

Stiefel 多様体間の同変写像の写像度

大阪大学大学院理学研究科・井上 明 (Akira Inoue)

Department of Mathematics, Graduate School of Science

Osaka university

1 序

直交群 $O(k)$ は Stiefel 多様体 $V_k(\mathbf{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用する. この作用を部分群 $(\mathbf{Z}_2)^k$ に制限すると $V_k(\mathbf{R}^m)$ は自由 $(\mathbf{Z}_2)^k$ 空間となる. 本稿では E. Fadell - S. Husseini や J. Jaworowski により定義された ideal-valued cohomological index theory を用いて実 Stiefel 多様体間の $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像の写像度を考える. また, 複素 Stiefel 多様体 $V_k(\mathbf{R}^m)$ にはユニタリ群 $U(k)$ が通常の行列の積により自由に作用するが, この作用を p を素数として, 部分群 $(\mathbf{Z}_p)^k$ に制限すると $V_k(\mathbf{R}^m)$ は自由 $(\mathbf{Z}_p)^k$ 空間となる. そうしてこのときの複素 Stiefel 多様体間の $(\mathbf{Z}_p)^k$ 写像の写像度についても同様の考察を行う.

2 Index theory

G をコンパクト Lie 群, X を G -CW 複体とする. $EG \rightarrow BG$ で普遍主 G 束を表す. すると, G は $EG \times X$ に $g(e, x) = (ge, gx)$ により自由に作用する. この作用による軌道空間を $EG \times_G X$ と表す. このとき, 商写像 $p: EG \times X \rightarrow EG \times_G X$ は G をファイバーとするファイバー束となることに気をつける. X の体 K 上の Borel コホモロジーは $H_G^*(X; K) = H^*(EG \times_G X; K)$ により定義される. ここで, $H^*(\)$ は特異コホモロジーである. $c_X: X \rightarrow *$ を 1 点空間への定値写像としたとき, $H^*(BG; K)$ のイデアルである X の G -index を準同型 $\bar{c}_X = (\text{id} \times_G c_X)^*: H^*(BG; K) = H_G^*(*; K) \rightarrow H_G^*(X; K)$ の核で定義し, $\text{Ind}^G(X; K)$ で表す. 特に X に G が自由に作用するとき, $\text{Ind}^G(X)$ は X への自由な G -作用に対する分類写像 $X/G \rightarrow BG$ から誘導される準同型 $H^*(BG) \rightarrow H^*(X/G)$ の核と一致する. ま

た, 整数 k に対して,

$$\text{Ind}_k^G(X; K) = \text{Ind}^G(X; K) \cap H^k(BG; K) = \ker(\bar{c}_X^* : H^k(BG; K) \rightarrow H_G^k(X; K)).$$

とする. 次の命題は G -index の基本的な性質である.

命題 2.1 ([2],[5]). G -写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在するならば, 任意の整数 k に対して,

$$\text{Ind}_k^G(X) \supset \text{Ind}_k^G(Y).$$

が成り立つ.

$V_k(\mathbf{R}^m)$ を $\mathbf{R}^m$ における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $O(k)$ を直交群とする. すると $O(k)$ は $V_k(\mathbf{R}^m)$ に通常の行列の積により自由に作用する. この作用を対角成分に ± 1 が並ぶ行列からなる部分群 $(\mathbf{Z}_2)^k$ に制限する. すると $V_k(\mathbf{R}^m)$ は自由 $(\mathbf{Z}_2)^k$ 空間となる. また, $B(\mathbf{Z}_2)^k = B\mathbf{Z}_2 \times \cdots \times B\mathbf{Z}_2$ (k 個の直積) であり, $H^*(B(\mathbf{Z}_2)^k; \mathbf{Z}_2) = H^*(B\mathbf{Z}_2) \otimes \cdots \otimes H^*(B\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[t_1, \dots, t_k]$, ただし, $\dim t_i = 1$ である.

Fadell [3] により次が得られている.

命題 2.2. 単項式 $t_1^{m-1}t_2^{m-2}\cdots t_k^{m-k}$ は $\text{Ind}^{(\mathbf{Z}_2)^k}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2)$ に属さない.

特に, $\text{Ind}_{\dim V_k(\mathbf{R}^m)}^{(\mathbf{Z}_2)^k}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2) \neq H^{\dim V_k(\mathbf{R}^m)}(B(\mathbf{Z}_2)^k; \mathbf{Z}_2)$ である.

同様の命題が複素 Stiefel 多様体の場合にも得られる. $V_k(\mathbf{C}^m)$ を $\mathbf{C}^m$ における正規直交 k 枠全体からなる集合とし, $U(k)$ をユニタリ群とする. すると実数のときと同様に $U(k)$ は $V_k(\mathbf{C}^m)$ に自由に作用し, またこの作用を対角成分に 1 の p 乗根が並ぶ行列からなる部分群 $(\mathbf{Z}_p)^k$ に制限する. このとき $\text{Ind}^{(\mathbf{Z}_p)^k}(V_k(\mathbf{C}^m); \mathbf{Z}_p)$ を考える. ただし, p は素数である.

まず, $p=2$ のときを考える. ファイブレーション

$$S^{2(m-k)+1} \rightarrow V_k(\mathbf{C}^m) \xrightarrow{\pi} V_{k-1}(\mathbf{C}^m) \quad (1)$$

と

$$\mathbf{Z}_2 \rightarrow (\mathbf{Z}_2)^k \rightarrow (\mathbf{Z}_2)^{k-1} \quad (2)$$

を考え, (2) を (1) に作用させることにより,

$$\mathbf{RP}^{2(m-k)+1} \rightarrow V_k(\mathbf{C}^m)/(\mathbf{Z}_2)^k \rightarrow V_{k-1}(\mathbf{C}^m)/(\mathbf{Z}_2)^{k-1}$$

を得る.

すると次のファイブレーションの可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 RP^{2(m-k)+1} & \xrightarrow{\alpha_{m-k+1,1}} & BZ_2 \\
 i_m \downarrow & & i_\infty \downarrow \\
 V_k(C^m)/(Z_2)^k & \xrightarrow{\alpha_{m,k}} & B(Z_2)^k \\
 p_m \downarrow & & p_\infty \downarrow \\
 V_{k-1}(C^m)/(Z_2)^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_{m,k-1}} & B(Z_2)^{k-1}
 \end{array}$$

が得られる. ここで $\alpha_{i,j}$ は分類写像である. コホモロジーの係数を Z_2 で考えると, i_∞ と $\alpha_{m-k+1,1}^*$ は全射であるから, $i_m^*: H^*(V_k(C^m)/(Z_2)^k) \rightarrow H^*(RP^{2(m-k)+1})$ も全射となる. すると Leray-Hirsch の定理を用いることにより, 可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(V_{k-1}(C^m)/(Z_2)^{k-1}) \otimes H^*(RP^{2(m-k)+1}) & \xrightarrow{\varphi_m} & H^*(V_k(C^m)/(Z_2)^k) \\
 \alpha_{m,k-1}^* \otimes \alpha_{m-k+1,1}^* \uparrow & & \alpha_{m,k}^* \uparrow \\
 H^*(B(Z_2)^{k-1}) \otimes H^*(RP^\infty) & \xrightarrow{\varphi_\infty} & H^*(B(Z_2)^k)
 \end{array}$$

を得る. ここで φ_m と φ_∞ は同型写像である. すると

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{m,k}^*[t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_k^{2(m-k)+1}] \\
 = & \alpha_{m,k}^* \circ \varphi_\infty[t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_{k-1}^{2(m-k+1)+1} \otimes t_k^{2(m-k)+1}] \\
 = & \varphi_m[\alpha_{m,k-1}^*(t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_{k-1}^{2(m-k+1)+1}) \otimes \alpha_{m-k+1,1}^*(t_k^{2(m-k)+1})]
 \end{aligned}$$

となる. $\alpha_{m-k+1,1}^*(t_k^{2(m-k)+1}) \neq 0$ であるので,

$$\alpha_{m,k-1}^*(t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_{k-1}^{2(m-k+1)+1}) \neq 0$$

を仮定すると

$$\alpha_{m,k}^*[t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_k^{2(m-k)+1}] \neq 0$$

となる. したがって $t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_k^{2(m-k)+1}$ は $\ker \alpha_{m,k}^*$ に属さないことが分かる.

次に p が奇素数のときを考える. このとき, $H^*(B(Z_p)^k; Z_p) = Z_p[x_1, x_2, \dots, x_k] \otimes E(y_1, y_2, \dots, y_k)$ である. ここで $Z_p[x_1, x_2, \dots, x_k]$ は次数 2 の生成元 x_i をもつ Z_p 係数の多項式環であり, $E(y_1, y_2, \dots, y_k)$ は次数 1 の生成元 y_i をもつ Z_p 係数の外積代数である. また, この次数つき環は可換である. すなわち $xy = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} yx$ である. そうして, 系列

$$Z_p \rightarrow (Z_p)^k \rightarrow (Z_p)^{k-1} \quad (3)$$

を考えて, (3) を (1) に作用させることにより,

$$S^{2(m-k)+1}/Z_p \rightarrow V_k(C^m)/(Z_p)^k \rightarrow V_{k-1}(C^m)/(Z_p)^{k-1}$$

を得る.

するとファイブレーションの可換図式

$$\begin{array}{ccc} L_p^{2(m-k)+1} & \xrightarrow{\alpha_{m-k+1,1}} & BZ_p \\ i_m \downarrow & & i_\infty \downarrow \\ V_k(C^m)/(Z_p)^k & \xrightarrow{\alpha_{m,k}} & B(Z_p)^k \\ p_m \downarrow & & p_\infty \downarrow \\ V_{k-1}(C^m)/(Z_p)^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_{m,k-1}} & B(Z_p)^{k-1} \end{array}$$

が得られる. ここで, 軌道空間 $L_p^{2(m-k)+1} = S^{2(m-k)+1}/Z_p$ はレンズ空間であり, $\alpha_{i,j}$ は分類写像である. コホモロジーの係数を Z_p として考えると, i_∞^* と $\alpha_{m-k+1,1}^*$ は全射であるので, $i_m^* : H^*(V_k(C^m)/(Z_p)^k) \rightarrow H^*(L_p^{2(m-k)+1})$ も全射となる. すると Leray-Hirsch の定理を用いることにより, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^*(V_{k-1}(C^m)/(Z_p)^{k-1}) \otimes H^*(L_p^{2(m-k)+1}) & \xrightarrow{\varphi_m} & H^*(V_k(C^m)/(Z_p)^k) \\ \alpha_{m,k-1}^* \otimes \alpha_{m-k+1,1}^* \uparrow & & \alpha_{m,k}^* \uparrow \\ H^*(B(Z_p)^{k-1}) \otimes H^*(BZ_p) & \xrightarrow{\varphi_\infty} & H^*(B(Z_p)^k) \end{array}$$

を得る. ここで φ_k と φ_∞ は同型である. すると

$$\begin{aligned} & \alpha_{m,k}^*[x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2 \cdots x_k^{m-k}y_k] \\ &= \alpha_{m,k}^* \circ \varphi_\infty[x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2 \cdots x_{k-1}^{m-k+1}y_{k-1} \otimes x_k^{m-k}y_k] \\ &= \varphi_m[\alpha_{m,k-1}^*(x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2 \cdots x_{k-1}^{m-k+1}y_{k-1}) \otimes \alpha_{m-k+1,1}^*(x_k^{m-k}y_k)]. \end{aligned}$$

となる. $\alpha_{m-k+1,1}^*(x_k^{m-k}y_k) \neq 0$ であるので,

$$\alpha_{m,k-1}^*(x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2 \cdots x_{k-1}^{m-k+1}y_{k-1}) \neq 0,$$

を仮定すると

$$\alpha_{m,k}^*[x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2 \cdots x_k^{m-k}y_k] \neq 0$$

となる. したがって, $x_1^{m-1}y_1x_2^{m-2}y_2 \cdots x_k^{m-k}y_k$ は $\ker \alpha_{m,k}^*$ に属さないことが分かる. 以上のことより, 次の結果を得た.

命題 2.3. (1) 単項式 $t_1^{2(m-1)+1} t_2^{2(m-2)+1} \dots t_k^{2(m-k)+1}$ は $\text{Ind}^{(\mathbb{Z}_2)^k}(V_k(C^m); \mathbb{Z}_2)$ に属さない.

特に, $\text{Ind}_{\dim V_k(C^m)}^{(\mathbb{Z}_2)^k}(V_k(C^m); \mathbb{Z}_2) \neq H^{\dim V_k(C^m)}(B(\mathbb{Z}_2)^k; \mathbb{Z}_2)$ である.

(2) 単項式 $x_1^{m-1} y_1 x_2^{m-2} y_2 \dots x_k^{m-k} y_k$ は $\text{Ind}^{(\mathbb{Z}_p)^k}(V_k(C^m); \mathbb{Z}_p)$ に属さない.

特に, $\text{Ind}_{\dim V_k(C^m)}^{(\mathbb{Z}_p)^k}(V_k(C^m); \mathbb{Z}_p) \neq H^{\dim V_k(C^m)}(B(\mathbb{Z}_p)^k; \mathbb{Z}_p)$ である.

3 Stiefel 多様体間の同変写像の写像度

G をコンパクト Lie 群, M を連結な向きをついた滑らかな n 次元 G 多様体とする. さらに, M への G 作用は自由であると仮定する. すると軌道空間 M/G も多様体となり, このときその次元は $n - \dim G$ である. $p: M \rightarrow M/G$ を射影とする. M/G が体 K 上向き付け可能とする. すると p のトランスファー $p_!$ が $p_! = D_{M/G} \circ p_* \circ D_M^{-1}$ により定義できる. ここで D は Poincaré 双対同型の逆写像である. このとき, $p_!: H^n(M; K) \rightarrow H^{n-\dim G}(M/G; K)$ は同型写像となる. またさらに, トランスファーに関して一般に次の事が知られている.

補題 3.1 ([4]). X, Y を G -CW 複体, $f: X \rightarrow Y$ を G 写像とする. また, $p_X: EG \times X \rightarrow EG \times_G X$ と $p_Y: EG \times Y \rightarrow EG \times_G Y$ を商写像とする. このとき, 次の図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y; \Gamma) & \xrightarrow{f^*} & H^i(X; \Gamma) \\ (p_Y)_! \downarrow & & \downarrow (p_X)_! \\ H_G^{i-\dim G}(Y; \Gamma) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & H_G^{i-\dim G}(X; \Gamma) \end{array}$$

ここで, Γ は可換群であり $\bar{f} = \text{id} \times_G f: EG \times_G X \rightarrow EG \times_G Y$ は G 写像 $\text{id} \times f: EG \times X \rightarrow EG \times Y$ から誘導される写像である.

また次の定理は本質的に [4] で与えられている.

定理 3.2 ([4]). G をコンパクト Lie 群とし, M, N を G が自由に作用する滑らかな連結 n 次元多様体で体 K 上向き付け可能なものとし, M/G と N/G も体 K 上向き付け可能とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; K)$ が $H^{n-\dim G}(BG; K)$ と等しくないとする. すると任意の G 写像 $f: M \rightarrow N$ に対して, $f^*: H^n(N; K) \rightarrow H^n(M; K)$ は非自明である.

(2) $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; K)$ が $\text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; K)$ と等しくないとする. すると任意の G 写像 $f: M \rightarrow N$ に対して, $f^*: H^n(N; K) \rightarrow H^n(M; K)$ 単射でない.

証明. (1) $f^*: H^n(N; K) \rightarrow H^n(M; K)$ が自明となるような G 写像 $f: M \rightarrow N$ が存在したと仮定する. 補題 3.1 より, $(p_M)_! \circ f^* = \bar{f}^* \circ (p_N)_!$. すると, $(p_M)_!$ と $(p_N)_!$ は同型であり, f^* が自明であることより, $\bar{f}^*: H_G^{n-\dim G}(N; K) \rightarrow H_G^{n-\dim G}(M; K)$ も自明となる. $c_M = c_N \circ f$ だから,

$$\text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; K) = (\bar{c}_M^*)^{-1}(0) = (\bar{c}_N^*)^{-1}((\bar{f}^*)^{-1}(0)) = H^{n-\dim G}(M; K).$$

(2) $f^*: H^n(N; K) \rightarrow H^n(M; K)$ が単射であるような G 写像 $f: M \rightarrow N$ が存在したと仮定する. 補題 3.1 を再度用いることにより, $\bar{f}^*: H_G^{n-\dim G}(N; K) \rightarrow H_G^{n-\dim G}(M; K)$ も単射となる. したがって,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{n-\dim G}^G(N; K) &= \ker \bar{c}_N^* = (\bar{c}_N^*)^{-1}(0) = (\bar{c}_N^*)^{-1}((\bar{f}^*)^{-1}(0)) = (\bar{c}_M^*)^{-1}(0) \\ &= \text{Ind}_{n-\dim G}^G(M; K) \end{aligned}$$

□

命題 2.2 と定理 3.2 (1) の結果を用いると次のことが言える.

定理 3.3. $f: V_k(\mathbf{R}^m) \rightarrow V_k(\mathbf{R}^n)$ を $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像とすると, f の写像度は奇数である.

証明. $n = \dim V_k(\mathbf{R}^n)$ とする. 命題 2.2 の結果より, $\text{Ind}_n^{(\mathbf{Z}_2)^k}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2)$ は $H^n(B(\mathbf{Z}_2)^k; \mathbf{Z}_2)$ と等しくない. よって, 定理 3.2 (1) より, $f^*: H^n(N; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^n(M; \mathbf{Z}_2)$ は非自明な準同型となる. □

この定理から次の系が得られる.

系 3.4. $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像 $f: V_k(\mathbf{R}^m) \rightarrow V_k(\mathbf{R}^n)$ が存在するならば, $m \leq n$ となる.

証明. $f: V_k(\mathbf{R}^m) \rightarrow V_k(\mathbf{R}^n)$ を $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像とする. $m > n$ と仮定すると, 包含写像 $i: V_k(\mathbf{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbf{R}^m)$ は $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像となる. すると $i \circ f: V_k(\mathbf{R}^m) \rightarrow V_k(\mathbf{R}^m)$ も $(\mathbf{Z}_2)^k$ 写像となり, $i \circ f$ の写像度は偶数となる. 一方, $(i \circ f)^* = f^* \circ i^*$ であり, $H^{\dim V_k(\mathbf{R}^m)}(V_k(\mathbf{R}^n); \mathbf{Z}_2) = 0$ であるから, $(i \circ f)^*: H^{\dim V_k(\mathbf{R}^m)}(V_k(\mathbf{R}^m)) \rightarrow H^{\dim V_k(\mathbf{R}^m)}(V_k(\mathbf{R}^m))$ は自明な準同型となる. これは矛盾する. ゆえに, $m \leq n$ である. □

次に $l < k$ のときを考えると, $(\mathbf{Z}_2)^l$ は $(\mathbf{Z}_2)^k$ の部分群となる. したがって $V_k(\mathbf{R}^m)$ は自由な $(\mathbf{Z}_2)^l$ 多様体となる. さらにこのとき次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} E(\mathbf{Z}_2)^k \times_{(\mathbf{Z}_2)^l} V_k(\mathbf{R}^m) & \xrightarrow{\bar{c}} & B(\mathbf{Z}_2)^l \\ \pi \downarrow & & \rho \downarrow \\ E(\mathbf{Z}_2)^k \times_{(\mathbf{Z}_2)^k} V_k(\mathbf{R}^m) & \xrightarrow{\bar{c}} & B(\mathbf{Z}_2)^k. \end{array}$$

すると,

$$\begin{array}{ccc} H^*_{(\mathbf{Z}_2)^l}(V_k(\mathbf{R}^m)) & \xleftarrow{\bar{c}^*} & H^*(B(\mathbf{Z}_2)^l) \\ \pi^* \uparrow & & \rho^* \uparrow \\ H^*_{(\mathbf{Z}_2)^k}(V_k(\mathbf{R}^m)) & \xleftarrow{\bar{c}^*} & H^*(B(\mathbf{Z}_2)^k). \end{array}$$

も可換な図式となる.

定理 3.5. $\dim V_k(\mathbf{R}^m) = \dim V_l(\mathbf{R}^n)$ であるとき, 任意の $(\mathbf{Z}_2)^l$ 写像 $f: V_k(\mathbf{R}^m) \rightarrow V_l(\mathbf{R}^n)$ に対し, f の写像度は偶数となる.

証明. $d = \dim V_k(\mathbf{R}^m) = \dim V_l(\mathbf{R}^n)$ とすると, $\pi^*: H^d_{(\mathbf{Z}_2)^k}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^d_{(\mathbf{Z}_2)^l}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2)$ は自明な準同型となる. また, 準同型 $\rho^*: H^*(B(\mathbf{Z}_2)^k; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^*(B(\mathbf{Z}_2)^l; \mathbf{Z}_2)$ は全射であるから, $\bar{c}^*: H^d(B(\mathbf{Z}_2)^l; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^d_{(\mathbf{Z}_2)^l}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2)$ も自明な準同型となる. したがって, $\text{Ind}_d^{(\mathbf{Z}_2)^l}(V_k(\mathbf{R}^m); \mathbf{Z}_2) = H^d(B(\mathbf{Z}_2)^l; \mathbf{Z}_2)$ となる.

一方, 命題 2.2 より, $\text{Ind}_d^{(\mathbf{Z}_2)^l}(V_l(\mathbf{R}^n); \mathbf{Z}_2) \neq H^d(B(\mathbf{Z}_2)^l; \mathbf{Z}_2)$ である. したがって, 定理 3.2 (2) により, 任意の $(\mathbf{Z}_2)^l$ 写像 $f: V_k(\mathbf{R}^m) \rightarrow V_l(\mathbf{R}^n)$ に対して, f の写像度は偶数となる. $\square$

上の議論を複素 Stiefel 多様体にも用いると, 次の結果を得る.

定理 3.6. $f: V_k(\mathbf{C}^m) \rightarrow V_k(\mathbf{C}^m)$ を $(\mathbf{Z}_p)^k$ 写像とすると f の写像度は p の倍数でない.

この定理より, 系 3.4 のときと同様に次の系を得る.

系 3.7. $(\mathbf{Z}_p)^k$ 写像 $f: V_k(\mathbf{C}^m) \rightarrow V_k(\mathbf{C}^n)$ が存在するならば, $m \leq n$ である.

次に $l < k$ のときを考えると, $(\mathbf{Z}_p)^l$ は $(\mathbf{Z}_p)^k$ の部分群と思える. したがって $V_k(\mathbf{C}^m)$ は自由 $(\mathbf{Z}_p)^l$ 多様体となる. すると定理 3.5 と同様に次の定理を得る.

定理 3.8. $\dim V_k(C^m) = \dim V_l(C^n)$ ならば, 任意の $(\mathbb{Z}_p)^l$ 写像 $f : V_k(C^m) \rightarrow V_l(C^n)$ に対し, f の写像度は p の倍数となる.

注意. k 偶数のとき, $\dim V_k(C^m)$ も偶数となる. 従って, $S^{\dim V_k(C^m)}$ への自由な $\mathbb{Z}_p$ 作用は存在しない.

系 3.9. $\dim V_k(C^m) = \dim V_l(C^n)$ ならば, 任意の $(S^1)^l$ 写像 $f : V_k(C^m) \rightarrow V_l(C^n)$ に対して, f の写像度は 0 である.

参考文献

- [1] H.Cartan and S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press (1956)
- [2] E. Fadell and S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 8(1988), 73-85
- [3] E. Fadell, *Ideal-valued generalizations of Ljusternik-Schnierlmann category, with applications*, Topics in equivariant topology, (eds. E. Fadell, et al.), Sém. Math. Sup., 108, Press Univ. Montreal, (1989), 11-54
- [4] Y. Hara, *The degree of equivariant maps*, preprint.
- [5] J. Jaworowski, *Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem*, Proc. Edinb. Math. Soc. 32(1989), 271-279
- [6] K. Komiya, *Borsuk-Ulam theorem and Stiefel manifolds*, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), 611-626
- [7] E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York (1966)