

乱れの Reynolds 数のべき級数に解を展開する方法で、キュムラント展開法などがこれに対応する。第一段階は準正規分布理論とよばれる。この展開も § 4.(b) の逐次近似と同じく、高次近似に進むにつれて解は急速に複雑になる。

(c) 非線型理論

完全な非線型理論はまだない。§ 4.(c)からの類推でいえば、乱れの高波数成分だけに着目した理論が有効であるように思われる。Kolmogorov の局所相似性理論がその思想に基づいているが、運動方程式との結びつけが欠けている。境界層理論の乱流版が待望される。

層流の非線型安定理論

後 藤 金 英 (京大・解理解析研)

1. は じ め に

流体の流れには、層状をなして規則正しく流れる“層流”と、速度・圧力などが平均値からの不規則な変動を伴う“乱流”と、二つの運動状態がある。密度一定の流体を対象とすると、この二つの運動状態は、同一境界条件のもとでは、流れの代表的な速さ U 、長さ L 、および流体の動粘性率 ν から作られる無次元量 UL/ν ($=R$: レイノルズ数) によって区別される。即ち、 R が小さければ、流れは層流であり、ある臨界値より大きくなると、乱れははじめ、やがて乱流となる。この臨界状態は、乱れの発生問題として、理論的には次のように取り扱われる。

層流として、定常運動をとりあげよう。これは、基礎方程式の定常解である。ところで、現実の流体運動では、この定常解に、外部から制御できない微小な乱れが常に伴う。この乱れは、流れのレイノルズ数が臨界値以下であれば減衰し、臨界値を越えると増巾されるとすれば、現象を説明し得る。乱れの強さが無限小であれば、乱れの方程式は線型化可能で、初期値・境界値問題は固有値問題となり、 R の臨界値が定まる。この取り扱いが線型安定理論である。

さて、初期に無限小な乱れは、 R が臨界値以下であれば減衰し定常流は安定であるけれども、有限振巾の乱れについて同じ結論を得るには、乱れの強さ（振巾）に臨界値が存在するであろう。一方、 R が臨界値より大きければ、線型理論の結果では、乱れは時間と共に指数函数的に増大するから、結論は適当な有限時間内しか成立しない。その後の乱れの振舞はどうなるのか。これらの問題を解こうとする試みを非線型安定理論と呼ぶ。

有限振巾の乱れを支配する方程式は、非線型項の一部分を考慮するという形では、古く、1960年代に Noether¹⁾, Heisenberg²⁾ により提案されたが、解を求める試みは、Meksyn と Stuart³⁾ (1951) が最初である。彼らは、二次元 Poiseuille 流の場合、振巾の臨界値を求め、無限小乱れのそれに比べて低い、実験値により近い臨界レイノルズ数を見出した。

エネルギーの流れと乱れの形を仮定して、エネルギー方程式から、乱れの振巾を支配する Landau 方程式を導く事を成功した Stuart⁴⁾ は、同心円筒間の Couette 流が円筒に及ぼすトルクを求め、Taylor⁵⁾ の実験値とよく一致する事を示した。次いで、Stuart⁶⁾ は、状態が微小乱れの臨界状態に十分近ければ、直観的な仮定に頼ることなく、Landau 方程式が得られることを示し、Watson⁷⁾ は乱れの higher harmonics を basic harmonic の振巾で展開することにより、Stuart の理論構成を一層厳密にした。最近、Eckhaus⁸⁾ は乱れを固有函数展開することにより、理論を一段とすっきりさせた。

ここでは問題を一次元のモデルに限って、Eckhaus の取り扱いを紹介するに止める。その結果、乱流特有の高次 harmonics の発生、波数空間のエネルギーの流れなどの問題は消失してしまう。流体力学方程式の具体的な取扱いは、改めて別の機会にゆずろう。

2. 問題の設定

$x(=[-1, 1])$ を空間変数、 $t(=[0, \infty))$ を時間変数とし、 $\phi(x, t)$ が次の拡散型の非線型偏微分方程式に支配されたとする。

$$L(\phi) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi) \quad (2.1)$$

ここに、 L は t を含まない real な線型微分作用素であり、 F は非線型項を表わす。 F の形は ϕ およびその空間微分の積の線型和であって、非線型の次数は高々三次とする。 $x=\pm 1$ で課せられる境界条件は、線型で時間に依らない。境界条件をみたし、時間に独立な(2.1)の解を定常解と呼び、 $\phi_0(x)$ と表す。

$\phi_0(x)$ に伴う乱れ $\phi'(x, t)$ の時間変動を支配する式は

$$\phi(x, t) = \phi_0 + \phi' \quad (2.2)$$

を(2.1)に代入し、

$$L(\phi_0) = F(\phi_0) \quad (2.3)$$

を用いて、

$$L'(\phi') - \frac{\partial \phi'}{\partial t} = F'(\phi') \quad (2.4)$$

となる。ただし

$$L'(\phi') = L(\phi') + \{F(\phi_0) - F(\phi_0 + \phi')\} \text{ の } \phi' \text{ についての線型項,} \quad (2.5)$$

$$F'(\phi') = \{F(\phi_0 + \phi') - F(\phi_0)\} \text{ の } \phi' \text{ についての非線型項} \quad (2.6)$$

境界条件は

$$x = \pm 1 \quad \text{での斉次条件。} \quad (2.7)$$

ϕ_0 の安定性の問題は、(2.7)に従う(2.4)の解 ϕ' を求め、その時間依存を調べる問題となる。

3. 線型問題

ϕ' が十分小さい(例えば $\max_x \phi'(x, 0)$ が十分小さい)場合には、(2.4)の右辺は省略可能となり、安定性問題は、(2.7)のもとに

$$L'(\phi') - \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

一次元素の非線型力学

を解くことになる。(3.1)の解は

$$\phi' = \sum_n b_n e^{-\mu_n t} \varphi_n(x) \quad (3.2)$$

の形に求めることが出来る。ここに、 $\varphi_n(x)$ は

$$L'(\varphi_n) + \mu_n \varphi_n = 0 \quad (3.3)$$

の解で(2.7)をみたし、 μ_n は対応する固有値を示す。 b_n は初期条件から決まる定数。任意の初期条件を満たすためには、 φ_n が完全系を作る事の証明が必要であるが、ここではそれを仮定する。固有値は大きさの順に添字をつけたものとする。

$$\operatorname{Re}[\mu_n] < \operatorname{Re}[\mu_{n+1}], \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

解(3.2)の時間依存は、各成分の時間依存 $\exp[-\mu_n t]$ で決る。総ての n に対して $\operatorname{Re}[\mu_n] > 0$ なら、 $|\phi'| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)であり、 μ_n の中に1つでも $\operatorname{Re}[\mu_n] < 0$ となるものがあれば $|\phi'| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$)となる。前の場合、“ ϕ_0 は微小乱れに対して安定である”といい、後の場合“不安定である”という。

(3.1)式が、パラメター R を含み、 $R < R_c$ なら、全ての n に対して $\operatorname{Re}[\mu_n] > 0$, $R = R_c$ なら $\operatorname{Re}[\mu_0] = 0$, $R > R_c$ なら μ_n のうちいくつかは $\operatorname{Re}[\mu_n] < 0$ となる時、 R_c を R の臨界値という。種々の ϕ_0 について R_c を求めることが、線型問題の目的である。

4. 乱れの固有函数展開

有限な ϕ' を、線型方程式の固有函数 φ_n で展開することを試みよう。 φ_n の系が完全であれば、各瞬間に ϕ' を φ_n で展開することは常に可能である。

$$\phi' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(x) \quad (4.1)$$

(4.1)を(2.4)に代入し、(3.3)を用いると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d A_n}{d t} + \mu_n A_n \right) \varphi_n = -F'(\Phi') . \quad (4.2)$$

$x = [-1, 1]$ で φ_n と直交する正規函数系を $\tilde{\varphi}_n$ で表わすと (4.2) から直ちに

$$\frac{d A_n}{d t} + \mu_n A_n = - \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_n F'(\Phi') dx , \quad (4.3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

が得られる。 $F'(\Phi')$ は Φ' について高々三次と仮定しているから (4.3) の右辺は

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n)} A_i A_j + \sum_{i,j,r=0}^{\infty} \beta_{ijr}^{(n)} A_i A_j A_r \quad (4.4)$$

となる。線型理論の知識が完全で、 $F'(\Phi')$ が具体的に与えられれば、 μ_n 、 $\alpha_{ij}^{(n)}$ 、 $\beta_{ijr}^{(n)}$ は全て既知の定数となるから、(4.3)、(4.4) は振巾函数 A_n の時間変化を決定する。

5. 簡単な場合

(4.4) を A_n について整理すると

$$\beta^{(n)} A_n^3 + [\alpha^{(n)} + \psi_2^{(n)}] A_n^2 + [-\mu_n + \psi_1^{(n)}] A_n + \psi_0^{(n)} \quad (5.1)$$

となる。ここに、 $\alpha^{(n)}$ 、 $\beta^{(n)}$ は定数、 $\psi_k^{(n)}$ は A_m ($m \neq n$) に依存するが定義の詳細は略す。

問題を簡単化して、 $\psi_k^{(n)}$ が A_m ($m < n$) のみの函数であるとする、(4.3)、(4.4) は $n = 0$ から順次解くことが出来る。特に $n = 0$ の場合は、

$$\frac{d A_0}{d t} = \beta^{(0)} A_0^3 + \alpha^{(0)} A_0^2 - \mu_0 A_0 \quad (5.2)$$

となる。 $\alpha^{(0)} = 0$ のとき、Landau 方程式となる。

$$A_0^{(1)} = (2\beta^{(0)})^{-1} [\alpha^{(0)} + \sqrt{D}]$$

$$\left. \begin{aligned} A_0^{\infty(2)} &= (2\beta^{(0)})^{-1} [\alpha^{(0)} - \sqrt{D}] \\ D &= [\alpha^{(0)}]^2 + 4\mu_0\beta^{(0)} \end{aligned} \right\} (5.3)$$

とおくと (5.3) は,

$$\frac{dA_0}{dt} = \beta^{(0)} A_0 (A_0 - A_0^{\infty(1)}) (A_0 - A_0^{\infty(2)}) \quad (5.4)$$

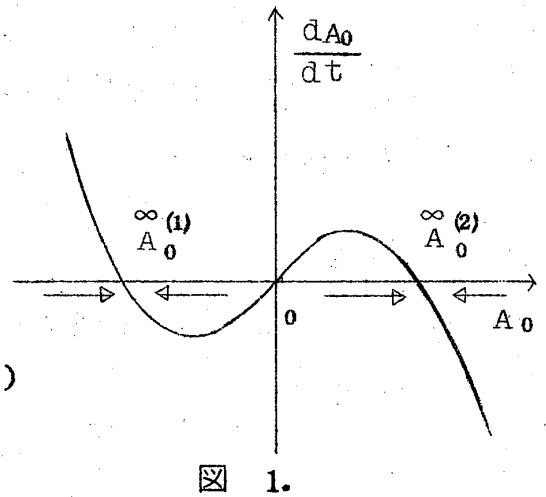
となる。 A_0 の時間依存は、位相面 $(A_0, \frac{dA_0}{dt})$ を用いて、容易に理解される。特に興味深い結果を述べよう。簡単のため $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \mu_0$ は全て実数とする。

5.1. $\beta^{(0)} < 0, \mu_0 < 0$ の場合

位相面でのグラフは図 1 のようになる。

図中矢印は A_0 が時間の経過と共に変化する方向を示す。これから直ちに次の結論が出る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_0 = \begin{cases} A_0^{\infty(1)}, & A_0(0) < 0; \\ A_0^{\infty(2)}, & A_0(0) > 0; \\ 0, & A_0(0) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$



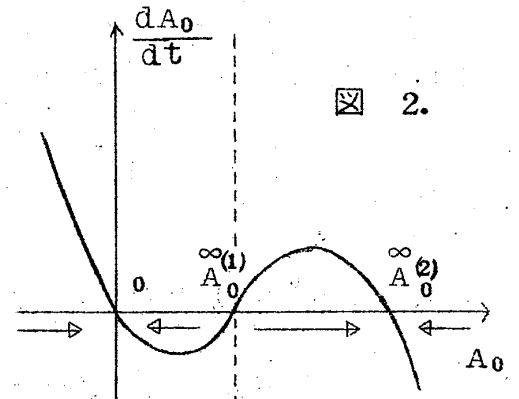
ϕ_0 は不安定であるけれども、乱れは有限の漸近値をもつことがわかる。

5.2. $\beta^{(0)} < 0, \alpha^{(0)} < 0, \mu_0 > 0, D > 0$ の場合

(5.4) は位相面で図 2 のようになる。

従って,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_0 = \begin{cases} 0, & A_0(0) < A_0^{\infty(1)}; \\ A_0^{\infty(2)}, & A_0(0) > A_0^{\infty(1)}. \end{cases} \quad (5.6)$$



この場合、 ϕ_0 は初期値が $A_0^{\infty(1)}$ より小さな乱れに対しては安定であるが、 $A_0^{\infty(1)}$ を

越す乱れに対しては、不安定となり A_0 は $A_0(0)$ の臨界値であって、漸近値ではない。

A_0 の時間依存がわかれば順次 A_n を解くことが出来るが、省略する。

6. 一つの漸近解

再び (3.4), (4.4) にもどる。前節では特に簡単な場合の解を調べたが、この節では、もう少し自然に考察を進めよう。ただし μ_n に実数としておく。

3. で触れたように、 $R=R_0$ では $\mu_0=0$, $\mu_n>0$ ($n=1, 2, \dots$) であったから、 R_0 に十分近い R に対しては、 $\mu_0 \approx 0$, $\mu_n(>0)=0(1)$ ($n=1, 2, \dots$) が期待される。この節では、 μ_0 が十分 0 に近い状態の漸近解を求める。簡単のため $a_{ij}^{(n)}=0$ とする。

$\lim_{t \rightarrow \infty} A_n$ を $\bar{A}_n$ で表し、 $d\bar{A}_n/dt=0$ とすると、 $\bar{A}_n$ を決める方程式は (4.3), (4.4) から

$$\bar{A}_n = (\mu_n)^{-1} \sum_{i,j,r=0}^{\infty} \beta_{ijr}^{(n)} \bar{A}_i \bar{A}_j \bar{A}_r \quad (6.1)$$

となる。スケール変換：

$$\bar{A}_n = \epsilon \delta_n \bar{a}_n, \quad \epsilon = |\mu_0|^{1/2}, \quad \delta_n = |\mu_0/\mu_n|, \quad (6.2)$$

により、(6.1)は

$$\bar{a}_n = \frac{|\mu_n|}{\mu_n} \sum_{i,j,r=0}^{\infty} \beta_{ijr}^{(n)} \delta_i \delta_j \delta_r \bar{a}_i \bar{a}_j \bar{a}_r \quad (6.3)$$

となるが、 n と共に δ_n が十分早く小さくなれば、1 程度の $\bar{a}_n$ に対して (6.3) の和は有限個で打切ることが出来る。

$$\bar{a}_n = \frac{|\mu_n|}{\mu_n} \sum_{i,j,r=0}^{m-1} \beta_{ijr}^{(n)} \delta_i \delta_j \delta_r \bar{a}_i \bar{a}_j \bar{a}_r + O(\delta_m) \quad (6.4)$$

が成り立つとしよう。(6.4) の $\mu_0 \rightarrow 0$ なる漸近解は

一次元素の非線型力学

$$a_0^\infty = \frac{|\mu_0|}{\mu_0} \beta_{000}^{(0)} a_0^3 + O(\epsilon^2), \quad (6.5)$$

$$a_n^\infty = \beta_{000}^{(n)} a_0^3 + O(\epsilon^2), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (6.6)$$

で決る。

6.1. 弱不安定 ($\mu_0 = 0-$) の定常解

$\mu_0 < 0$ の時, (6.5) は $\beta_{000}^{(0)} < 0$ に限り, 解

$$a_0^\infty = \pm |\beta_{000}^{(0)}|^{-\frac{1}{2}} + O(\epsilon^2) \quad (6.7)$$

を許す。この場合, 線型近似で減衰する a_n ($n=1, 2, \dots$) が有限値に漸近する。

6.2. 弱安定 ($\mu_0 = 0+$) の定常解

$\mu_0 > 0$ に対しては, (6.5) は $\beta_{000}^{(0)} > 0$ に限り (6.7) の解を許す。ただし, 次節でわかるように, これは $t \rightarrow \infty$ の漸近解ではない。

7. 漸近解の時間依存

(6.2) の ϵ , δ_n を用いて, $A_n = \epsilon \delta_n a_n$ とすると, (4.3)(4.4) は

$$\frac{da_n}{dt} = -\mu_n \left\{ a_n - \frac{|\mu_n|}{\mu_n} \sum \beta_{ijr}^{(n)} \delta_i \delta_j \delta_r a_i a_j a_r \right\}, \quad (7.1)$$

となり, $\epsilon \rightarrow 0$ に対しては,

$$\frac{da_0}{dt} = -\mu_0 a_0 \left\{ 1 - \frac{|\mu_0|}{\mu_0} \beta_{000}^{(0)} a_0^2 \right\}, \quad (7.2)$$

$$\frac{da_n}{dt} = -\mu_n \left\{ a_n - \beta_{000}^{(n)} a_0^3 \right\}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (7.3)$$

となる。5. に示したように, 位相面で (7.2), (7.3) の解の動きを調べると, 弱不安定の場合には $t \rightarrow \infty$ と共に (6.7), (6.6) に漸近することがわかる。一

方弱安定の場合には, (6.7) は, 有限乱れの初期値に対する臨界値を与え, $|a_0(0)|$ が (6.7) の $|\tilde{a}_0|$ を越えると, a_n は時間と共に限りなく増大し, 仮定と矛盾する。

流体力学方程式の一次元モデルとしてよく知られた Burgers 方程式については, 固有函数 φ_n が三角函数となるから, 取扱いは容易である。しかし流体力学方程式を直接扱う場合には, 線型問題の特異性に起因する困難が常に障害となる。いずれにしても, 数値解をも含めて, 線型理論から量的に異なる非線型解を得るべく努力が必要と思われる。

文 献

- 1) Noether, F. Z.A.M.M. 1(1921) 125-138.
- 2) Heisenberg, W. Ann. Phys. Lpz. 74(1924)577-627.
- 3) Meksyn, D. and Stuart, J. T. Proc. Roy. Soc. A 208(1951) 517-526.
- 4) Stuart, J. T. J. Fluid Mech. 4(1958) 1-21.
- 5) Taylor, G. I. Phil. Trans. Roy. Soc. A 223(1923) 289-343.
- 6) Stuart, J. T. J. Fluid Mech. 9(1960) 353-370.
- 7) Watson, J.J. Fluid Mech. 9(1960) 371-389.
- 8) Eckhaus, W. "Studies in Non-Linear Stability Theory" (1965) springer.

非線型鎖の振動理論

戸 田 盛 和

線型の力で結ばれた振動子の集まりには規準振動があり, 励起された規準振動は時間的に不変である。したがって線型の振動子系は熱的平衡状態への近接を