

ステファン問題の古典解

東北大 理 半沢英一

1. (一相)ステファン問題は氷の溶解の数学的モデルでその方程式は次のような考えのもとにたてられます。

- (1) *unknown* は氷の形状の変化とする。
- (2) 氷の温度は 0°C とする。(氷の温度分布まで考えるのが二相問題)
- (3) 水温 $u^{\circ}\text{C}$ は拡散方程式 $(\partial_t - \Delta)u = 0$ に従う。
- (4) 氷の境界は水温の法線方向勾配に比例した速さで溶けていく。

これは一つの典型的な自由境界問題で約90年の歴史をもち、今日まで多くの研究がなされています。その研究状況においていちぢるしいと思われることは、空間2次元以上の場合

古典的な意味での解の存在(もちろし時間局所的)が証明されていなかたことです。現実におれおれがみる氷の溶解は



3次元ステファン問題に対応しているわけですから、素朴な未解決問題がここにあるわけです。ここに古典的というのは、(4) から氷の表面が少くとも一階の微係数をもつということです。弱解がリップシッツ連続となることは多くの場合にいえ、ゆえに上の問題は“not so open”という人がいますが、リップシッツ連続では古典的な意味での解とはいえませんが、

筆者はナッシュの陰関数定理を用いることによって2次元以上のステファン問題についても古典解が存在することも証明しました。ここでは技術的細部にたづねることはやめ、ナッシュの陰関数定理とステファン問題との関連ということに焦点をしぼり、次の三つの問を設定しそれに答えるという形で解説をします。

問1 ナッシュの陰関数定理とは何か？

問2 なぜ2次元以上のステファン問題にナッシュの陰関数定理が必要なのか？

問3 ナッシュの陰関数定理を使用することがステファン問題の性格をどのように明らかにしているか？

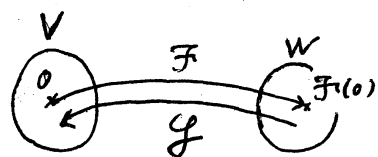
問3はそれが単なる形式的な応用ではなく発見法的にはたらいたことをいいたいための設問です。

2. 陰関数定理の説明からはじめます。次の定理は大学の

教養課程で学ぶものです。

陰関数定理. $\mathbb{R}^d$ を d 次元ユークリッド空間, V を $\mathbb{R}^d$ の 0 の近傍, f は V から $\mathbb{R}^d$ への写像で, ① 連続的微分可能, ② $\det (Df(x_i)/Dx_i) \neq 0$ on V , なるものとする。このとき $f(0)$ の近傍 W と $g: W \rightarrow V$ がとれて $f \circ g = \text{id}$. とできる。

上記の定理は全く努力を要せず
無限次元バナッハ空間に拡張され,
多くの関数方程式の解がそれによ



て求まるということは周知のことです。この場合 f をバナッハ空間 E での 0 の近傍 V からバナッハ空間 F への写像, ① を線型化可能 i.e. フレッシュ微分可能, ② を $p \in V, \delta G \in F$ に対して線型化方程式 $Df(p) \delta p = \delta G$ が解 $\delta p \in E$ をもつということになおしたとき, $f(0)$ が十分小さいならば $f(p) = 0$ の解 $p \in V$ の存在が保証されるわけです。こうしてみると上記の定理は非線型方程式の可解性を線型化方程式の E での可解性に帰着せしめる原理ともいえます。

上の「 E での」という限定をおとせないでしょうか。というのは具体的な問題で

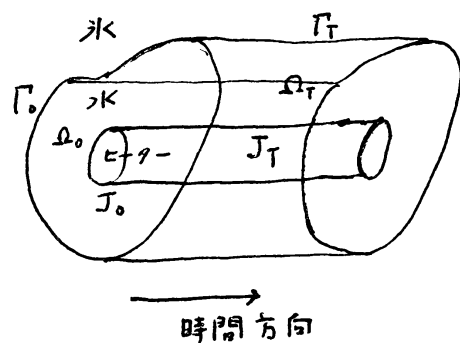
$V \subset \mathbb{C}^m$, $f: V \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$, 当然 $Df(p): \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ であり, $Df(p) \delta p = \delta G$ も解けるのだが, 解 δp が $\mathbb{C}^m$ で求まらずより *regularity* の悪いところではかえられないう。i.e.

$$[D\mathcal{F}(\rho)]^{-1}: C^{m-k} \longrightarrow C^{m-l}, \quad l > 0$$

ではないということがおこるからです。このような現象を *derivative loss* といいます。ナッシュは *derivative loss* がおこっているときでも陰関数定理が成立することを証明しました。つまり $\mathcal{F}(0)$ が十分小さいとき、一般に $\mathcal{F}(\rho) = 0$ の可解性は $D\mathcal{F}(\rho)\delta\rho = \delta G$ の可解性に帰着されます。*derivative loss* のない場合は通常の、ある場合はナッシュの陰関数定理によります。ここで注意しますが、ナッシュの陰関数定理をみられた方はそれが、と複雑なものであ、たといわれるでしょう。確かにそれは検証がそれほど容易でないいくつかの仮定を要求します。ただそれらの検証は、応用する問題の特殊性と独立に、関数空間についての技術的議論によって可能と思われまゝ。(ここは専門家が体系立てなければならぬところ) したがってここでは上のようによりきります。これが問1の答です。

こうしてみると、問2は「ステファン問題を線型化して解こうとするとき、なぜ1次元では *derivative loss* がおこらず、2次元以上ではおこるか？」ということですし、問3はおおげさな話ではなく「ステファン問題を線型化させ、微分することにより何がおこるか？」という高校数学的設問であることがわかります。

3. ステファーン問題を数学的に定式化します。以下でとく
る領域の境界や関数は適当なだけなめらかとします。氷を外
側にと、次のような設定で
考えます。



Ω_0 ; $\mathbb{R}^n$ の有界領域, 最初
の水の部分を表す。

J_0 ; Ω_0 の内部境界, ヒーター
の表面を表す。

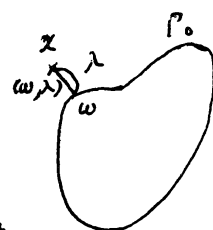
Γ_0 ; Ω_0 の外部境界, 氷の表面を表す。

$T > 0$ として, $\Omega_T = \Omega_0 \times [0, T]$, $J_T = J_0 \times [0, T]$,

$\Gamma_T = \Gamma_0 \times [0, T]$ とする。

Γ_0 の近傍の点 x には $\mathbb{R}^n$ の標準座標 $(x_1, \dots, x_n)$ の他に次のよう
に (ω, λ) 座標を導入します。

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$; x に最も近い Γ_0 上の
点の Γ_0 での局所座標。



λ ; x に最も近い Γ_0 上の点と x との距離。

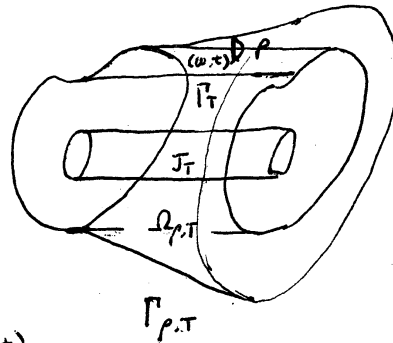
ステファーン問題の *unknown* は氷の形状の変化でした。それは
数学的には Γ_T 上の十分小さい関数 ρ で $\rho|_{t=0} = 0$ となるものに
より

$$\Gamma_{\rho, T} = \{(\omega, \rho(\omega, t), t); (\omega, t) \in \Gamma_T\}$$

と表されます。ここに $(\omega, \rho(\omega, t))$ は上記の (ω, λ) 座標です。

そこでこのような ρ をそれぞれの問題の *unknown* とします。

また次のように領域 $\Omega_{\rho,T}$ と Γ_T の近傍での関数 Ξ_ρ を導入します。



$\Omega_{\rho,T}$; $\Gamma_{\rho,T}$ と J_T とで囲まれる領域.

Ξ_ρ ; $\Xi_\rho(\alpha, t) = \lambda(\alpha) - \rho(\omega(\alpha), t)$, ここに $(\omega(\alpha), \lambda(\alpha))$ は α の (ω, λ) 座標.

$\Gamma_{\rho,T}$ は $\Xi_\rho(\alpha, t) = 0$ という方程式で表されます。

以上の準備をすると, ρ の運動を記述する方程式は, 序文でいったことを数式で書いて次のようになります。

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } (\partial_t - \Delta) u = 0 \text{ in } \Omega_{\rho,T}. \\ \text{II. } u|_{t=0} = a_0, \text{ ここに } a_0 \text{ は } \Omega_0 \text{ 上の非負値関数.} \\ \text{III. } u = b_0 \text{ on } J_T, \text{ ここに } b_0 \text{ は } J_T \text{ 上の非負値関数.} \\ \text{IV. } u = 0 \text{ on } \Gamma_{\rho,T}. \\ \text{V. } \partial_t \Xi_\rho - C_0 \langle \text{grad } \Xi_\rho, \text{grad } u \rangle = 0 \text{ on } \Gamma_{\rho,T}, \end{array} \right.$$

ここには C_0 は正定数, $\langle, \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ での標準内積.

II, III はそれぞれ最初の水温とヒーターからの温度供与がデータとして与えられていることの数式化です。ここに a_0 と b_0 は適当な *compatibility condition* をみたしていただきます。上の系で u も *unknown* といえるわけですが, u は I ~ IV から ρ で決まる関数ともみなせ, ρ のみが *unknown* ともいえ

るわけですが。以下この見方をとります。今、 Γ_T 上の十分小さく初期値が0の関数 ρ に、 Γ_T 上の関数

$$(\omega, t) \longmapsto [\partial_t \mathbb{E}_\rho - c_0 \langle \text{grad } \mathbb{E}_\rho, \text{grad } u \rangle](\omega, \rho(\omega, t), t)$$

を対応させる非線型作用素系を考えると、 $I \sim V$ は $\mathcal{F}(\rho) = 0$ とかけます。

4. 適当な仮定と適当な関数空間の設定のもとで、 T が十分小さいとき $\mathcal{F}(0)$ は小さいとできます。したがって $\mathcal{F}(\rho) = 0$ の解の存在をいうには、通常のものにせよブッシュのものにせよ陰関数定理によって、線型化方程式 $D\mathcal{F}(\rho) \delta \rho = \delta G$ が解けることをいえばよいわけです。線型化方程式が具体的にはどんな形をしているかということ、ある程度直観的にわかるのですが、次のような系になります。信用して下さい。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}'. \quad (\partial_t - \Delta) \delta u = 0 \text{ in } \Omega_{\rho, T}. \\ \text{II}'. \quad \delta u|_{t=0} = 0. \\ \text{III}'. \quad \delta u = 0 \text{ on } J_T. \\ \text{IV}'. \quad \delta u + (\partial_\lambda u) \delta \rho = 0 \text{ on } \Gamma_{\rho, T}. \\ \text{V}'. \quad \mathcal{H} \delta \rho = -c_0 S \partial_\lambda \delta u + \delta G \text{ on } \Gamma_{\rho, T}, \\ \text{ここに } \mathcal{H} \text{ は } \Gamma_{\rho, T} \text{ 上の } \partial_t + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\omega, t) \partial_{\omega_i} + a_0(\omega, t) \\ \text{という形の微分作用素, } S \text{ は } \Gamma_{\rho, T} \text{ 上の正値関数.} \end{array} \right.$$

上記の系において、 $\Gamma_{\rho, T}$ の座標として Γ_T の座標を使っている

す。そのことから $\delta\rho, \delta G$ は $\Gamma_{\rho,T}$ の上の関数とみなしていま
す。 V' の右辺に δu の ∂_{ω_i} 微分がないようにできるのは, IV
の $u=0$ on $\Gamma_{\rho,T}$ から V の右辺に u の ∂_{ω_i} 微分がないとみなせ
るからです。I~ V' のときと同様, δu は I'~ IV' から $\delta\rho$ で
決まる関数とみなしてします。

I'~ V' を解くために, これを $\delta\rho$ と δu の連立方程式と考
え, 中学数学的に未知数を一つ消します。単独一階線型偏微
分方程式は特性曲線上で線型常微方程式となるから, V' は

$$V'. \quad \delta\rho = -c_0 \mathcal{H}^{-1} S \partial_\lambda \delta u + \mathcal{H}^{-1} \delta G$$

とかきなおせます。ここに $\mathcal{H}^{-1}$ は初期値0の解を対応させて
いるとします。 V' を IV' に代入すると次の δu のみの系がえら
れます。

$$\begin{cases} I''. & (\partial_t - \Delta) \delta u = 0 \text{ in } \Omega_{\rho,T}. \\ II''. & \delta u|_{t=0} = 0. \\ III''. & \delta u = 0 \text{ on } J_T. \\ IV''. & \delta u - c_0 (\partial_\lambda u) \mathcal{H}^{-1} S \partial_\lambda \delta u = -(\partial_\lambda u) \mathcal{H}^{-1} \delta G \text{ on } \Gamma_{\rho,T}. \end{cases}$$

こうして $D\mathcal{F}(\rho) \delta\rho = \delta G$ を解くことは上記の I'~ IV' を解くこ
とに帰着されました。ここが証明の技術的難関で, 解法をみ
ていくことはできませんが以下のことを信用して下さい。

方程式の *tangential part* i.e. δ のついている部分のみを
問題とします。ノルムは放物型方程式のシャウダー評価で便

う, 時間方向の *regularity* を通常の 2 倍に *weight* づけたヘルダー・ノルムとします。そのとき $I' \sim IV''$ は次のように解けます。

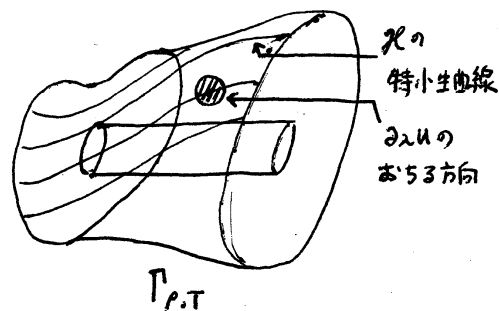
(1) 一般に $\delta G \mapsto \delta u$ は *regularity* をあげもさげもしないで保つ作用素となる。

(2) $n=1$ のときは $\delta G \mapsto \delta u$ は 2 だけ *regularity* をあげる。なぜ (1) と (2) で差異が生じるかは, $n=1$ のとき $\mathcal{H}$ が $\partial_t + a_0(t)$ となり $\mathcal{H}^{-1}$ が *regularity* を 2 あげている (*weight* に注意) ことから納得してもらえると思います。この δu を V'' に代入することによって

$$[D\mathcal{F}(\rho)]^{-1}: \delta G \mapsto \delta \rho$$

をえます。

5. こうして, 1次元ステップン問題では *derivative loss* がおこらず, 2次元以上ではおこる理由がわかります。予は *regularity* を 2 おとしているので, *derivative loss* が無いということは $\delta G \mapsto \delta \rho$ が *regularity* を 2 あげているということです。2次元以上の場合は $\delta G \mapsto \delta \rho$ が *regularity* をあげるところをおとしていることが, V'' の中の $\mathcal{H}^{-1}[\delta u]$



の形からわかります。そこでは δG に対して δu であがりさがりがなく、 $2\lambda\delta u$ で1おち、 $\mathcal{H}^1$ で $\mathcal{H}$ の特性曲線にそ、てあがるのですが、 $2\lambda\delta u$ のおち方は $\mathcal{H}$ の特性曲線にそ、ておちているのではないので、ここに本質的な *loss* が生じているわけです。1次元の場合は δG に対して δu で2あがり、 $2\lambda\delta u$ で1さがり、 $\mathcal{H}^1$ で2あがるので、結局3あがり、*loss* は生じません。これで問2の答がえられました。

6. ステファン問題を線型化することによって何がわかったかを考えます。前節の考察がその一つの答です。そこで2次元以上のステファン問題の難しさの性格が明らかになっています。つまり領域内の拡散方程式と境界上の一階方程式がどちらか一方を解いても(ここでは一方をしか解いてないが、もう一方は明らか)他方が非有界部分としてあらわれ、その結果 *derivative loss* が生じています。(このことはどんな類の問題にナッシュの陰関数定理が有効かを暗示している。)

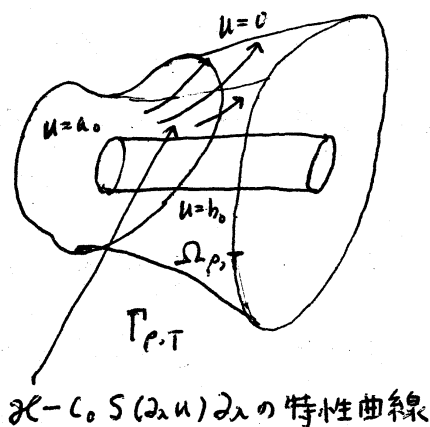
最後にもう一ついっておきたいのは、これが証明の中で一番面白いと本人は思ったところですが、 $I'' \sim IV''$ をとく際に、単に物理的な限定条件、せいぜい数学的には氷の単調減少を保証する程度の条件と思われた $a_0 \geq 0$, $b_0 \geq 0$ が、 $I'' \sim IV''$ が可解であるための条件となっていることがわかったことです。

ちょっと説明すると, $I' \sim IV'$ を解く過程で, IV' の左辺の形式的変形

$$\delta u - c_0(2\lambda u) \mathcal{L}^T S 2\lambda \delta u = S^{-1} [\mathcal{L} - c_0 S(2\lambda u) 2\lambda] \mathcal{L}^T \delta u$$

の中に現れる作用素 $\mathcal{L} - c_0 S(2\lambda u) 2\lambda$ を $\Omega_{\rho, T}$ に拡張して, $t=0$ で初期条件が与えられているコーシー問題をとかなければならない局面に出会います。

この場合 $t=0$ で Ω_0 から出発する特性曲線の族が $\Omega_{\rho, T}$ をカバーしていなければなりません。それは $-c_0 S(2\lambda u)$ が $\Gamma_{\rho, T}$ で非負だと保証されます。 c_0 は正定数,



S は正値関数だから, $2\lambda u \leq 0$ on $\Gamma_{\rho, T}$ ということです。これは $u=0$ on $\Gamma_{\rho, T}$ ですから, $a_0 \geq 0, b_0 \geq 0$ と拡散方程式の最大値原理からいえます。この考察はステファソン問題の方程式が数学的になかなかよくできていることを示しているようにも思えます。上記のことから質問の答になっていることを希望します。

参考文献.

- (1) 山口昌哉・野木達夫, ステファソン問題, 産業図書, 教理解析とその周辺シリーズ17.

- (2) Ei-ichi Hanzawa, Classical solutions of the Stefan problem, to appear in Tohoku Math. J..