

2-dimensional developmental system における二、三の 決定問題

京大 理 生物物理

三島俊雄

西尾英之助

1. まえがき *developmental system* を考えるのは、例えば生物における形態形成・発生現象の記述において、*generative* な記述であるが故に、それ以外の記述法よりも、何らかの意味で、（例えば、単に記述が簡単になるということでもよいが）利点があるのではないかという期待もあるのかも知れない。ここでは、J. W. Carlyle, S. A. Grubb, A. Paz の提起した、細胞が二分裂することにより成長する、二次元 *developmental system* について、おもに、次の二種のことを考えた。*pattern* を生成する *production rule* のうちで、いろいろの意味で最も簡単なものをみつけることができるということ。*production rule* と *initial pattern* が与えられると、*pattern* の成長の系列がきまる筈であるが、その系列が種々の性格を持つかどうかを決定することが可能であるかどうか。この二種のことについてである。後者については、ここであつた問題は、可

解でないという結論を得た。developmental system が Turing Machine を simulate できるほど、強力なものであれば、おおむねこのような決定問題は可解でない、ということがわかる。前者については、developmental system で何か現実的なものを simulate しようと思ったとき、細胞に付与した属性に現実的解釈を与えることになるだろうが、production rule に対しても、その現実在即するように制約を課することになる。ここでは、production rule のうちで簡単なものをみつけるという問題を、問題にした訳である。尚、論文(1)と比較して、cell の近傍数に関する制限を外した点のみ異なっていることを注意しておく。

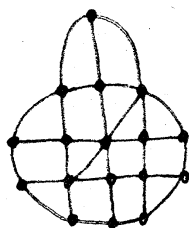
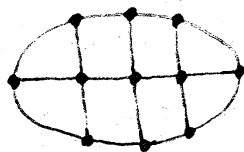
2. 2-dimensional developmental systems (C.G.P. model)

平面連結グラフで次のようなものを skeleton という。

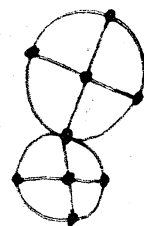
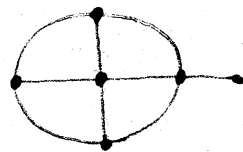
graph の各 vertex の次数は 3 以上であり、Boundary cycle (graph のすべての vertex edge が、その cycle 上またはその cycle 内にあるような cycle) が存在し、その cycle のたどる vertex を除くと、それ以外の vertex については、その vertex に接続する edge はすべて、その cycle 上または内部にあるような cycle は、Boundary cycle 以外には存在しない、という条件を満たす graph。cycle は閉じた path で、同じ vertex を二度以上

は通らないものをいう。

図1 skeletonの例



skeletonでない例



分割された領域を cell といい、外部を外界という。skeleton は、有限個の cell から構成されていると考えてもよい。 skeleton S は cell が分裂することによって、別の skeleton S' になる。それを $S \rightarrow S'$ とかく。skeleton の遷移をあらわす diagram (図2) を skeleton (transition) diagram A といい。ここで注意したいのは、任意の skeleton は、 $\bigcirc$ から、cell が適当に二分裂をくりかえすことによって、生成されうるといふことである。

図2 skeleton diagram A

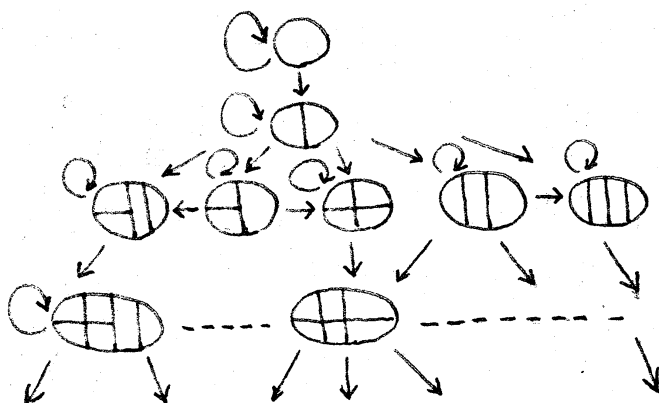
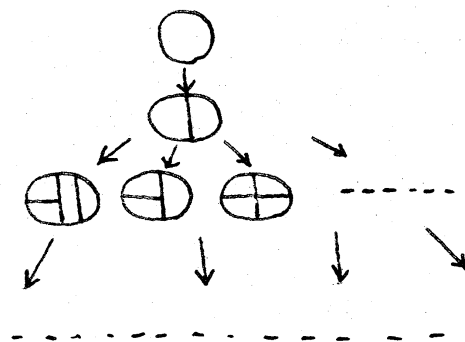


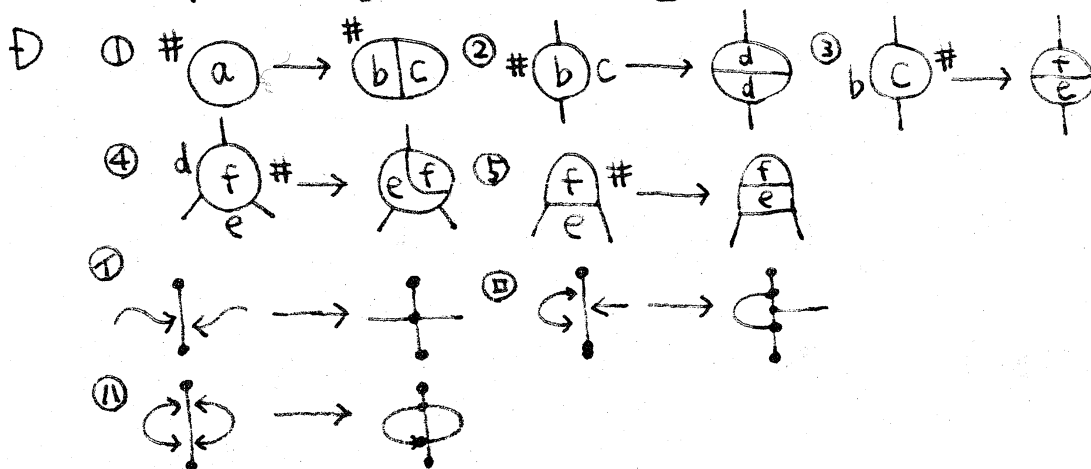
図3 skeleton diagram B



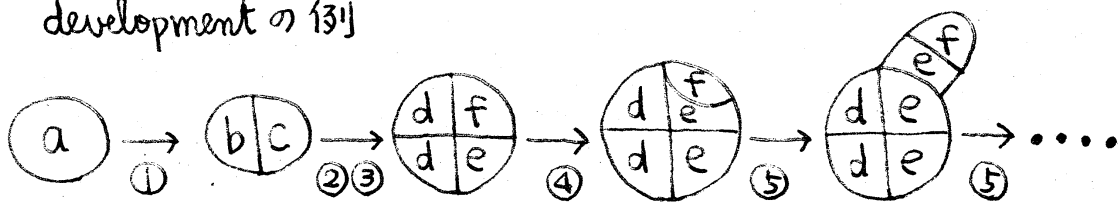
Σ は cell の属性の集合をあらわす。skeleton 中の cell の各々には、この Σ の要素を、その属性として付与したものを、pattern と呼ぶ。外界は $\#$ で表わす。pattern P は、production rule D に

したがって、 P' に変化する。これを $P \xrightarrow{D} P'$ とかく。initial pattern を P_0 とすれば、 $\langle P_0, D \rangle$ を developmental system といい、pattern P 中の cell の各々は、分裂したり、その属性をかえたりして成長していくのであるが、cell の分裂、属性をかえろは、その cell のその時点での属性、および、そのまわりの cell のその時点での属性に関連してきまる。きまるという意味は、分裂するとすると、次なる pattern における、その cell から生成される二つの cell の属性、および、分裂壁の方向がきまり、また分裂しないとすると、次なる pattern P' におけるその cell の新しい属性がきめられるということである。次なる pattern P' の cell の属性、分裂壁の方向がきまれば、edge の editing に関する rule にしたがって、pattern P' が確定することになる。このような cell の分裂・状態遷移規則、edge の editing rule をまとめて production rule と呼ぶのである。

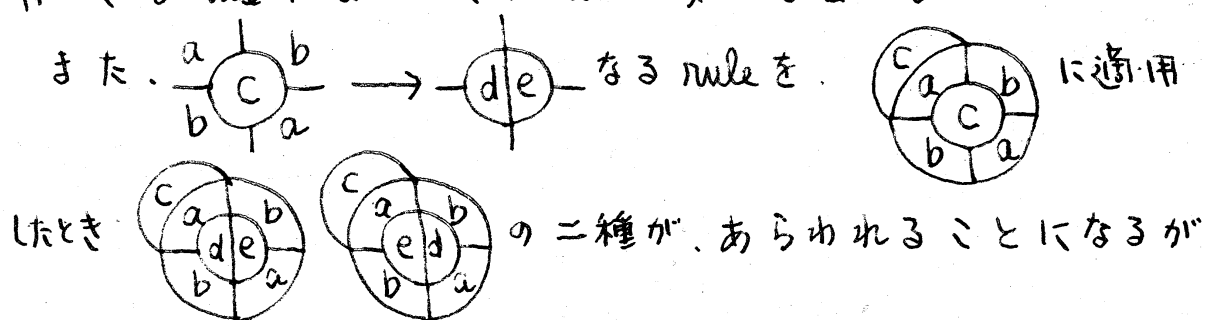
図4 developmental system の例 $\langle \#a, D \rangle$



development の例



このように、development においては、production ruleのうち、適用できる rule はひとつとく同時に適用するものとする。適用できる rule がないとき、cell は変化しない。



このようなことを ambiguity が生じるといふ。pattern P に対し、 P の skeleton を $\bar{P}$ で表わすことにする。skeleton S , pattern P の cell 数を、それぞれ、 $\#(S)$, $\#(P)$ であらわす。

3. 簡単な production rule を求める問題

production rule D と pattern P, P' について、次のような pattern 系列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ が存在するとき、 $P \xRightarrow{D} P'$ とかく。

$$P \xrightarrow{D} P_1 \xrightarrow{D} P_2 \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} P_n \xrightarrow{D} P'$$

[命題 1] pattern P, P' について、 $P \xRightarrow{D} P'$ とするような production rule D が存在するか否かは 判定可能である。

また、production rule D も構成できる。

[証明] skeleton diagram A において、 $\bar{P} \rightarrow S_1 \rightarrow \cdots \rightarrow S_k \rightarrow \bar{P}'$ となるような skeleton path が存在すれば、production rule D は、 $S_1, \dots, S_k$ の cell に属性を与えることにより、自然に求められる。ambiguity をさけるためには、あらわれる cell の属性がすべて異なるようにすればよい。Q.E.D.

以後 initial pattern を $\textcircled{a}$ とし固定し、 P_A とかくことにする。skeleton diagram A において、 $\bigcirc$ から最小 k step で到達できる skeleton の rank を k ということにする。例えば  は rank 2 である。skeleton diagram A から、同一 rank 間の矢印を除いた diagram を、skeleton (transition) diagram B とする。(図3)

[命題2] pattern P が与えられたとき、その pattern を導出する step 数を最小にするような production rule D は、skeleton diagram B をもとに、構成できる。

[証明] $\bar{P}$ を skeleton diagram B においてさがし、 $\bar{P}_A \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{P}$ となる skeleton path から、cell に属性を付与することにより、pattern の系列をつくることができる。これから、production rule は、自然に求められる。これが求めたいものである。

[命題3] pattern P が与えられたとき、それを導出する。

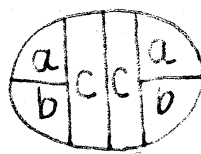
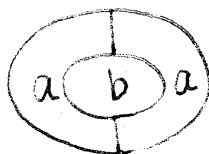
production ruleのうちで、導出の途中にあらわれる α の属性の種類、最小のものを求めることができる。

[証明] p を導出する production rule を まず つくり、この rule により導出の途中にあらわれる α の属性の数を、 m とする。skeleton diagram A において、 $\bar{p}_A$ から $\bar{p}$ にいたる path の数は、同一の skeleton を何度もくりかえすことができるが、ここでは、skeleton をくりかえす回数を $m^{n(s)}$ まで考えるだけでよい。なぜならば、これ以上くりかえすと、あらわれる symbol 数が、 m より大きくなるからである。このような $\bar{p}_A$ から $\bar{p}$ にいたる skeleton path の有限個のうちから、それに m 種の属性を、しらみつぶしに付与してみて、あらわれる属性数最小のものを選べばよい。

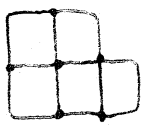
[命題 4] pattern p が与えられたとき、それを導出する production rule のうちで、rule 数の最小のものを求めることができる。

[証明] 命題 3 と同様

4. ニ、三の決定問題



等は、対称な pattern である。



は primitive な skeleton であり、



は primitive ではない。これは、vertex の次数で特徴づけられる。pattern が primitive であるとは、その skeleton が primitive であることをいう。

任意の Turing Machine に対し、それを simulate する developmental system を構成することができる。それは、initial pattern P_A から出発し、まず、read の位置等も含めた initial configuration にあたるものを導出する。次に、Turing Machine の動きを simulate する production rule により、計算をすすめてゆく。Read が 端にきたときは、その cell が分裂し、ドラックに相当する cell を その右(左)につくる。Turing Machine の停止は read の状態が $\square$ になったときであるとし、この状態の時の動きは、すべて定義されているものとする。

【命題5】 developmental system $\langle P_A, D \rangle$ が与えられたとき、これによりつくられる系列が、ambiguous であるか否か、つまり、系列があるところで分岐するか否かを判定する algorithm は 存在しない。

【証明】 Turing Machine が、ある文字を $\square$ か $\square$ かどうかという

問題に帰着できる。例えば、 $\boxed{V} \boxed{R} \boxed{V} \rightarrow \boxed{\boxed{R} \boxed{V}}$ という rule を加えておくと、文字列をかいた時のみ ambiguity が生じる。

[命題6] $\langle P, D \rangle$ が与えられたとき、これによりつくられる系列が、有限生長であるか、無限生長であるかを判定する algorithm は 存在しない。

[証明] Turing Machine の 停止問題に 帰着させる。

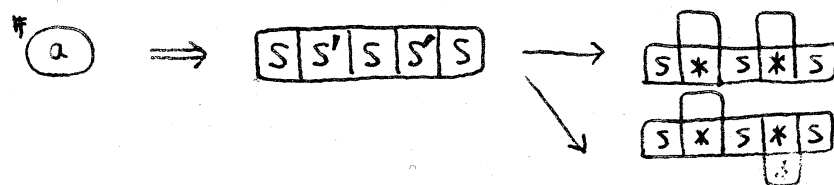
[命題7] $\langle P, D \rangle$ が与えられたとき、これによりつくられる系列が loop にはいるか否か、つまり、系列に同じ pattern が、くりがえしあらわれるか否か、を決定する algorithm は 存在しない。

[命題8] $\langle P, D \rangle$ が与えられたとき、これによりつくられる系列が、分岐することがかつていて、しかも loop には、はいらないとするとき、この系列で、いったん分岐した後、ふたたびであうことはあるか否か (つまり、系列が

$\rightarrow P_k \rightarrow P_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow P_k \rightarrow$ のようになっているか否か)

は 決定可能ではない。

[証明] 次のように遷移するような production rule をつくる。



ここでは たて方向にのびる片無限テープ上をうごく Turing Machine を考え、それが停止したら、つまり、Read が $\bar{p}$ になったら、ここで * とかいた部位を中心として対称な configuration を反対側につくって * の位置で Read が停止するようにする。これを developmental system で simulate する。すると、分岐した系列上に同じ pattern があらわれるということとは、この Turing Machine が 停止したということになる。

[命題 9] 生成される系列に、対称な pattern が P_A 以外にあらわれるか否かは、決定可能でない。

[命題 10] 生成される系列に、primitive pattern 以外のものが、現れるか否かは 決定可能でない。

[命題 11] 生成される系列で、primitive でない pattern があらわれたとし、その先、primitive な pattern があらわれるか否かは、決定可能でない。

[命題 12] $\langle P_A D \rangle$, $\langle P_A D' \rangle$ が与えられたとするとき、これらが 全く同じ系列をつくるか否かは 決定可能でない。

文献 (1) Carlyle, Greibach, Paz. A two-dimensional generating system modeling growth by binary cell division Proc. 15th SWJT conf 1-12 (1974)

(2) T. Miskima 2-dimensional developmental system の simulation
LA symposium 夏 予稿 (1975)