

Ising モデルの相境界線とブラウン運動

神子大 理 樋口保成

§1. Ising Model

$\mathbb{Z}^2$ を平面正交格子、 $\mathbb{L}$ をその dual 格子とする。 i.e.

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2); x_1, x_2 \text{ は integers } \},$$

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \}.$$

$\mathbb{L}$ 上の各点には ± 1 の値をとるスピンが配置されているものとし、その配置のしかた (Configuration) 全体を Ω とかく。 $\mathbb{L}$ 上に配置されたスピンは互に隣のスピンと相互作用しあっている。今、configuration $\omega \in \Omega$ が与えられた時、 x 上のスピンは $\sigma(x)$ とその隣の点 y 上のスピンは $\sigma(y)$ の間には、

$J\sigma(x)\sigma(y)$ の相互作用が働いている。 $J > 0$ のとき相互作用は反強磁性的、 $J < 0$ のとき強磁性的、 $J = 0$ のとき相互作用なしである。ここでは $J < 0$ のときのみを考える。 $J = -1$ としても一般性は失われないので以下、 $J = -1$ のみを考える。

$$N \text{ を正整数, } \mathbb{V}_N \equiv \{(x_1, x_2) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); 0 \leq x_1 \leq 2N-1, \\ -N \leq x_2 \leq N-1 \}$$

とあく。 Configuration $\sigma \in \Omega$ のときの V_N に関するエネルギー $E_{V_N}(\sigma)$ は

$$E_{V_N}(\sigma) = - \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \text{ or } y \in V_N}} \sigma(x) \cdot \sigma(y) - \sum_{x \in V_N} h \sigma(x)$$

で与えられる。ただし $\sum_{\langle x, y \rangle}$ は x と y が隣合う pair $\langle x, y \rangle$ についての和、 h は外部磁場の強さとする。 ($h \in \mathbb{R}$) 上の式第一項には x か y が V_N に入っており、他方が V_N に入っていない pair $\langle x, y \rangle$ が現われている。このような pairs から出てくる部分和の項 $\sum_{\langle x, y \rangle, x \in V_N, y \notin V_N}$ を boundary term と呼ぶことにする。 $\omega \in \Omega$ が与えられた時、 V_N の外部の configuration を ω に fix する。この時得られる上式のエネルギー $E_{V_N}^\omega(\sigma)$ とかくことにする。 $E_{V_N}(\sigma)$ と $E_{V_N}^\omega(\sigma)$ の差は boundary term にだけ現われる。温度 $T > 0$ のときの $E_{V_N}^\omega(\cdot)$ に対応した Gibbs 場 ($E_{V_N}^\omega(\cdot)$ に対する平衡状態) は次の式で与えられる $\Omega_N = \{+1, -1\}^{V_N}$ 上の確率である。

$$(1) \quad P_N^\omega(\sigma) = [Z_N^\omega]^{-1} \exp \{ -\beta E_{V_N}^\omega(\sigma) \}$$

$$Z_N^\omega = \sum_{\sigma' \in \Omega_N} \exp \{ -\beta E_{V_N}^\omega(\sigma') \}$$

ただし、

$$\beta = 1/kT, \quad k \text{ は Boltzmann const.}$$

勝手な $N > 0$ と $\omega \in \Omega$ に対して上の様にして Gibbs 場 P_N^ω が定まるが、この系 $\{P_N^\omega; N > 0, \omega \in \Omega\}$ は次の様な consistent

関係と成る。といる。

$V_1 \subset V_2$, $\sigma_1 \in \Omega_{V_1}$, $\sigma_2 \in \Omega_{V_2 \setminus V_1}$ とし, $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \in \Omega_{V_2}$ の元で $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(x) = \sigma_1(x)$ if $x \in V_1$, $\sigma_2(x)$ if $x \in V_2 \setminus V_1$ とおくとき,

$$(2) \quad P_{V_2}^\omega(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = P_{V_1}^{\sigma_2 \cdot \omega}(\sigma_1) P_{V_2}^\omega(\{\sigma'; \sigma'(x) = \sigma_2(x) \forall x \in V_2 \setminus V_1\})$$

$\sigma_2 \cdot \omega$ の定義も $V_2 \setminus V_1$ と $\mathbb{L} \setminus V_2$ に分けてこの様に定義したものととする。(2)式を見よと $P_{V_1}^{\sigma_2 \cdot \omega}$ は $P_{V_2}^\omega$ の $V_2 \setminus V_1$ 上で σ_2 とするという条件をつけた条件付き確率に成る。といる。従って自然に $\mathbb{L}$ 上の Gibbs 場が次の様に定義できることになる。

定義 Ω 上の確率測度 μ が Gibbs 場 であるとは、任意の有限 $V \subset \mathbb{L}$ と任意の $\sigma \in \Omega_V = \{+1, -1\}^V$ に対して

$$\mu(\sigma | \mathcal{B}_{V^c})(\omega) = P_V^\omega(\sigma) \quad \mu\text{-a.e. } \omega$$

が成り立つことである。ただし $\mathcal{B}_{V^c} = \sigma\{\omega(x), x \in V^c\}$ とする。 $\mu(\cdot | \mathcal{B}_{V^c})(\omega)$ は V^c 上 ω であるという条件を付けたときの μ の条件付き確率。

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\beta, h)$ をすべての Gibbs 場 (パラメータは β と h に fix) の全体とする。このとき以下のことが知られている。

定理 ある $\beta_c > 0$ があって、 $\beta \leq \beta_c$ かつ $h \neq 0$ のとき

$\mathcal{G}(\beta, h)$ は $\mathbb{R}$ 点より成る。 $\beta > \beta_c$, $h = 0$ のとき、

$\mathcal{G}(\beta, h) = \{\lambda \mu_+ + (1-\lambda) \mu_-; \lambda \in [0, 1]\}$ と成る。ここに

に、 μ_+, μ_- は 2 つの異なる Gibbs 場で次のようにして得る

れる。 $\Lambda \subset \mathbb{L}$ を勝手な有限集合とする。このとき

$$\mu_+ (\sigma(x) = +1, \forall x \in \Lambda) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^2} P_V^{\omega^+} (\sigma(x) = +1, \forall x \in \Lambda)$$

$$\mu_- (\sigma(x) = +1, \forall x \in \Lambda) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^2} P_V^{\omega^-} (\sigma(x) = +1, \forall x \in \Lambda)$$

ここで、 ω はそれぞれ $\mathbb{L}$ 上の可及な点で $+1$ だけ、 -1 だけを取る configuration とする。

この定理の意味するところは相の共存がある (β, h) の領域にあることは V_N の boundary ∂V_N からの影響 ($E_{V_N}^{\omega}(\cdot)$ における boundary term の効果) が無視できるほど大きくなることである。これは long range correlation が現われるためと考えられている。

§2 相の共存

$\beta > \beta_c$, $h = 0$ のときを考える。 V_N の外側に適当な配置 ω をおくと μ_+ で特徴的トポロジーの並び方と μ_- で特徴的トポロジーの並び方が同時に共存している様な configuration が特徴的となる様になる。それが V_N 内でどうあるかを見る。

$$\omega^\pm \in \Omega \text{ である}$$

$$\omega^\pm(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x_2 \geq 0 \\ -1 & \text{if } x_2 < 0 \end{cases}$$

となる様におく。この $\omega^\pm$ を V_N の外部に固定したとき、 $P_N^{\omega^\pm}$ による V_N 内部の最も typical な configuration を調べていくことにする。そのために今、勝手な $\sigma \in \Omega_N$ に対して $\mathbb{Z}^2$ の sub-

graph を次の様に定める。 V_N と共通部分が空でない様な $\mathbb{Z}^2$ の pair $\langle x, y \rangle$ が $\sigma(x)\sigma(y) = -1$ or $\sigma(x)\omega^{\pm}(y) = -1$ をみたす時 $\langle x, y \rangle$ に直交する $\mathbb{Z}^2$ の bond (これは唯一つしかない) に色をつける。 $\sigma(x)\sigma(y) = +1$ or $\sigma(x)\omega^{\pm}(y) = +1$ のとき $\langle x, y \rangle$ に直交する $\mathbb{Z}^2$ の bond には色をつけない。 こうして V_N を囲む最小の $\mathbb{Z}^2$ の subgraph としての正方形 V_N^* の subset を得る。 これはいくつかの closed polygons $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ と一つの connected component λ から成る。(図1参照)

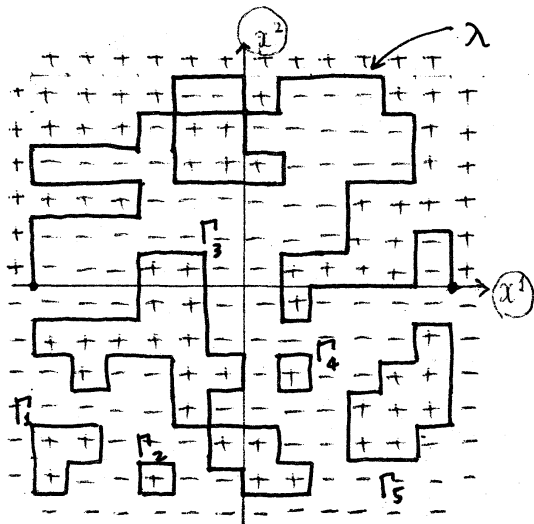


図 1

λ は 2 点 $(0,0), (2N,0)$ を結ぶ色のついた connected component. 図 1 では λ が一番上にある。 $\{\Gamma_i\}$ は 5 個ある。 σ が変わればこれらの図形も変わる。ので正確には $\{\Gamma_i(\sigma)\}, \lambda(\sigma)$ と書くべきである。

σ と $\{\Gamma_i\}, \lambda$

$P_N^{\omega}(\cdot)$ の定義からすぐに

$$(3) \quad P_N^{\omega^{\pm}}(\sigma) = [\tilde{Z}_N^{\omega^{\pm}}]^{-1} \cdot \exp \left\{ -2\beta \left(\sum_{i=1}^n |\Gamma_i(\sigma)| + |\lambda(\sigma)| \right) \right\},$$

$$\tilde{Z}_N^{\omega^{\pm}} = \sum_{\tilde{\sigma} \in \Omega_N} \exp \left\{ -2\beta \left(\sum_{i=1}^n |\Gamma_i(\tilde{\sigma})| + |\lambda(\tilde{\sigma})| \right) \right\}$$

を得る。ただし $|\Gamma_1|, |\lambda|$ はそれぞれ長さ, $\{\Gamma_1(\sigma), \dots, \Gamma_n(\sigma)\}$ は $\lambda(\sigma)$ が σ に対応して出てくる V_N^* の subgraph とする。 π は σ に対応して出てくる closed polygons の個数である。(3) からすぐに, $\lambda(\sigma), \{\Gamma_i(\sigma)\}_i$ はあまり長くなり方が実現確率が高いことがわかる。 N が大きいときは図 1 の様な現象はあまりに小さくなるであろう。このことを定理としてまとめておく。

定理 (M-S-G-M)

$\beta > \beta_c$ が十分大きいとする。 ($\beta \gg \beta_c$) このとき次の (i), (ii), (iii) をみたす確率は $N \rightarrow \infty$ のとき 1 に近づく。ただし確率は $P_N^{\omega, \pm}$ で示かる。

$$(i) \quad ||\lambda(\sigma)| - 2N| < \frac{C}{\beta} N \quad \text{for some } C > \ln 4$$

$$(ii) \quad |\gamma_i(\sigma)| \leq C_0 \ln N \quad \text{for some } C_0 > 0$$

$$(iii) \quad m^*(\beta) = \int \tau(\sigma) \mu_+(d\sigma) = - \int \tau(\sigma) \mu_-(d\sigma) \text{ とおくと}$$

$$\text{とき, } M_\lambda(\sigma) = \sum_{\alpha: \lambda(\alpha) \neq \emptyset} \sigma(\alpha) \text{ に対して}$$

$$|M_\lambda(\sigma) - m^*(\beta) \cdot (2N^2)| \leq \mathcal{K}(\beta) N$$

$$|M(\sigma) - M_\lambda(\sigma) + m^*(\beta)(2N^2)| \leq \mathcal{K}(\beta) N$$

$$\text{ただし } M(\sigma) = \sum_{x \in V_N} \tau(x), \quad \mathcal{K}(\beta) \rightarrow 0 \text{ exponentially as } \beta \rightarrow \infty.$$

上の定理 (M-S-G-M) の (iii) は λ の上では μ_+ と同じ様で、 λ の下では μ_- と同じ様な typical configuration を持つことを主張

している。つまり $N \rightarrow \infty$ とともに 1 に近づく大きな確率で、
 $\lambda(+)$ は直線に近づく。 $\{\Gamma_i(+)\}$ はなる N が小さくなるうと
 なる。図2にその様子を記しておく。

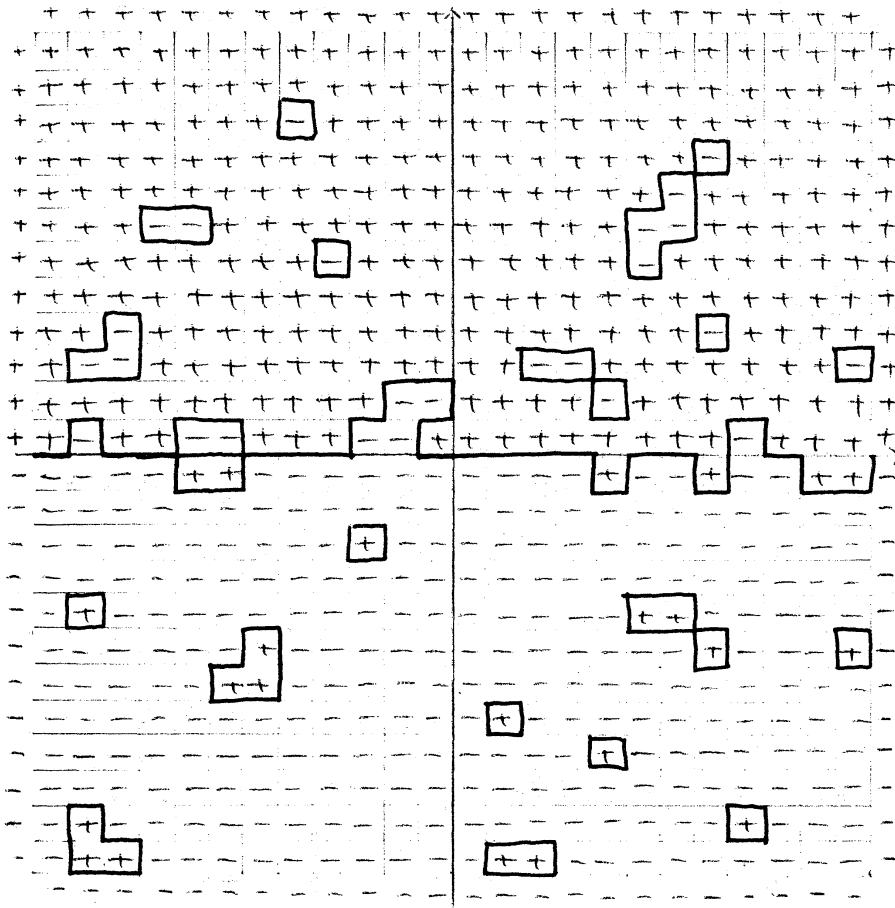


図2 $\beta \gg \beta_c$ のとき

$\lambda(+)$ は 2 つの相 (+ の相と - の相) を分離するため、境
 界線 (phase separation line) と呼ばれる。各 Γ_i は contour と
 呼ぶ。

§3. $\lambda(\sigma)$ の分解

2 図の $\lambda(\sigma)$ を見てみる。 $|\lambda(\sigma)|$ が最も小さくなるのは、 $\lambda(\sigma)$ が $(0,0)$ と $(2N,0)$ を結ぶ直線するときで、このときが実現確率は最も高い。 $(0,0)$ と $(2N,0)$ を結ぶ折れ線 λ がどのくらい実現されやすいかは、この直線からの deviation によって評価できる。

$$P_N^{(\omega^\pm)}(\lambda(\sigma) = \lambda) = [Z_N^{(\omega^\pm)}]^{-1} e^{-2\beta|\lambda|} Z_N(\lambda)$$

ここで $Z_N(\lambda) = \sum_{\{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}}^* \exp\{-2\beta \sum_{i=1}^n |\Pi_i|\}$ で $\sum_{\{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}}^*$ は λ と intersect したような V_N^* の closed polygons $\{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$ の組で互に intersect しないものについての和。書きなおすと

$$(4) \quad P_N^{(\omega^\pm)}(\lambda(\sigma) = \lambda) = \frac{e^{-2\beta|\lambda|} Z_N(\lambda)}{\sum_X e^{-2\beta|X|} Z_N(X)}$$

を得る。上に言, 下様に $|\lambda|$ 自身よりも λ の直線からの deviation が (4) で本質的な役割を果たすことから、 λ を次の様に分解する。実数 $r: 0 \leq r \leq 2N$ に対して、 $\mathcal{L}_r \equiv (r,0)$ を通り x^2 軸に平行な直線とする。 λ の subset $\mathcal{F}(\lambda)$ を

$$\mathcal{F}(\lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x \in \lambda \cap \mathcal{L}_r \text{ for } \exists r \in [0, 2N], \text{ か } \right. \\ \left. \#(\lambda \cap \mathcal{L}_r) > 1 \right\}$$

と置く。 $\mathcal{F}(\lambda)$ は 1 つの connected components $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$ に分かれる。 $\mathcal{E}_i \equiv \{ r \in [0, 2N]; \mathcal{L}_r \cap \mathcal{G}_i \neq \emptyset \}$ と置く。逆に $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p; \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p)$ が与えられるとこれから対応

する境界線を作ることが出来る。しかし、これは一般に $(2N, 0)$ で終わらない。このことを見てみよう。2図の $\lambda(\sigma)$ に対応する $\{\varphi_i\}, \{\xi_i\}$ は下図の様になる。

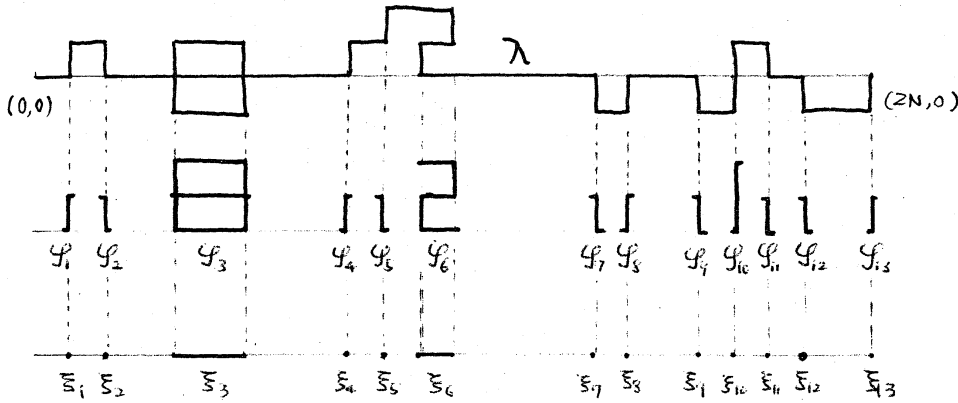
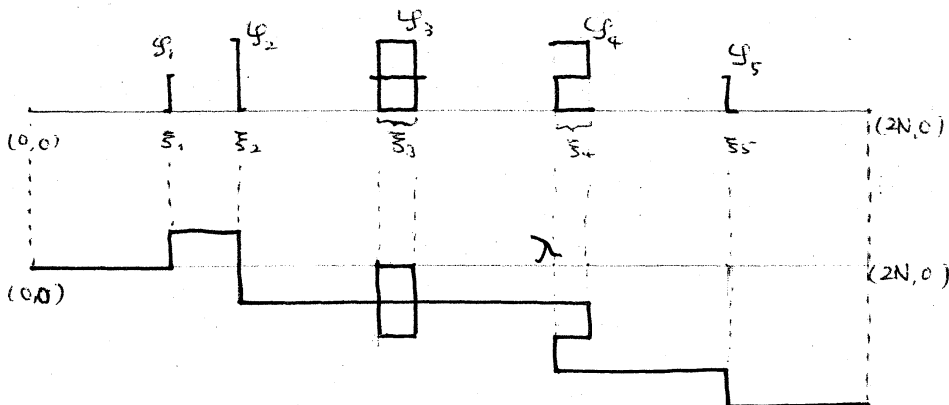


図3 λ と $\{\varphi_i\}, \{\xi_i\}$ の対応

λ と $\{\xi_i\}, \{\varphi_i\}$ が 1 対 1 に対応するには φ_i を決めるときにその入口と出口を指定する必要がある。上図ではそれを φ_i から右と左に少し伸びている部分として表わしている。左に出ている部分を入口、右に出ている部分を出口と呼ぶことにする。今、勝手に $\{\xi_i\}, \{\varphi_i\}$ を与えたら対応する λ はどうなるかを見てみる。(図4)



従, 2-般には勝手な $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ に対しては $(0,0)$ から $\{\lambda_i = 2N\}$ に至る折れ線入が対応する。入が $(2N,0)$ で終わるという条件をつけるには各 η_i の jump $\delta\eta_i$ を見ればよい。

$$\delta\eta_i = \eta_i \text{の出口の高さ} - \eta_i \text{の入口の高さ}$$

そうすると、入が $(2N,0)$ で終わるということは jump を使

うと $\sum_i \delta\eta_i = 0$ という条件で表わされる。つまり

(4) 式は $\{\eta_i\}, \{\xi_i\}$ に関する $\sum_i \delta\eta_i = 0$ という条件の下

での条件付確率と取っている。従, 2ます λ_1 軸上の粒子系

$(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})$ を考えてみる。区間 $[0, 2N]$ 上に粒子の組

$(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})$ が現われる確率はこゝとき

$$(5) \hat{P}_N(\{\eta_i\}, \{\xi_i\}) = \hat{Z}_N^{-1} \cdot e^{-\frac{2}{\lambda} \sum_i (\eta_i - \xi_i)} Z_N(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})$$

$$\hat{Z}_N = \sum_{(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})} e^{-\frac{2}{\lambda} \sum_i (\eta_i - \xi_i)} Z_N(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})$$

ただし $Z_N(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})$ は $(\{\eta_i\}, \{\xi_i\})$ に対応する λ に対する

$Z_N(\lambda)$ である。これはかちに定義する。 $|\eta_i|, |\xi_i|$ はそれ

ぞれ η_i, ξ_i の長さ。 $\sum_i (|\eta_i| - |\xi_i|) = |\lambda| - 2N$ である

ことに注意すれば、これは $(0,0)$ と $(2N,0)$ を結ぶ直線から

の deviation を表わす量である。(5) で与えられる粒子系を

shape particle system と呼ぶ。

§4. Cluster expansion, shape potential

$\mathcal{N}$ を勝手な contours $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ の組全体とする。 Γ_i と Γ_j は intersect してもよいものとする。さらに全く同じものであってもよいとする。 $\mathcal{N}$ の元を γ と書くことにする。

$\mathcal{N}$ 上で定義された2つの実数値関数 f_1, f_2 に対して、積 $f_1 \circ f_2$ を次の様に定義する；

$$(f_1 \circ f_2)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2!}$$

ただし、和 $\sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma}$ の意味は ordered pair (γ_1, γ_2) ；

$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{N}$ で重複度まで込めて $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ と取るものについての和。 $\gamma!$ は γ に属する contours の重複度を $m_1, \dots, m_s$ とするとき $\gamma! = m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_s!$ と取る。 f が γ に対して $f(\gamma) = 0$ のとき、

$$(\text{Exp } f)(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{\circ n}(\gamma)$$

と定義する。 γ が有限個の contours の組であるとき上式は意味が有る。ただし $f^{\circ 0}(\gamma) \equiv \mathbb{1}(\gamma)$,

$$\mathbb{1}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma = \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置く。 g が $g(\emptyset) = 1$ をみたすとき、 Exp の逆が定義できる。

$$(\text{Log } g)(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (g-1)^{\circ n}(\gamma)$$

$\tilde{g} = g-1$ として置く。 $\tilde{g}(\emptyset) = 0$ だから、やはり上の

式は意味をもつ。このとき

$$\text{Log}(\text{Exp } f) = f, \quad \text{Exp}(\text{Log } g) = g$$

が証明できる。これは単なる代数的な計算なので省略することにする。 $g(\varnothing) = 1$ なる g に対し $\text{Log } g \in g^T$ と簡単に書くことにする。このとき形式的には

$$\sum_{\gamma \in N} \frac{g(\gamma)}{\gamma!} = \exp \left\{ \sum_{\gamma \in N} \frac{g^T(\gamma)}{\gamma!} \right\}$$

が成立することはい

$$\sum_{\gamma \in N} \frac{(\varphi_1 \circ \varphi_2)(\gamma)}{\gamma!} = \left(\sum_{\gamma \in N} \frac{\varphi_1(\gamma)}{\gamma!} \right) \left(\sum_{\gamma \in N} \frac{\varphi_2(\gamma)}{\gamma!} \right)$$

なる式が示明される。さらに $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ のとき $h(\gamma) = h(\gamma_1) \cdot h(\gamma_2)$ となる h に対しては

$$(6) \quad \sum_{\gamma \in N} \frac{g(\gamma)}{\gamma!} h(\gamma) = \exp \left\{ \sum_{\gamma \in N} \frac{g^T(\gamma)}{\gamma!} h(\gamma) \right\}$$

が成り立つ。これらはすべて形式的な議論であるが、 $h \in$ 適当にとると (6) は正しい。それには例えば

$$(7) \quad \sum_{\gamma \in N} \frac{|g^T(\gamma)|}{\gamma!} |h(\gamma)| < \infty$$

が成り立てばよい。

g として考える関数は次の式で与えられる。

$$G(\gamma) = \begin{cases} e^{-2\beta \sum_{i=1}^n |\Gamma_i|} & \text{if } \gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing \forall i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

h としてほ次の2つを考える。

$$I_V(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma \subset V, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

および、

$$H_\lambda(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n), \Gamma_i \cap \lambda \neq \emptyset \forall i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし、 λ は勝手な $[0, 2N]$ 上の shape particles の configuration に対応した折れ線とする。

$g^T = G^T$, $h = I_V \cdot H_\lambda$ として (7) が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} (8) \quad Z_N(\lambda) &= \sum_{\gamma \in N} \frac{G(\gamma) I_V(\gamma) H_\lambda(\gamma)}{\gamma!} \\ &= \exp \left\{ \sum_{\gamma \in N} \frac{G^T(\gamma) I_V(\gamma) H_\lambda(\gamma)}{\gamma!} \right\} \end{aligned}$$

を得る。

$$\sum_{\gamma \in N} G^T(\gamma) I_V(\gamma) H_\lambda(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma \in N \\ \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda = \emptyset}} G^T(\gamma)$$

だから (4) において

$$(4') \quad P_N^{\omega^I}(\lambda(t) = \lambda) = \frac{e^{-2\beta|\lambda|} \exp \left\{ - \sum_{\substack{\gamma \in N, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda \neq \emptyset}} G^T(\gamma) \right\}}{\sum_{\lambda'} e^{-2\beta|\lambda'|} \exp \left\{ - \sum_{\substack{\gamma \in N, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda' \neq \emptyset}} G^T(\gamma) \right\}}$$

なる式を得る。ここで G^T の性質を見てみよう。 G にかえて見るとき、次の式が成り立つ、という；

$$G(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s) = e^{-\sum_i |\Gamma_i|} \prod_{i < j} \Theta(\Gamma_i, \Gamma_j)$$

ただし

$$\Theta(\Gamma, \Gamma') = \begin{cases} 1 & \text{if } \Gamma \cap \Gamma' = \emptyset, \Gamma \cup \Gamma' \text{ is connected} \\ & \text{otherwise} \\ 0 & \end{cases}$$

より $G^T = \text{Log } G$ を使うと

$$G^T(\Gamma_1, \dots, \Gamma_s) = e^{-\sum_i |\Gamma_i|} \sum_{C} \prod_{\{\Gamma'_i, \Gamma'_j\} \subset C} (\Theta(\Gamma'_i, \Gamma'_j) - 1)$$

とある。ここに、 $\sum_C$ は $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ を結ぶ Γ の connected graphs の全体にわたる。とあるものとする。上の式から $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$ が 2 つの connected parts に分かれる ($\bigcup_{i=1}^s \Gamma_i$ が 2 つの connected components に分離するとき) この 2 つのグラフに属する contours をそれぞれ $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_u\}, \{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_v\}$ とする。 $\Theta(\Gamma'_i, \Gamma'_j) = 1$ for any i, j だから、 G^T の式の中の Γ の項は 0 になる。よって、 $G^T(\Gamma_1, \dots, \Gamma_s) \neq 0$ ならば $\bigcup_{i=1}^s \Gamma_i$ は connected とある。従って (4') は次の様に書き直すことが出来る。

$$(4'') \quad P_N^{(W)}(\chi(\dagger) = \lambda) = \frac{e^{-2\beta|\lambda|} \exp \left\{ - \sum_{\substack{\gamma \in V, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda \neq \emptyset}}^* G^T(\gamma) \right\}}{\sum_{\lambda} e^{-2\beta|\lambda|} \exp \left\{ - \sum_{\substack{\gamma \in N, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda \neq \emptyset}}^* G^T(\gamma) \right\}}$$

ただし、 $\sum^*$ は $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$ とかくとき $\bigcup_i \Gamma_i$ が connected であるだけについての和。

ここで λ から $(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})$ の空間へ移ることを考えたい。そのためには $Z_N(\lambda)$ に対応する lev_N が $(0,0)$ と $(2N,0)$ に結ぶ直線から s の deviation の形で書かれる方が望ましい。そこで、単純に

$$\sum_{\substack{\gamma \cap \lambda \neq \emptyset \\ \gamma \subset V}} G^T(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma \cap \lambda \neq \emptyset \\ \gamma \subset V}} G^T(\gamma) + U(\varphi(\lambda))$$

と置く。 Möbius inversion formula を使うと $0 \leq v \leq s$ に対し

$$\Phi(\{\tilde{\varphi}_i\}, \{\tilde{\xi}_i\}) = \sum_{(\{\tilde{\varphi}_{i_1}^v, \dots, \tilde{\varphi}_{i_v}^v\}, \{\tilde{\xi}_{i_1}^v, \dots, \tilde{\xi}_{i_v}^v\}) \subset (\{\tilde{\varphi}_i\}, \{\tilde{\xi}_i\})} (-1)^v U(\{\tilde{\varphi}_{i_1}^v, \dots, \tilde{\varphi}_{i_v}^v\}, \{\tilde{\xi}_{i_1}^v, \dots, \tilde{\xi}_{i_v}^v\})$$

とかける。上の和の意味は shape particle の集まりとしての subsets $(\{\tilde{\varphi}_i\}, \{\tilde{\xi}_i\})$ をとる。ただし $0 \leq s \leq n$ に対して

$$U(\{\varphi_{i_1}^s, \dots, \varphi_{i_s}^s\}, \{\xi_{i_1}^s, \dots, \xi_{i_s}^s\}) = \sum_{(\{\tilde{\varphi}_{i_1}^s, \dots, \tilde{\varphi}_{i_s}^s\}, \{\tilde{\xi}_{i_1}^s, \dots, \tilde{\xi}_{i_s}^s\}) \subset (\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})} \Phi(\{\tilde{\varphi}_i\}, \{\tilde{\xi}_i\})$$

なる関係が成り立つ。 Φ が Shape potential と呼ばれる。

§5. G^T 及び Φ の評価

今までの議論が正しいためには少なくとも $\Phi^T = G^T$, $h = I_V$ として (7) が成立していなくてはならない。このため G^T の評価が必要となる。

補題 1 G^T は以下の性質を満たす。ただし β は十分大とする。

(1) ある $\varepsilon(\beta)$ という $\beta \rightarrow \infty$ のとき 0 に exponential に近づく関数を取って、勝手な点 $p \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\sum_{\substack{\gamma \ni p \\ \gamma \in \mathcal{N}}} |G^\Gamma(\gamma)| < \varepsilon(\beta)$$

(2) ある $K(\beta)$ という $\beta \rightarrow \infty$ のとき 0 に exponential に近づく関数かとして、勝手な contour Γ と自然数 n に対して

$$\sum_{\substack{\gamma \ni \Gamma \\ N(\gamma) = n+1}} |G^\Gamma(\gamma)| \leq K(\beta)^{n+1} e^{-\frac{1}{2}\beta|\Gamma|}$$

ここで $N(\gamma)$ は γ に含まれる contours の個数。

補題 1 の (1) により、明らかに条件 (7) が成立する。とかわかる。従って今までの議論はすべて正しいことになる。上の証明のためにいくつかの記号を準備する。

$\mathcal{N}$ 上の関数 f と contour Γ に対して

$D_\Gamma f(\gamma) = f(\Gamma + \gamma)$ とおく。一般に $\gamma \in \mathcal{N}$ に対して $D_\gamma f(\gamma') = f(\gamma + \gamma')$ と定義。このとき

$$D_\Gamma(f_1 \circ f_2) = (D_\Gamma f_1) \circ f_2 + f_1 \circ (D_\Gamma f_2)$$

および $D_\Gamma(\text{Exp } f) = (D_\Gamma f) \circ (\text{Exp } f)$ を得る。

G は我々の形、という関数として G^{-1} はその積に関する逆とする。このとき新しく $\Delta_\gamma(\gamma') = (G^{-1} \circ D_\gamma G)(\gamma')$

とかくと、

$$(9) \frac{\Delta_{\Gamma+\gamma}(\gamma')}{\gamma!} = e^{-2\beta|\Gamma|} \sum_{\gamma'' \subset \gamma'}^* (-1)^{N(\gamma'')} \frac{\Delta_{\gamma+\gamma''}(\gamma'-\gamma'')}{(\gamma'-\gamma'')!}$$

を得る。 $\Gamma \in \mathcal{L}$ $\sum^*$ は ① $\gamma'' \subset \gamma'$ (multiplicity t まで)

② $\Gamma + \gamma''$ は non-intersecting ③ $\Gamma'' \in \gamma''$ のとき $\Gamma'' \cap \Gamma \neq \emptyset$

なる条件の下での和。

$$G = \exp G^T \quad \Gamma \text{ から 両辺に } D_\Gamma \text{ をほどこすと}$$

$D_\gamma G^T = G^{-1} \cdot D_\Gamma G = \Delta_\Gamma$ となることより、 $|\Delta_\Gamma|$ を評価すればよい。

$$I_m = \sup_{\substack{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \\ 1 \leq n \leq m}} \sum_{\substack{\gamma \\ N(\gamma) = m-n}} |\Delta_{\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}}(\gamma)| e^{\beta \sum |\Gamma_i|}$$

とかくと (9) より すぐには

$$I_{m+1} \leq I_m e^{-2\beta}$$

を得る。 $I_1 = e^{-4\beta}$ も簡単にわかるから (勝手な contour

の長さ ≥ 4 だから) $I_m \leq e^{-2\beta(m+1)}$ を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}} |G^T(\Gamma)| &\leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\gamma} |G^T(\Gamma+\gamma)| \\ &\leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{N(\gamma)=m-1} |\Delta_\Gamma(\gamma)| \leq \Sigma(\beta) // \end{aligned}$$

(2) の証明も同様にできる。

重の γ の評価も補題 1 を使うことによりできる。結果のみを書く。

補題2 β が十分大きくと、ておくと次の式が成立。

$$|\Phi(\{y_i\}, \{z_i\})| \leq \Phi_0(\{z_i\})(|y_5| - |z_5|)$$

ここで z_5 は $\{z_i\}$ の中で一番右か一番左側の位置、 y_5 は z_5 により決られた shape particle とする。 Φ_0 は次の評価をみたす。

$$\sup_{\substack{\xi \in T \\ X \subset T}} \sum_{\substack{\xi_i \in X \\ X \subset T}} \Phi_0(X) = \psi(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0 \text{ exponentially}$$

さらに適当に大きな定数 R_0 に対して ($R_0 = 100$ とする) d, k)

$$\sum_{\substack{X \ni \xi_0 \\ X \ni \xi_1}} \Phi_0(X) \leq \text{Const} \cdot (8R_0^{-1})^{d(\xi_0, \xi_1)} \psi(\beta)$$

$d(\xi_0, \xi_1)$ は ξ_0 と ξ_1 の距離。

上の式の意味することは、 β が十分大きければ、shape particles 間の相互作用は非常に小さくなることである。従って、一次元理想気体の持つ性質に近いことが β が大きいときで言えるであろうと予想できる。

§6. 中心極限定理

ここでは再び shape particles の空間にもとる。考え³確率は (5) で与えられる。 E, E'

$$Z_N(\{y_i\}_{i \in I}, \{z_i\}_{i \in I}) = C_N \cdot \exp \left\{ - \sum_{I' \subset I} \Phi(\{y_i\}_{i \in I'}, \{z_i\}_{i \in I'}) \right\}$$

C_N は N にかかり depend する定数。

このとき

$$\hat{P}_N \left(\sum_{i \in I} \delta \mathcal{G}_i = 0 \right) = P_N(0)$$

を考えてみる。各 $\mathcal{G}_i$ は互に非常に弱い相互作用で結ばれてい
るだけだから、確率変数の列 $\{\delta \mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ はかなり独立に近いと
思われる。 $\int \delta \mathcal{G}_i d\hat{P}_N$ は $\mathcal{G}_i$ に対して $\mathcal{G}_i$ の頭と下をひ、
くり返した粒子 $\mathcal{G}_i'$ を対応させることにより 0 であることが
わかる。従って $\{\delta \mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ に対して中心極限定理が成り立つと
の期待される。

一般に勝手な $k \in \mathbb{Z}$ に対して N が十分大とき

$$P_N(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{E}_N \left(e^{it \sum_{j \in I} \delta \mathcal{G}_j} \right) e^{-itk} dt$$

とかける。 $e^{it \sum_{j \in I} \delta \mathcal{G}_j}$ は $\mathcal{G}_j$ に関して multiplicative。§ 4
でや、 T -cluster expansion を shape particles の空間で行なう

。このとき

$$\Psi(\mathcal{G}_x) = \begin{cases} e^{-\beta_0(|\mathcal{G}_x| - |x|)} e^{-U(\mathcal{G}_x)} & \text{if } x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \\ & \xi_i \cap \xi_j = \emptyset \text{ } i \neq j. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく。ただし β_0 は十分大きいとし、 β は $\psi(\beta) > \beta_0$ とする
様に大きくとる。とおく。

$$\Psi^T(\mathcal{G}_{x_0}) = (\Psi^{-1} \circ D_{\mathcal{G}_3} \Psi)(\mathcal{G}_x)$$

に関する評価が § 5 と同様に成り立ち、

$$\hat{E}_N \left(e^{it \sum_{j \in I} \delta \mathcal{G}_j} \right) =$$

$$= \exp \left\{ \sum_{x \in [0, 2N]} \sum_{g_x} \Psi^T(g_x) e^{-(\beta - \beta_0)(|g_x| - |x|)} (e^{it\delta g_x} - 1) \right\}$$

ただし、 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ のとき $|x| = \sum_i |\xi_i|$ とする。上の $\{ \}$ 内の式で main term は β, β_0 が十分大のときには $x = \{\xi\}$, $|\xi| = 0$, $|g_\xi| = 1$ のときの影響のみであることから Ψ^T の評価 ($\S 5$ でやった α と同様にできる) により、このことから、計算を敢行すると、次の結果を得る。

定理 1

$\beta > \beta_0$ であり β が十分大とする。このとき、

$$\hat{P}_N(T_j \sigma \sqrt{N} \leq \sum_{\xi \in x} \chi_j^{(N)}(g_\xi) \cdot \delta g_\xi \leq T'_j \sigma \sqrt{N} \mid \delta g_x = 0) \quad j=1, 2, \dots, k$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} P_{0,0}^{1,0}(X(t_j) \in [T_j, T'_j], j=1, 2, \dots, k)$$

を得る。ただし $\chi_j^{(N)}(g_\xi) = 1$ if $\xi \in [0, 2N \cdot t_j]$,
0 otherwise, かつ $(X(t), P_{0,0}^{1,0})$ は 1 次元の Brownian bridge ($X(1) = X(0) = 0$ という条件付きの Brown 運動。)

§7. λ の収束

上の定理 1 で おおむね λ が Brownian bridge に収束するということはいえたわけだが、まだ正確ではない。実際 $\{\alpha_1 = k\}$ という直線と λ の交点はたくさん有り、 $\lambda \cap \{\alpha_1 = k\}$ の直径が $\sqrt{N}$ の order $\varepsilon = \varepsilon_N$ 様ならず、 λ の行き先が有、 ε として 1 次元 Brownian bridge の path とは異なり、 ε は必ず

ある。この様なことがないことは次の補題による。

補題3 β が十分大のとき

$$P_N(\exists \xi \text{ s.t. } |\mathcal{G}_\xi| > C \ln N) = o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ as } N \rightarrow \infty$$

証明には shape particle の correlation function $P_N(\mathcal{G}_x)$ を使う。 $P_N(\mathcal{G}_x)$ は一般化された Kirkwood-Salsburg 方程式

$$\begin{aligned} (10) \quad P_N(\mathcal{G}_x) &= e^{-\beta(|\mathcal{G}_x| - |\bar{\xi}|) - U_1(\mathcal{G}_x)} \times \\ &\times \sum_{Y \cap X = \emptyset} \sum_{\mathcal{G}_Y'} K_1(\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_Y') \times \\ &\times \sum_{\substack{\overline{P \cap \bar{\xi}_1} \neq \emptyset \\ P \cap (X^{(1)} \cup Y) = \emptyset}} \sum_{\mathcal{G}_P''} (-1)^{N(P)} P(\mathcal{G}_x^{(1)} \cup \mathcal{G}_Y' \cup \mathcal{G}_P'') \end{aligned}$$

をみたす。 $\xi_1 \in X$ に対し $X^{(1)} = X - \xi_1$, $\overline{P \cap \bar{\xi}_1} \neq \emptyset$ は $\forall \xi \in P$ について $\xi \cap \bar{\xi}_1 \neq \emptyset$ か $P = \emptyset$ のどちらかが成り立つということを意味。 β が十分大のとき P_N は次の様な関数空間に入りこみ unique to K-S 方程式 (10) の解となる。

$$\mathcal{B} = \left\{ f: \mathcal{G}_x \mapsto f(\mathcal{G}_x), \quad \|f\| = \sup_{x, \mathcal{G}_x} \frac{|f(\mathcal{G}_x)|}{e^{-\beta(|\mathcal{G}_x| - |\bar{x}|)}} < \infty \right\}$$

実際、 β が十分大のとき

$$P_N(\mathcal{G}_\xi) \leq \frac{e^{-\beta(|\mathcal{G}_\xi| - |\bar{\xi}|)}}{1 - k(\beta)}$$

$k(\beta) \rightarrow 0$ exponentially as $\beta \rightarrow \infty$

なる評価を得る。

$$P_N(\exists \xi \text{ s.t. } |\mathcal{G}_\xi| > C \ln N) \leq \sum_{\xi \in [0, 2N]} \sum_{|\mathcal{G}_\xi| > C \ln N} P_N(\mathcal{G}_\xi)$$

$$\leq N \sum_{j=0}^{\infty} \ell \sum_{\substack{k=0 \\ k \geq j}}^{\infty} \frac{g^k e^{-\beta k}}{1 - k(\beta)}$$

$$\leq (\text{const} \times (\ln N)^2) \cdot r^{a \ln N}, \quad r = g e^{-\beta}$$

$$r^{a \ln N} = N^{a(\ln g - \beta)} = o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{if } \beta > \ln g + \frac{1}{c}$$

これより補題3の主張がでてくる。

以上により、だいたい直観的には λ が normalize されたとき Brownian bridge に収束することかわかる。数学的には、さりとて形で主張するために少し整理しておく。

$A_N \in \mathbb{Z}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像で

$$A_N(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{\sqrt{N\sigma}} \right) \quad \text{と置く。}$$

さらに $\mathcal{C} \equiv \left\{ K \subset [0, 1] \times \mathbb{R}; K \text{ compact, } K \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset, K \cap \{x_1 = 1\} \neq \emptyset \right\}$

と置く。 $A_N(\lambda)$ は常に $\mathcal{C}$ に属する。定理1が言っていることは、勝手な $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$ に対して

$\{A_N(\lambda) \cap \{x_1 = t_i\}\}_{i=1}^n$ の分布が Brownian bridge の分布

に $N \rightarrow \infty$ のとき収束するということである。だが現実には t_i

と異なることを言える。そのため $\mathcal{C}$ に metric d を次のように入

れておく。 $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ に対し

$$d(C, C') = \frac{1}{2} \left\{ \sup_{x \in C_1} \inf_{y \in C_2} |x - y| + \sup_{y \in C_2} \inf_{x \in C_1} |x - y| \right\}$$

と置く。このとき $\mathcal{C}$ は complete separable になる。

定理2

$\beta > 0$ は十分大とする。このとき、ある確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$ B びそれ上の $\mathbb{C}$ -値確率変数 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, B_0$ がとれて、

(i) $(\tilde{\lambda}_N, \tilde{P})$ と $(A_N(\lambda), P_N^{\omega^\mp})$ は同じ分布,

(ii) $(B_0, \tilde{P})$ は 1-次元 Brownian bridge

(iii) $d(\tilde{\lambda}_N, B_0) \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ $\tilde{P}$ -a.s.

が成り立つ。

即ち、 $A_N(\lambda)$ は現実には $N \rightarrow \infty$ のとき $\mathbb{C}$ 内で Brownian bridge のある path に近づいていく。従って λ 自身は遠くから見ると直線に近かったが、適当に近づいて見ると全体が良く見え、しかも非常にギザギザのあるものとなる、という。

§8 まとめ

ここでの議論は β が十分大なときの話である。だが、定理2の現象は $\beta > \beta_c$ で起こっているものと期待されている。それは $P_V^{\omega^\mp}$ が2次元では $V \rightarrow \mathbb{Z}^2$ のとき $\frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-)$ に weak に収束するという事実から出てきている。なぜなら原点は必ず $+$ の相 (λ の上) か $-$ の相 (λ の下) に入っており、 λ と原点との距離はせいぜい $\sqrt{N}$ ぐらいはなれているからである。

ここで $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{L}; |x_1| \leq N, |x_2| \leq N\}$ とする。とすると2次元では事情は異なり、 β 大のとき λ の高さは N に indep.

な分布を持つ。従って λ は原点からほとんど遠ざからない。
 このためどのような normalization A'_N をとると $A'_N(\lambda)$ は
 $\{x_3 = 0\}$ なる平面の一部に収束してしまう。これが2次元
 と3次元の大きな違いである。しかし、 β が比較的小さい時
 ($\beta_c \gg \beta > \beta'_c$, β'_c は3次元の critical value) λ の分布は N と
 ともに ∞ に近づくある order をもつものとして予想されている。
 しかし、このときの order, 極限の $\lim A'_N(\lambda)$ の分布、
 これが β のどのような値で成立するかなどの問題はすべてまだ、
 完全に open である。

参考文献

§1 に関係しては

- [1] 宮本宗実 「格子気体の相転移」 Seminar on Probability
vol. 38 (1973)
- [2] G. Gallavotti ; Rivista del Nuovo Cimento, 2, 133
(1972)
- [3] M. Aizenman ; Comm. math. Phys. 73, 83 (1980)
- [4] Y. Higuchi ; to appear in Proc. Int. Symp. Esztergom,
Hungary, 1979.

§2 に関ししては

- [5] R. A. Minlos and Ya. G. Sinai ; Trans. Moscow

Math. Soc. 19, 121 (1968)

[6] R. A. Minlos, Ya. G. Sinai : Math. USSR Sbornik, 2,
335 (1967)

[7] G. Gallavotti. and A. Martin-Löf ; Comm math phys., 24,
253 (1972)

§ 3 ~ § 7 に関し 2 行

[8] G. Gallavotti ; Comm. Math. Phys., 27, 103 (1972)

[9] G. Del-Grosso ; Comm. Math. Phys. 37, 141 (1974)

[10] Y. Higuchi ; Z. Wahr. verw. Geb. 50, 287 (1979)

[11] Y. Higuchi ; in Quantum Fields - Algebras, Processes,
398, Springer (1980)