の集合) を

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_s$$

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_t$$

と分割した場合 (P_i, B_j) について D から導かれる結合関係が簡単になる場合を考える。例えば一番単純な場合として次の $(*)$ の性質が考えられる。

$(*) \forall i, j, \forall a \in P, \forall A \in B$ について次が成立。

$$|a \cap B_j| \leq 1$$

$$|A \cap P_i| \leq 1.$$

命題

正の整数 $m, n, r, s, \chi_1, \dots, \chi_s, y_1, \dots, y_t$, (ただし, $m = n$) を与える。次のような性質を持つパラメータ m, n, r, s の 1デザイン $D = (P, B)$ が存在するための必要十分条件は下の $(**)$ が成立することである。

「(性質)

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_s, \quad |P_i| = \chi_i$$

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_t \quad |B_j| = y_j$$

なる性質(*)を持つような分割が存在する。」

$$(*) \quad \forall \varphi \in \text{Map}(\{1, \dots, s\}, \mathbb{Z}^+), \quad \varphi(i) \leq x_i \\ \varphi \in \text{Map}(\{1, \dots, t\}, \mathbb{Z}^+), \quad \varphi(j) \leq y_j$$

により成立。

$$ux + \sum_{i,j} \min(\varphi(i), \varphi(j)) - x \sum_i \varphi(i) - y \sum_j \varphi(j) \geq 0$$

(i) 次のようなグラフ (V, Γ^+, Γ^-) ($\Gamma^+ = \{(V, \mathcal{F}_a^+)\}_{a \in V}$, $\Gamma^- = \{(V, \mathcal{F}_a^-)\}_{a \in V}$) により定理を適用する。

$$V = \{c\} + \{d\} + \{a_1^1, \dots, a_{x_1}^1\} + \dots + \{a_1^s, \dots, a_{x_s}^s\} \\ + \{b_1^1, \dots, b_{y_1}^1\} + \dots + \{b_1^t, \dots, b_{y_t}^t\}$$

source c , sink d .

$$\mathcal{F}_c^- = \{\phi\}, \quad \mathcal{F}_c^+ = \langle \psi \rangle \quad (\psi(a_i^1) = k, \psi(b_i^{j'}) = \psi(d) = 0)$$

$$\mathcal{F}_d^+ = \{\phi\}, \quad \mathcal{F}_d^- = \langle \psi \rangle \quad (\psi(a_i^1) = \psi(c) = 0, \psi(b_i^{j'}) = r)$$

$$\mathcal{F}_{a_i^1}^+ = \{X \subseteq \{b_{e_1}^1, \dots, b_{e_t}^t\} \mid 1 \leq e_i \leq y_i\}, \quad \mathcal{F}_{a_i^1}^- = \{\phi, \{c\}\},$$

$$\mathcal{F}_{b_i^{j'}}^+ = \{X \subseteq \{a_{e_1}^1, \dots, a_{e_s}^s\} \mid 1 \leq e_i \leq x_i\}, \quad \mathcal{F}_{b_i^{j'}}^- = \{\phi, \{d\}\}.$$

$(V, \mathcal{F}_a^\pm)$ が マトリクスになる部分では $\mathcal{F}_a^\pm$ は集合族として表わしてある。