

非定常よとみ点流れの数値解

慶大 物理 松信八十男

竹光 信正

§1 はじめに

昨年，壁面過度を評価するために，著者の一人（松信）^{1), 2)} はある2次元非定常^流の解析解を求めた．この流れは，無限平面によって限られた半無限領域において，平面壁よりある有限な距離のところに強さが周期的に変化する点わき出し（時刻によって点吸い込みにもなる）を考えたものである．解析は Navier-Stokes 方程式（以下，N-S 方程式と略記する）にもとづいておこなわれ，任意の振動数をもつレイノルズ数 (R) の流れ（非定常ストークス流），および振動数0で， R が小さくてかつ0でない場合の流れの両方について解が求められた．

この報告は，つぎに示す3つの目的のもとに研究をおこなった結果を示すものである．第1の目的は，振動数もレイノ

ルズ数もともに0でない非定常流の数値解析をおこなうことである。この流れについては、現在解析計算の手だてがないので数値計算によって情報を得るしか方法がない。第2の目的は、非定常問題を数値解析する上での工夫をおこなうことである。いまの場合には、特異点をふくんだ無限領域の流れを計算しなければならないために、とくにこの点に留意する必要がある。第3の目的は、松信の解析結果と数値解析の結果を $R=0$ の場合に比較することである。これによって数値解析の信頼性を評価することができる。

しかし、この報告では、上記の目的がすべて達成されたわけではなく、今後の問題として残されたものがある。最後にそれを検討する。

§2 問題の設定と運動方程式

図1のように (x, y) 直角座標系をとり、点 $(0, a)$ に流量 $2\pi c$ の点わき出しがあるものとする。わき出しの強さ c が時間とともに変動することによって流れは非定常になるものとする。

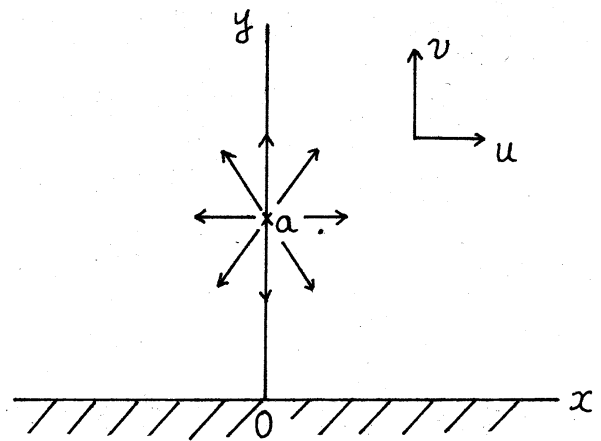


図1 座標系の設定

流れの場合は2次元であるとし，流体は非圧縮粘性流体であるとする．このとき，N-S方程式は，

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.1)$$

とかける．ここで，

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

であり， (u, v) はそれぞれ x, y 方向の速度成分をあらわす．また， ω はうず度をあらわし， ν は流体の運動粘性率である． t は時間である． ψ を流れ関数とすると，うず度 ω と流れ関数 ψ との間には

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2.2)$$

の関係がある．境界条件は，

$$\left. \begin{array}{ll} y=0 \text{ で} & u=v=0 \\ r \rightarrow \infty \text{ で} & u \rightarrow 0, v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

である．ここで， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする．わき出し流量 $2\pi C$ は

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi C_0 \text{ (定常: } C = C_0) \\ \text{or} \\ 2\pi C_0 e^{i\Omega t} \text{ (非定常: } C = C_0 e^{i\Omega t}) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

とする．ただし，複素表示のものは，その実部のみが物理的意味をもつものとする． Ω は角振動数である．つぎに，方程式(2.1)～(2.2)および境界条件(2.3)を無次元化するために，つぎの変換をおこなう．

$$\begin{aligned}
 (x, y) &\rightarrow (ax, ay), & (u, v) &\rightarrow (cu/a, cv/a), \\
 \nabla^2 &\rightarrow a^{-2} \nabla^2, & t &\rightarrow Tt \quad (T = 2\pi/\Omega), \\
 \psi &\rightarrow \pi c_0 \psi, & \omega &\rightarrow \pi c_0 a^{-2} \omega
 \end{aligned}$$

そうすると, R を Reynolds 数 ($R = \pi c_0 / \nu$), S を Strouhal 数 ($S = a^2 / \pi c_0 T$) とし, 無次元化した $N-S$ 方程式は,

$$S \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \frac{1}{R} \nabla^2 \omega \quad (2.5)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2.6)$$

となる. さらに, 双極座標 (ξ, η) を導入して変数変換

$$x = \frac{\sin \pi \eta}{\cosh \pi \xi - \cos \pi \eta}, \quad y = \frac{\sinh \pi \xi}{\cosh \pi \xi - \cos \pi \eta} \quad (2.7)$$

をおこなうと, 式 (2.5) と (2.6) は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{2\pi}{\alpha^2} J^2 \left(R \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(\xi, \eta)} + \nabla_\xi^2 \omega \right) \quad (2.8)$$

$$\omega = -J^2 \nabla_\xi^2 \psi \quad (2.9)$$

となる. ここで,

$$\alpha = a \sqrt{\Omega / \nu}$$

$$J = (\cosh \pi \xi - \cos \pi \eta) / \pi$$

$$\nabla_\xi^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2$$

である. α は Womersley 数とよばれる無次元数である. 図 2

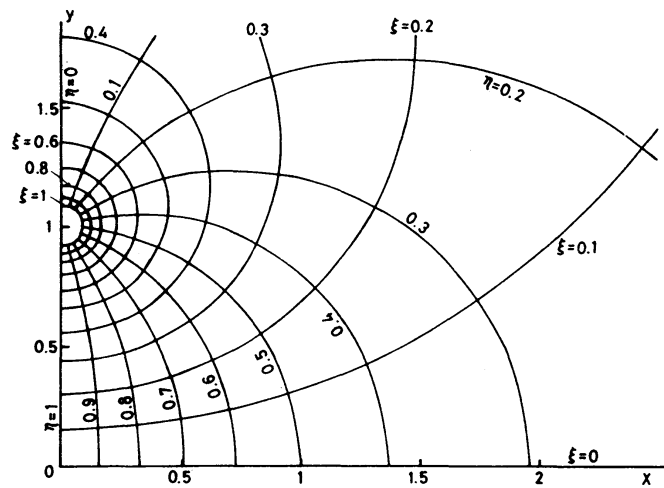
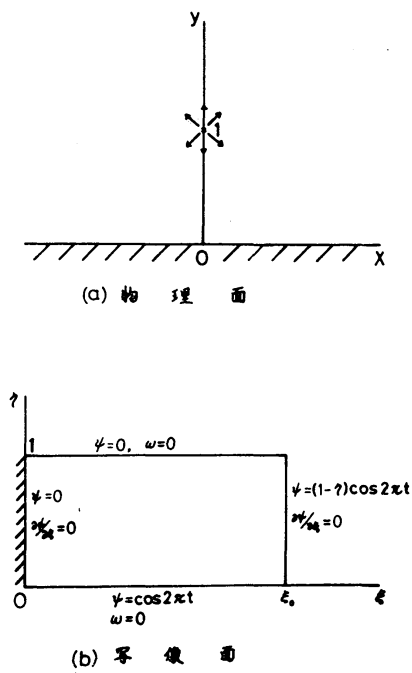


図2 物理面と
写像面

図3 物理面上でみた格子点

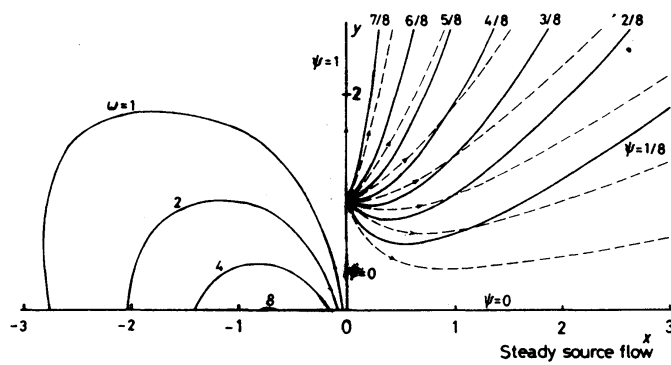


図4 定常 Stokes 流の流線(右側)と
うず度(左側)

は，物理面 (a) と変換した ξ, η 座標系 (b) を図示したものである。図 2 (b) には，境界条件も併記した。物理面上でみた格子点は図 3 のようになり， $\xi = \text{const.}$ ， $\eta = \text{const.}$ のいずれの線も物理面上では円になる。図 2 (b) の $\xi_0 = \text{const.}$ の値が大きくなるほど図 3 の物理面上の円は特異点 (0, 1) に近づく。なお，図 4 は， $R=0$ ， $\alpha=0$ の定常 Stokes 流の流線 (右側) とうず度 (左側) の解析解を図示したものである。破線の流線は完全流体の解をあらわす。

§ 3 数値解析方法とその結果

数値解析をおこなうためには，式 (2.8)，(2.9) および境界条件を離散化しなければならない。ここでは，完全に周期的な流れでは， $\omega_{i,j}^{t+\Delta t}$ と $\omega_{i,j}^{t+\Delta t-T}$ (T : 周期) が等しくなることを利用して，つぎのように式 (2.8) を離散化する。 ξ 方向， η 方向の格子幅をそれぞれ h, δ とし，時間微分について前進差分で，空間微分について中心差分で近似し， $\omega_{i,j}^{t+\Delta t}$ と $\omega_{i,j}^{t+\Delta t-T}$ が等しくなることを考慮して，式 (2.8) を

$$\frac{\omega_{i,j}^{t+\Delta t} - \omega_{i,j}^t}{\Delta t} + \frac{2\pi}{\alpha^2} J^2 R \left\{ \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\delta} \cdot \frac{\omega_{i+1,j} \pm \lambda \omega_{i,j}^{t+\Delta t} \mp \lambda \omega_{i,j}^{t+\Delta t-T} - \omega_{i-1,j}}{2h} \right. \\ \left. - \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h} \cdot \frac{\omega_{i,j+1} \pm \lambda \omega_{i,j}^{t+\Delta t} \mp \lambda \omega_{i,j}^{t+\Delta t-T} - \omega_{i,j-1}}{2\delta} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{\alpha^2} J^2 \left\{ \frac{1}{h^2} (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} - \mu \omega_{i,j}^{t+\Delta t} + \mu \omega_{i,j}^{t+\Delta t-\tau}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta^2} (\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} - \mu \omega_{i,j}^{t+\Delta t} + \mu \omega_{i,j}^{t+\Delta t-\tau}) \right\} \\
&\hspace{15em} (3.1)
\end{aligned}$$

と離散化する。ここで、 $(\xi, \eta) = ((i-1)h, (j-1)\Delta)$ である。

これより、

$$\begin{aligned}
&\left\{ 1 + \frac{\lambda \pi J^2 R \Delta t (\mp \alpha' \pm \beta')}{2 h \Delta \alpha^2} + \mu \frac{2\pi}{\alpha^2} J^2 \Delta t \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\Delta^2} \right) \right\} \omega_{i,j}^{t+\Delta t} \\
&= \omega_{i,j}^t + \frac{\pi J^2 R \Delta t}{2 h \Delta \alpha^2} \left\{ -\beta' (\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) + \alpha' (\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}) \right. \\
&\quad \left. + \lambda (\mp \alpha' \pm \beta') \omega_{i,j}^{t+\Delta t-\tau} \right\} \\
&\quad + \frac{2\pi J^2 \Delta t}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{h^2} (\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta^2} (\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j}) + \mu \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\Delta^2} \right) \omega_{i,j}^{t+\Delta t-\tau} \right\}
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \frac{2\pi}{\alpha^2} J^2 \Delta t \left\{ \frac{\lambda R (|\alpha'| + |\beta'|)}{4 h \Delta} + \mu \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\Delta^2} \right) \right\} \right] \omega_{i,j}^{t+\Delta t} \\
&= \omega_{i,j}^t + \frac{\pi J^2 R \Delta t}{2 h \Delta \alpha^2} \left\{ -\beta' (\omega_{i+1,j}^t - \omega_{i-1,j}^t) + \alpha' (\omega_{i,j+1}^t - \omega_{i,j-1}^t) \right. \\
&\quad \left. + \lambda (|\alpha'| + |\beta'|) \omega_{i,j}^{t+\Delta t-\tau} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\pi J^2 \Delta t}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{h^2} (\omega_{i+1,j}^t + \omega_{i-1,j}^t - 2\omega_{i,j}^t) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta^2} (\omega_{i,j+1}^t + \omega_{i,j-1}^t - 2\omega_{i,j}^t) + \mu \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{\Delta^2} \right) \omega_{i,j}^{t+\Delta t-T} \right\} \\
& \hspace{20em} (3.2)
\end{aligned}$$

となる。ただし,

$$\alpha' = \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}, \quad \beta' = \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}$$

である。ここで導入したパラメータ λ と μ は, それぞれ一種の緩和係数であり, 式 (3.1) から予想されるように, 一般に λ と μ が大きいほど計算は安定であるが, 数値計算上の誤差は大きくなるものと考えられる。 $\lambda = \mu = 0$ の場合が, 通常, 解析に用いられているうす度の計算式である。この方法は, Takemitsu³⁾ が定常 N-S 方程式に対して導入した考え方を非定常 N-S 方程式に拡張したものである。

式 (2.9) は, 通常おこなわれているように空間微分を中心差分におきかえ,

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j}^* = \frac{1}{2(h^2 + \Delta^2)} \{ \Delta^2 (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + h^2 (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \\
+ \frac{h^2 \Delta^2}{J^2} \omega_{i,j} \} \hspace{2em} (3.3)
\end{aligned}$$

$$\psi_{i,j}^{(k+1)} = \psi_{i,j}^{(k)} + K (\psi_{i,j}^* - \psi_{i,j}^{(k)}) \hspace{2em} (3.4)$$

で計算する。ただし, $\psi_{i,j}^{(k)}$ は第 k 回目の反復値を示し, K は

緩和係数を表わす。また，境界条件（図2(b)参照）は容易に差分式に変換できる。とくに，壁面上（ $\xi = 0$ ）のうず度は，壁面上で $\partial\psi/\partial\eta = 0$ であることを利用すると，式(2.9) から

$$\omega_{1,j} = -\frac{2}{h^2} \left(\frac{1 - \cos\pi\eta}{\pi} \right)^2 \psi_{2,j} \quad (3.5)$$

となる。壁面上の圧力を計算するには，非定常N-S運動方程式を積分しなければならない。壁面上では流体の速度成分が0であることを考慮すると，

$$-\frac{a^2}{\rho\nu c} \left(\frac{\partial P}{\partial\eta} \right)_{\xi=0} = \pi \left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi} \right)_{\xi=0}$$

が導ける（ ρ は流体の密度）から， P のかわりに $(\rho\nu c/a^2)P$ において積分すると，

$$-P + P_r = \pi \int_0^\eta \left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi} \right)_{\xi=0} d\eta \quad (3.6)$$

となる。ここで， P_r は定数であり，いまの場合は0とおく。

実際の計算では， $h = \Delta = 0.1$ とおき， $\Delta t = T/100$ ($T = 1$) とし， $R = 0, 16, 32$ ； $\alpha = 0, 4, 8, 16$ の場合について計算をおこなった。計算の順序はつぎのようにしておこなった。

- (1) $t = 0$ で，すべての格子点上で流れ関数とうず度の初期値を与える。いまの場合には，初期値として完全流体の定常解を与えた。

(2) 式 (3.4) を使い, $2 \leq i \leq i_c - 1$, $2 \leq j \leq j_c - 1$ ($i_c = 12$, $j_c = 11$) のすべての格子点について $|\psi_{i,j}^{(k+1)} - \psi_{i,j}^{(k)}| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$) を満足するまで反復計算を続ける. 緩和係数の値は 1.6 とした.

(3) 壁面上のうず度を式 (3.5) で計算する.

(4) 時間を Δt だけすすめる.

(5) 壁面上の点を除いたところでの ψ の境界条件を与える.

(6) Δt 時刻後のうず度を (3.2) で計算する.

(7) 解が十分周期的となるまで (2) にもとる.

まず, 定常 Stokes 流の計算結果を示す. この解は定常 N-S 方程式を数値的に解いたものである. 図 5 は, $\alpha = 0$ における壁面上のうず度を示す. 実線が解析解^{1), 2)}で, 破線が数値解である. 両者ともよく一致している. 図 6 は,

壁面上の圧力の計算結果である. $1 \leq \alpha \leq 3$ で解析解と数値解の一致がよくないが, これは式 (3.6)

における $(\partial \omega / \partial x)_{y=0}$ の値が離散格子のため, 数

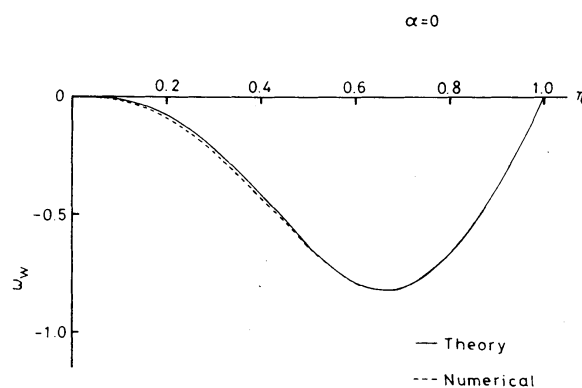


図 5 壁面上のうず度

値計算では正しく評価できないことによる。

つぎに、非定常流の計算結果を示す。図7は、 $R=0$ 、 $\alpha=8$ のときのちろ平面におけるうす度が、ち方向の格子点の数を種々変えたときにどのように変化するかを調べたものである。実線が解析解で、 Δ 印が $I_c=7$ (図2(b)で $\epsilon_0=0.6$ に相当し、図3では η 軸を $\eta=0.736$ および 1.358

で横切る円に相当する)、 $\circ$ 印が $I_c=12$ (η 軸を $\eta=0.939$ 、および 1.065 で横切る円に相当する)、 $+$ 印が $I_c=16$ (η 軸を $\eta=0.982$ および 1.018 で横切る円に相当する)であり、数値解は4周期めの値をプロットした。この

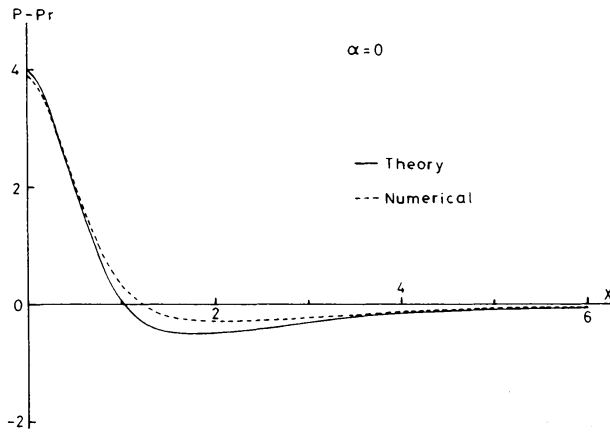


図6 壁面上の圧力

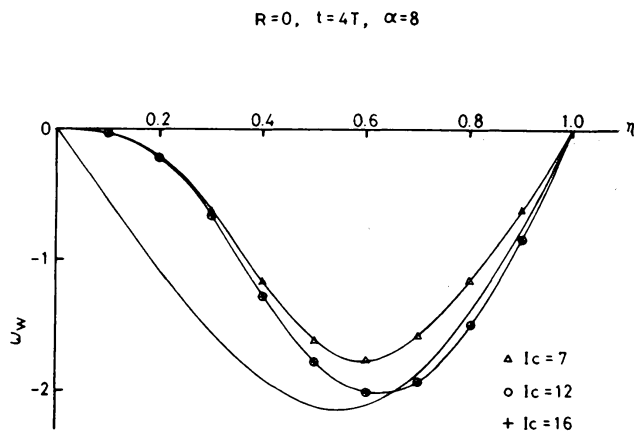


図7 χ 軸方向の格子点のとり方による壁面上のうす度のちが

図より, $I_c = 12$ と 16 では壁面上のうず度の値にほとんど差がないこと, 数値解と解析解の絶対値は $I_c \geq 12$ であれば, さほどの差がないこと, $\eta = 0$ 付近で解析解と数値解の傾向が異なること (このことについては, §4 でもう一度ふれる), などがわかる. この結果より, z 方向の格子点の指標は以後 $I_c = 12$ とする.

図 8 (a) ~ (j) は, $R = 16$, $\alpha = 8$ のときの流線とうず度の変化を 1 周期にわたり図示したものである. 図 8 (a) は $t = 0$ のときの流線とうず度を示す. 右側 ($x \geq 0$) が流線であり, 左側 ($x \leq 0$) がうず度である. このときは, わき出し流量が最大である. (b) は, わき出し流量が最大のときからすこした, たときで, これよりすこしづつわき出し流量は減少する. 壁面上に強いうず度が発生している. (c) はわき出し流

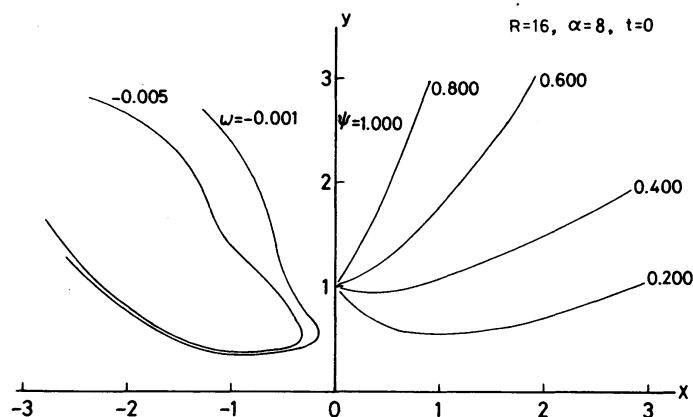
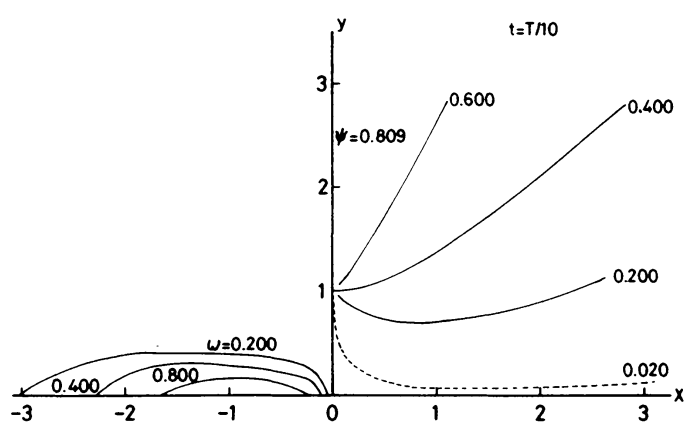
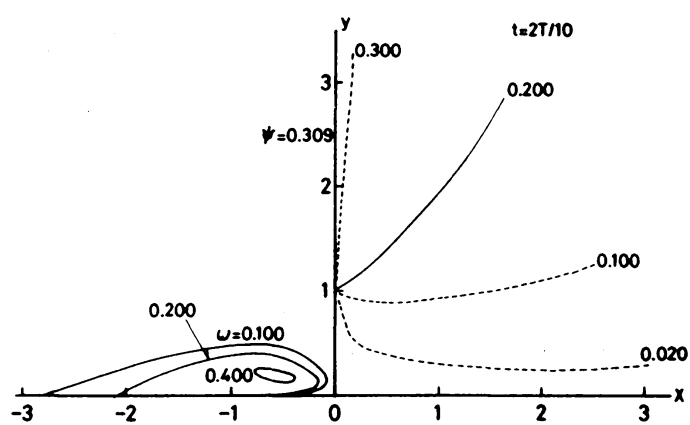
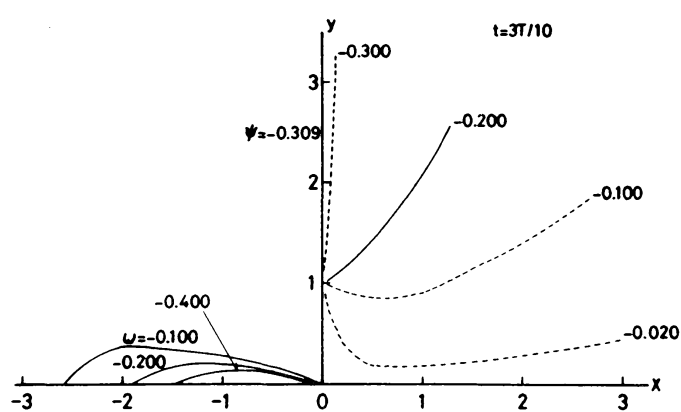
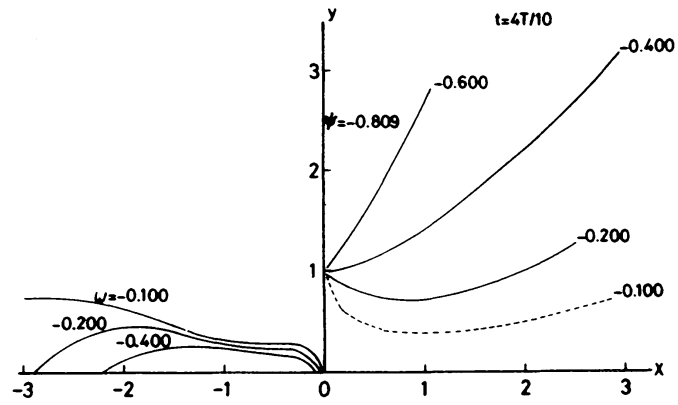
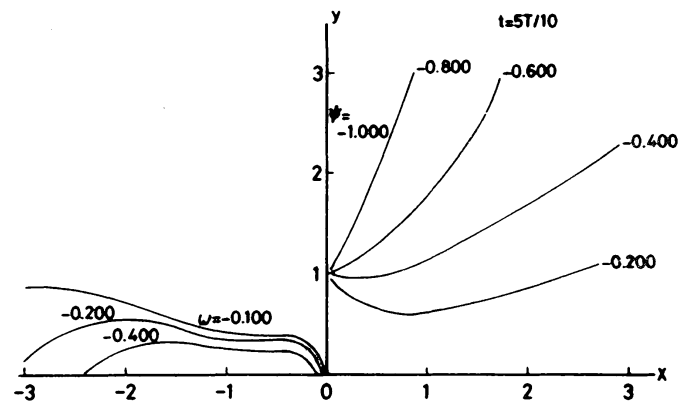
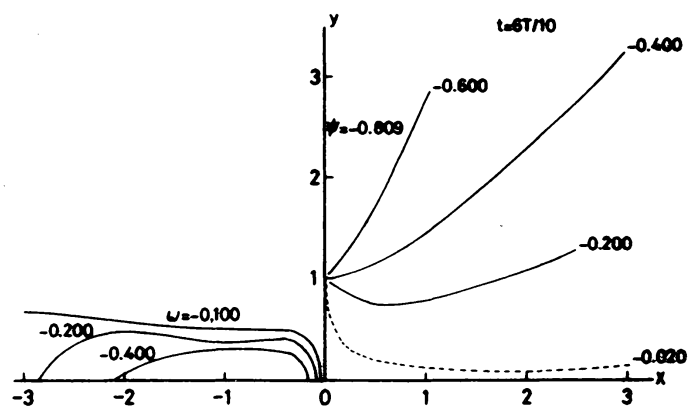
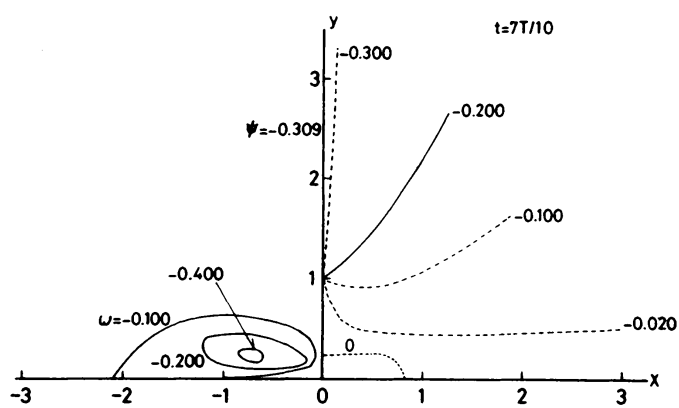
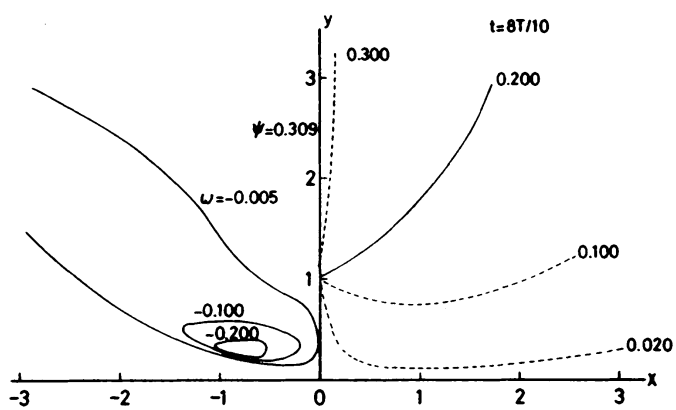
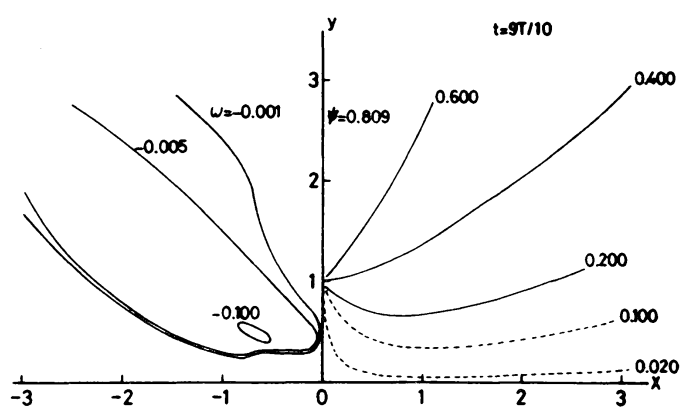


図 8 (a) $R = 16$, $\alpha = 8$ のときの流線 (右側) とうず度 (左側): $t = 0$

(b) $t = T/10$ (c) $t = 2T/10$ (d) $t = 3T/10$

(e) $t = 4T/10$ (f) $t = 5T/10$ (g) $t = 6T/10$

(h) $t = 7T/10$ (i) $t = 8T/10$ (j) $t = 9T/10$

量が0となるすこし前の状態であり，壁面よりうずがはがれている。(d)は吸い込み流のごく弱い状態のときで，これより吸い込みがすこしづつ強くなる。吸い込み流になっているから，(c)のときと比べるとうず度の符号が反対になっている。(e)は吸い込みがだんだん強くなったときの流線とうず度である。(f)は吸い込み流量が最大のときで，以後吸い込みはしだいに弱くなる。(g)は吸い込み流量が最大のときよりすこし弱まったところである。(h)は吸い込みが0となる直前で流れにはく離が生じている。(c)のときと比べると，逆符号のうずがはがれている。(i)は吸い込みが終って，わき出し流となった直後である。したがって，壁面上のうず度の符号は逆転する。(j)はわき出し流量が最大となる直前で，以後(a)にもどり，同じ状態(a)~(j)をくり返す。

図9(a)~(d)は，Reynolds数 R ，およびWomersley数 α を種々変えたときの壁面上のうず度を一周期にわたって図示したものである。(a)は $R=16$ ， $\alpha=4$ のときの壁面上のうず度である。 $t=7T/10$ のとき，はく離を生じている。(b)は $R=16$ ， $\alpha=8$ のときの壁面上のうず度である。さきほど図8(a)~(f)で流線とうず度を示したが，壁面上のうず度についてのみ図示するとこのようになる。(c)は $R=16$ ， $\alpha=16$ のときの壁面上のうず度である。このように，同一の

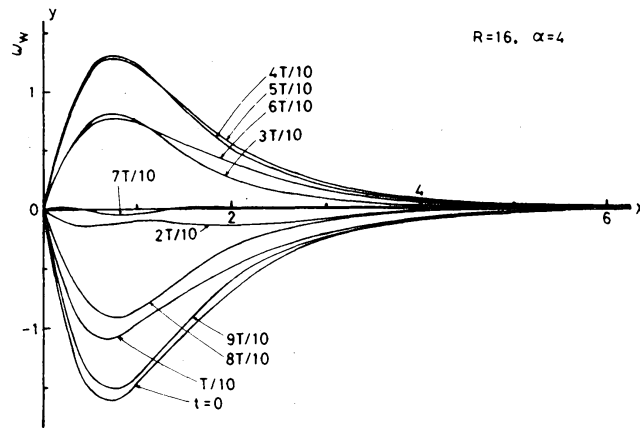
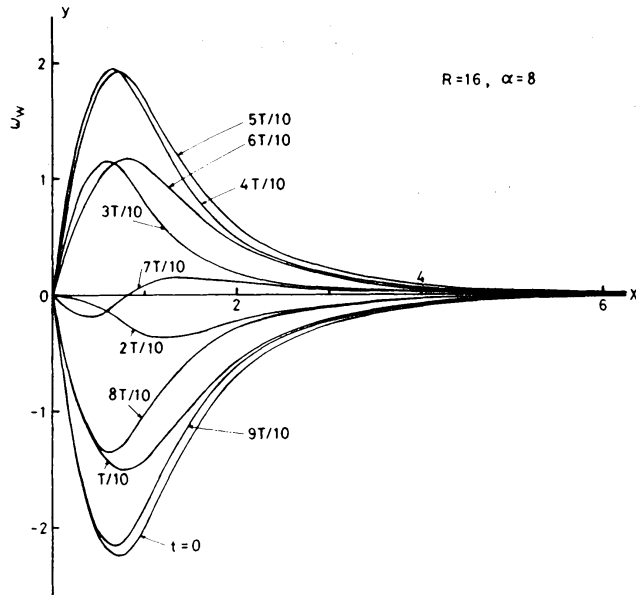
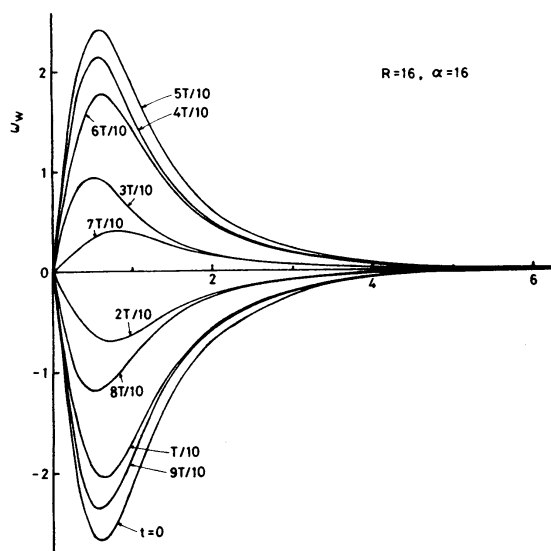
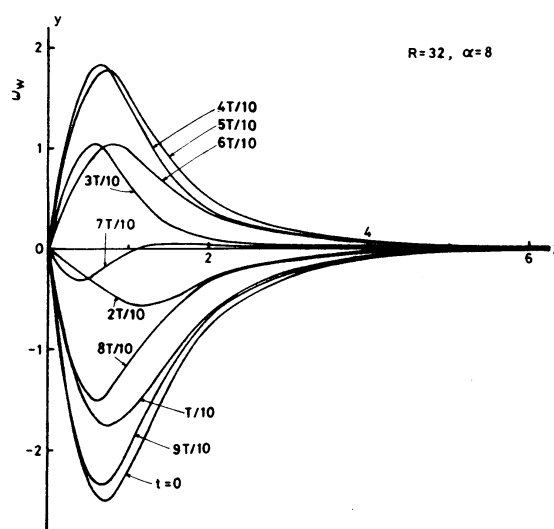


図9(a) 壁面上のうず度の一周期にわたる変化
 $: R=16, \alpha=4$



(b) $R=16, \alpha=8$

(c) $R=16, \alpha=16$ (d) $R=32, \alpha=8$

Reynolds数で置き出し，吸い込みの周期が短くなるとともに，たとえば， $t=0$ における極値は中心($x=0$)に近寄ってくる。(d)は $R=32, \alpha=8$ のときの壁面上のうず度である。同じ振動数(b)の場合と比較すると，壁面上のうず度の絶対値はR数の方がやや大きいことがわかる。

図10は， $R=16, \alpha=8$ のときの壁面上の圧力の1周期にわたる変化を示す。 $t=2T/10$

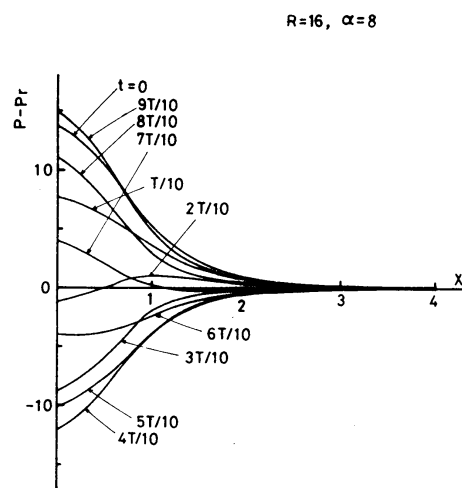


図10 壁面上の圧力

および $7\pi/10$ のとき、壁面上で圧力の符号が逆転する。

§4 非定常 Stokes 流の解析

すでに述べたように、定常 Stokes 流の場合には、解析解と数値解とはよく一致している。しかし、非定常 Stokes 流の場合には、解析解と数値解にちがいがみられた。それを以下に述べる。

図11は、非定常 Stokes 流の解析解^{1), 2)}を壁面上のうず度の絶対値と位相差について

て図示したものである。

ただし、絶対値は規格化のちがいから、数値

解に比べて解析解の方

が π 倍されている。他

方、非定常 Stokes 流の

数値解は図12のようにな

る。解析解と数値解が著しく異なる点はつぎのふたつである。

i) 解析解では、 $x \gg 1$ のとき、壁面上のうず度の絶対値が α/x に比例して減衰するのに対し、数値解では、ほぼ α/x^3 に比例して減衰する。

ii) 解析解では、 $x \gg 1$ で位相のすすみは 45° に近づくが、

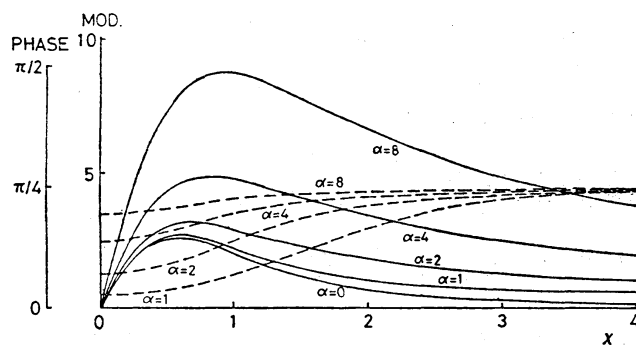


図11 壁面上のうず度の絶対値と位相差：解析解（実線：絶対値，破線：位相差）

数値解では0に
近づく。

つぎに、壁面上の
圧力について調べて
みる。解析解では α
 $\gg 1$ のとき、壁面上
で、

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y=0} \propto -\frac{2\alpha^2 x}{x^2+1} \sin 2\pi t$$

となる。これに対し、数
値解は図13のようになる。
実線が絶対値で破線が位
相差である。解析解と数
値解のちがいは、つぎの
ふたつの点にみられる。

Ⅲ) 解析解では、 $\alpha \gg$
1のとき壁面上の圧
力勾配が $x \gg 1$ で
 α^2/x に比例する。し

たが、て、圧力は無限大となる。これに対し、数値解は
壁面上のすべての点で有限である。

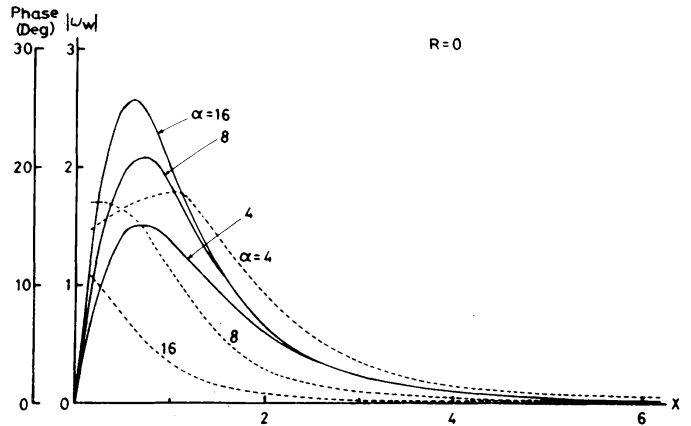


図12 壁面上のうず度の絶対値と位相
差：数値解（実線：絶対値，
破線：位相差）

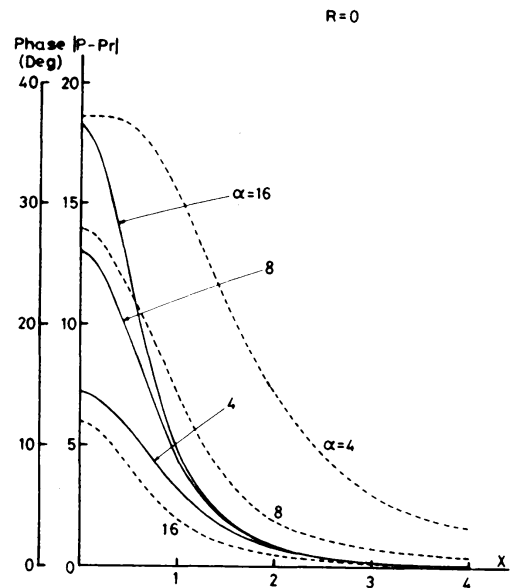


図13 壁面上の圧力

iv) 解析解では、 $\alpha \gg 1$ のとき、壁面上の圧力勾配は $\sin 2\pi t$ に比例する。したがって、圧力に位相差はあらわれない。しかし、数値解では図にみるように位相差があらわれる。この位相差は、図では α が小さいほど大きい。が、 $\alpha \rightarrow 0$ の極限、つまり定常流では 0 になるものと思われる。

最後に数値解析上の問題についてふれておく。いまの問題の場合、特異点をふくんだ無限領域の流れの場を計算しなければならない。式(2.8)における J は、特異点の近くで大きな値になる。そのために、従来の方法（式(3.2)で $R = 0$ ， $\mu = 0$ とおく）では、よほど Δt を小さくしないと解が発散してしまう。従来の方法を使う場合、収束解をうるための Δt のめやすは、

$$\Delta t < \alpha^2 h^2 / 8\pi J^2$$

である。したがって、 $\alpha = 8$ のとき、図 2(b)における ξ_0 を 0.6 とすると $\Delta t < 0.013$ ($\xi_0 = 1.1$ では $\Delta t < 8.8 \times 10^{-4}$) にしないと収束解はえられない。そこで、本報告では式(2.8)で $\mu \neq 0$ として計算を安定化して数値解を求めたのであるが、この方法についてすこし検討をおこなってみる。

表 1 は、 $\alpha = 8$ ， $h = \Delta = 0.1$ ， $\xi_0 = 0.6$ ($I_c = 7$) としたとき、従来の方法による計算結果と本方法による計算結果を比

表1 計算法のちがひによる差異

μ	$\Delta t = 1/100$		$\Delta t = 5/100$		
	1周期め	2周期め	1周期め	2周期め	10周期め
0	-1.796	-1.795	発散		
1	-1.764	-1.746	-1.324	-1.344	-1.394
2	-1.792	-1.725	-1.319	-1.315	-1.395
4	-1.852	-1.752	-1.332	-1.302	-1.380

べたものである。表中の数値は、壁面上の最小うず度をあらわす。 $\mu=0$ は従来の方法である。この表から、つぎのようなことがわかる。 $\Delta t=1/100$ とすれば従来の方法でも収束する。これに対し、本方法では μ の値が大きくなるほど1周期めの値は誤差が大きい。しかし、本方法で $\mu=4$ のとき5周期めの値は-1.771となり、従来の方法による2周期めの値-1.795に近くなる。したがって、解が完全に周期的になれば両者の値は一致するものと思われる。他方、 $\Delta t=5/100$ とすれば、従来の方法では解が求められないが、本方法では収束解をうることができる。しかし、その値は $\Delta t=1/100$ の場合と比べると、その絶対値は小さい（相対誤差は約23%）。これは、このような大きい Δt では、式(2.8)の左辺を離散化する際、 $\partial^2 \omega / \partial t^2$ の項がきいてくるためと考えられる。しかし、このように大きな Δt を使ったために数値解の性質が変わるということは、本研究の範囲内ではなかつた。こうした点に関する検討は、将来の研究にゆだねたい。

表2 本計算での計算周期と相対誤差

R	α	λ	μ	nT	$ (\omega_w^{nT} - \omega_w^{(n-1)T}) / \omega_w^{nT} _{\max.}$
0	4	0	4	10T	2.34 %
	8	0	4	6T	1.74
	16	0	2	6T	0.77
16	4	1	4	10T	1.62
	8	1	2	6T	1.27
	16	1	2	6T	0.67
32	8	1	2	8T	1.34

なお、本計算でおこなった数値計算の計算周期と相対誤差を表2に示す。ただし、 ω_w は壁面上のうず度をあらわす。

§5 むすび

以上の結果より、つぎのことが結論できる。

- (1) 振動数が高くなると、壁面上のずり応力の絶対値（壁面上ではうず度の絶対値と等しい）は増大する。同じ振動数では、レイノルズ数が大きいほど壁面上のずり応力の絶対値は大きくなるが、その効果は、振動数の効果に比べると小さい。
- (2) ここで提示した計算法は、時間の刻みが大きくても安定な計算が可能であるという点で、数値計算上の不安定性を取り除く一つの考え方を示すものである。
- (3) 松信の解析結果と、数値解析結果を比較すると、定常流の場合にはよい一致がみられたが、非定常流の場合には異なった結果がえられた。非定常流の場合の解析解と数

^解値との主な相違点はつぎの通りである。解析解では $x \gg 1$ における壁面上のずり応力の減衰が α/x (α : Womersley 数) に比例するのに対し、数値解ではほぼ α/x^3 に比例して減衰する。また、 $x \gg 1$ における壁面上のずり応力の位相差は、解析解では 45° に漸近するのに対し、数値解では 0 に漸近する。さらに、解析解では $\alpha \gg 1$ のとき、壁面上の圧力は有限でないが、数値解は有限である。

参 考 文 献

- 1) 松信八十男：京都大学数理解析研究所講究録 360 (1979) 159.
- 2) Y. Matunobu: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1354.
- 3) N. Takemitsu: J. Comput. Phys. 36 (1980) 236.