

大きな振幅の切れ波（3次元進行波）

九大応力研 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)

3次元進行波の1つである short-crested wave（切れ波）の波形をできるだけ大きな振幅に対して求めた．short-crested waveのパラメータの1つである角度 θ によって，大振幅の極限近くでの波形が峰でとがったり，とがらなかつたりするようである．今のところ，はっきりした結論は得られていない．

1. 研究の動機

short-crested waveとは2次元進行波列(Stokes波)が，垂直な壁にある角度(θ : 入射波の進行方向と壁に垂直な方向とのなす角度)で入射した時に，その入射波と反射波とが重なったところにできる3次元波である．それは $\theta = 0^\circ$ では定在波に， $\theta = 90^\circ$ ではStokes波になる．

short-crested waveの研究も他の水の波と同じように，弱非線形の波¹⁾から始まり，Padé近似を使って比較的大きな振幅の波²⁾までは求まっている．しかし，Padé近似による方法では極限近くの波形は求められない．2次元進行波の場合には，波の速さで動く座標系にのってみれば波形は一定であることと2次元性により，極限近くまで波形を求めるさまざまな方法がある．ところが，定在波やshort-crested waveではそれらの方法は使えない．

最近，定在波に関しては，大振幅の極限まで求める方法³⁾が提出されたので，ここではそれをshort-crested waveに適用する．

2. 問題の定式化

非圧縮非粘性流体の3次元渦なし運動を仮定する．流体の深さは無限大とする． x, y を水平方向， z を垂直方向の座標とする．ここでは入射波の波数 k ，未知数である振動数 ω により，以下のような無次元化を行なっている．

$$kx \rightarrow x, \quad ky \rightarrow y, \quad kz \rightarrow z, \quad \omega t \rightarrow t, \quad \frac{k^2}{\omega} \phi \rightarrow \phi, \quad \frac{k}{\omega^2} g \rightarrow g. \quad (1)$$

さらに，short-crested waveの波形が伝播しない座標系にのって考えるために，以下の座標変換を行なう．

$$T = px - t, \quad Y = qy, \quad p = \sin \theta, \quad q = \cos \theta \quad (2)$$

基礎方程式は

$$p^2 \phi_{TT} + q^2 \phi_{YY} + \phi_{zz} = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -P &= -\phi_T + \frac{1}{2}(p^2 \phi_T^2 + q^2 \phi_Y^2 + \phi_z^2) + gz, \\ &= 0, \quad \text{自由表面上で} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -\frac{DP}{Dt} &= -\phi_{TT} + p\phi_T(-2p\phi_{TT} + p^3\phi_T\phi_{TT} + pq^2\phi_Y\phi_{YT} + p\phi_z\phi_{zT}) \\ &\quad + q\phi_Y(-2q\phi_{YT} + p^2q\phi_T\phi_{YT} + q^3\phi_Y\phi_{YY} + q\phi_z\phi_{Yz}) \\ &\quad + \phi_z(-2\phi_{zT} + p^2\phi_T\phi_{zT} + q^2\phi_Y\phi_{Yz} + \phi_z\phi_{zz} + g) \\ &= 0 \quad \text{自由表面上で} \end{aligned} \quad (6)$$

となる．基礎方程式(3), (4)を満足する速度ポテンシャルは

$$\phi = \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=2-\text{mod}(k,2)}^N A_{kj} \cos kY \exp \alpha_{kj} z \sin jT, \quad \alpha_{kj} = \sqrt{k^2 q^2 + j^2 p^2} \quad (7)$$

となる．ここで $\text{mod}(k, 2)$ は k を2で割った余り， N は展開の最高次数である．

上の基礎方程式に加わる条件があと一つある。それは、振幅に関するパラメーター A_c と速度ポテンシャルとの間の関係式で

$$A_c = \frac{\phi_{zT}}{g} \Big|_{z=\eta(Y,T), Y=0, T=0}, \quad (8)$$

となる。ここで $\eta(Y, T)$ は表面変位である。波高 ϵ は

$$\epsilon \equiv \frac{\eta(0, 0) - \eta(\pi, 0)}{2} \quad (9)$$

と定義できる。

ここでは、ガラーキン法と呼ばれる方法を採用して、独立な方程式を作る。まず、(5), (6) から、 z を数値的に消去する。すると、

$$f(A_{kj}, g; Y, T) = 0, \quad (10)$$

という関係式が 1 つ得られる。これに $\cos lY \sin mT$ をかけて Y と T について 0 から π まで積分すると

$$F_{lm}(A_{kj}, g) = \int_{Y=0}^{\pi} \int_{T=0}^{\pi} f(A_{kj}, g; Y, T) \cos lY \sin mT dY dT = 0, \quad (11)$$

となる。これから、 $N(N-1)/2$ 個の独立な方程式が得られる。同様の操作により、(8) からは

$$H(A_{kj}, g) = 0, \quad (12)$$

という関係式が 1 つ得られる。これを合わせると、独立な方程式の数は $N(N-1)/2 + 1$ になる。未知数 A_{kj} と g の数も同じ数である。ここまでの未知数 A_{kj}, g の $N(N-1)/2 + 1$ 個の連立非線形方程式が得られた。ここではそれを反復法の一つである Newton 法で解く。反復法の初期解として $N=3$ の場合の弱非線形解を使う。

3. 結果と考察

まず、このスキームの数値チェックをしよう。以下に $\theta = 30^\circ$ の場合に 5 次の解析解の結果 ($g-1$) と比較している。

ϵ	数値解	解析解
0.1	-9.354369×10^{-4}	-9.354131×10^{-4}
0.05	$-2.3424604 \times 10^{-4}$	$-2.3424567 \times 10^{-4}$
0.01	$-9.37479365 \times 10^{-6}$	$-9.37479363 \times 10^{-6}$

ϵ が小さくなると両者の差がどんどん小さくなっていることがわかる。次に、 $\theta = 0^\circ$ に対応する定在波と比べてみると $\epsilon = 0.3$ の場合、このスキームで $\theta = 0^\circ$ にした結果と定在波の結果 ($g-1$) は 13桁一致している。

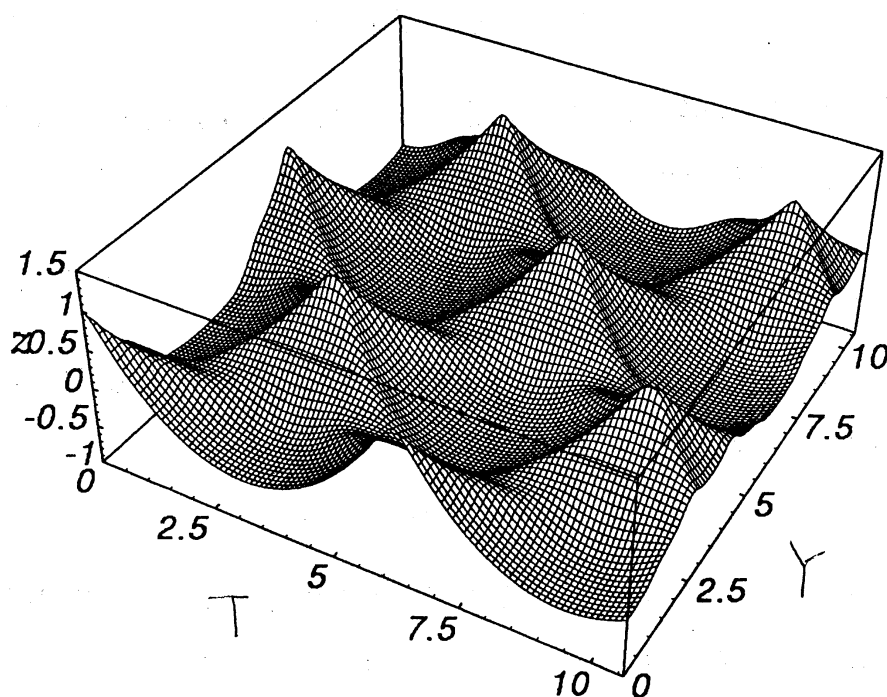


図 1: $\theta = 45^\circ$ で $\epsilon = 0.7373$ の場合の波形。

次に波高 ϵ をどんどん大きくして、極限まで求めてみよう。図 1 に $\theta = 45^\circ$ で $\epsilon = 0.7373$ の場合の波形を描いている。

図 2 には, 図 1 での 2 つの断面 $Y = 0$ (上図) と $Y = T$ (下図) を描いている. 進行方向に切った断面 $Y = 0$ の峰近傍では表面のなす角度が 120° になっている. これは, 2 次元進行波の性質を持っているといえる. 一方, 入射波の方向に切った断面 $Y = T$ の峰近傍では表面のなす角度が 90° になっている. これは, 2 次元定在波の性質を持っているといえる. つまり, これは 2 次元進行波と定在波の極限での性質を持っていることにより, short-crested wave の大振幅の極限であると思われる.

ところが, $\theta = 20^\circ$ の場合も同様に計算していくと, 波高 $\epsilon = 0.6177$ で極限に達し (これ以上計算ができないという意味), その波形は図 3 のようになる. これは, 断面で切ってみるまでもなく, $\theta = 45^\circ$ のように峰でとがっていない. 他の角度 ($30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$) でも峰でとがらないようである. 今のところわかっていることは, $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ でのみ, 極限で峰がとがり, その他の角度では峰はとがらないということである. その理由は, わからない.

参考文献

- 1) J.R.C. Hsu, Y. Tsuchiya & R. Silvester (1979) *J. Fluid Mech.*, **90**, 179–196.
- 2) A.J. Roberts (1983) *J. Fluid Mech.*, **135**, 301–321.
- 3) 岡村 誠 (1997) 京大数理研講究録, **993**, 134–143.

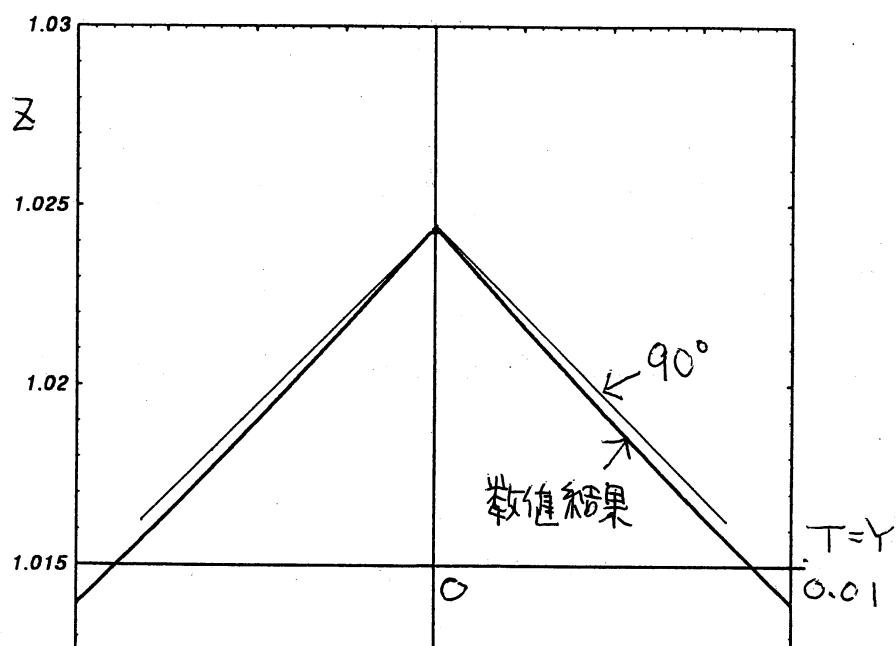
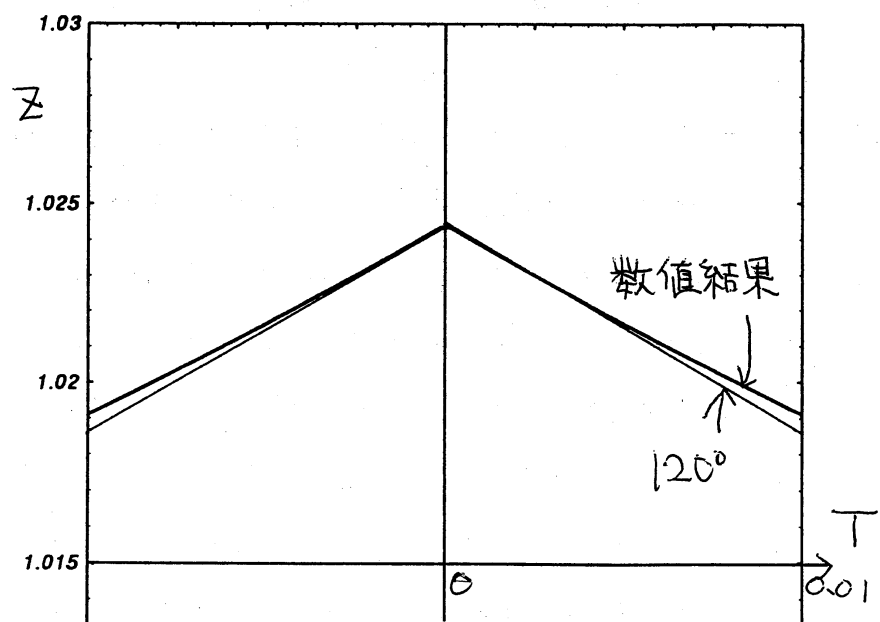


図 2: 図 1 のの波形の断面 $Y=0$ (上図) と $Y=T$ (下図) での峰近傍の形.

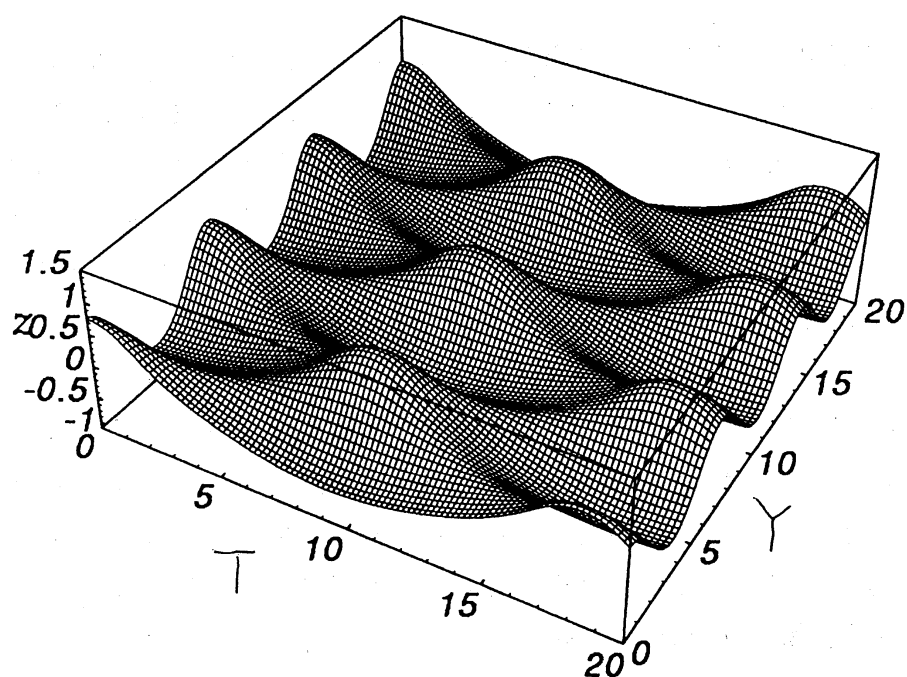


図 3: $\theta = 20^\circ$ で $\epsilon = 0.6177$ の場合の波形.