

Simple K3 特異点分類定理のプログラム化

神戸大学総合人間科学研究科

門脇 圭治 (Keiji KADOWAKI) *

神戸大学発達科学部

高橋 正 (Tadashi TAKAHASHI) †

概 要

In the theory of two-dimensional singularities, simple elliptic singularities and cusp singularities are regarded as the next most reasonable class of singularities after rational singularities. What are natural generalizations in three-dimensional case of those singularities. They are purely elliptic singularities.

The notion of a simple K3 singularity is defined as a three-dimensional isolated Gorenstein purely elliptic singularity of $(0,2)$ -type. Yonemura calculate the weights of hypersurface simple K3 singularities by nondegenerate polynomials and obtained examples.

We consider the programing of their classification theorem and show the Mathematica programs.

1 はじめに

3次元超曲面孤立特異点の理論において、次の二つは同値である。この条件を満たすとき、3次元特異点 (X, x) は Simple K3 singularity である。

- $(X, x) : (0, 2)$ -Type, Gorenstein purely elliptic singularity
- $\forall Q$ -factorial terminal modification $\delta : (Y, D) \rightarrow (X, x)$, D : normal K3 surface

Simple K3 singularity は、3次元孤立 $(0, 2)$ -Type の Gorenstein purely elliptic singularity として特徴づけることができる。

超曲面 Simple K3 singularity は、その非退化定義方程式によって分類され、95 個の存在が確認されている ([1])。この分類を証明するには、初等的な代数演算を繰り返すことが必要である。

*kadowaki@maiko.h.kobe-u.ac.jp

†takahashi@kobe-u.ac.jp

そこで、上記の初等的代数演算を行う証明に対し、その手法を分析し、より多数の分類証明を可能にするプログラム群を作成した。

今回示すプログラムは、Simple K3 singlarites の分類定理として用いられている、米村 ([1]) における Prop.2.1 及び Prop.2.3 の結果を得るためのプログラムである。

定義

- $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_i \in Q_+$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$,
 $1 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 > 0$
- $\nu := (z_1, z_2, z_3, z_4)$, $z_i' \in Z_0$
- $T(\alpha) := \{\nu | \sum \nu \cdot \alpha = 1\}$

Prop.2.1

- $W' := \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in Q_+^4 | \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1\}$
- $\langle T(\alpha) \rangle := \{\nu | \sum \nu \cdot t_\nu \in R^4 \text{ s.t. } t_\nu \in R_0\}$
- $W_4 := \{\alpha \in W' | (1, 1, 1, 1) \in \text{Int} \langle T(\alpha) \rangle \text{ } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4\}$

これから W_4 は 95 個である。

Prop.2.3

1) For any $i = 1, 2, 3, 4$, one of the following is satisfied :

$$\alpha_i = \frac{P_i}{P} , P = \text{LCM}(P_1, P_2, P_3, P_4)$$

a) $P_i | P$,

b) $P_i | (P - P_j)$, for some $j \neq i$.

2) $\text{GCD}(P_i, P_j, P_k) = 1$, for all distinct i, j, k

3) Let $\alpha_{ij} := \text{GCD}(P_i, P_j)$, $(i \neq j)$, then $\alpha_{ij} | P$.

4) If $P_i | P$ and $P_i | (P - P_j)$, then $\alpha_{ij} = P_i$ and $\alpha_{ik} = \alpha_{ij} = 1$, where we set $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

2 プログラム群

condition プログラムで使う変数の初期化及び設定

asort Solve で得た解の中で数値解を取り出す

dele Solve で得た解の中で方程式の物を得る

futougo 擬似的に不等式の物を $\$MachineEpsilon$ を使って方程式に置き換える

dtoe *Solve* で得た解の代入式から *Solve* で使える方程式へと変形する

step1 米村論文での step1

step2 米村論文での step2

printtool step1・step2 の結果を画面に出力・保持する

Step1.

- (A) $\alpha_1 = \alpha_2$ (*i.e.*, $\nu(2, 0, 1, 1) \in T(\alpha)$)
- (B) $\alpha_1 = 1/3$ (*i.e.*, $\nu(3, 0, 0, 0) \in T(\alpha)$)
- (C) $2\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (*i.e.*, $\nu(2, 1, 0, 0) \in T(\alpha)$)
- (D) $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1$ (*i.e.*, $\nu(2, 0, n, 0) \in T(\alpha)$)
- (E) $2\alpha_1 + n\alpha_4 = 1 \quad n \geq$ (*i.e.*, $\nu(2, 0, 0, n) \in T(\alpha)$)

(B) における、Step2.

- (B-1) $\mu = (0, 4, 0, 0)$ and $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 1/4$
- (B-2) $\mu = (1, 3, 0, 0)$ and $\alpha = (1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$
- (B-3) $\mu = (0, 3, 1, 0)$ and $3\alpha_2 + \alpha_3 = 1$
- (B-4) $\mu = (0, 3, 0, 1)$ and $3\alpha_2 + \alpha_4 = 1$
- (B-5) $\mu = (0, 3, 0, 0)$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$
 $\mu = (1, 2, 1, 0)$ and $\alpha = (1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$ (Case(B-2))
- (B-6) $\mu = (1, 2, 0, 1)$ and $\alpha_2 = \alpha_3$
 $\mu = (1, 2, 0, 0)$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$ (Case(B-5))
- (B-7) $\mu = (0, 2, 2, 0)$ and $\alpha_2 + \alpha_3 = 1/2$
 $\mu = (0, 2, 1, 1)$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$ (Case(B-5))
- (B-8) $\mu = (0, 2, 0, n)$ with $n \geq 2$ and $2\alpha_2 + n\alpha_4 = 1$

(B) における、Step3.

$$(B-1) \alpha = (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 1/4, 2/9, 7/36), (1/3, 1/4, 5/24, 5/24)$$

$$(B-3) \alpha = (1/3, 4/15, 1/5, 1/5), (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 7/27, 2/9, 5/27)$$

$$(B-4) \alpha = (1/3, 4/15, 1/5, 1/5), (1/3, 7/24, 1/4, 1/8), (1/3, 2/7, 5/21, 1/7), \\ (1/3, 5/18, 2/9, 1/9)$$

$$(B-5) \alpha = (1/3, 1/3, 1/6, 1/6), (1/3, 1/3, 1/5, 2/15), (1/3, 1/3, 2/9, 1/9), \\ (1/3, 1/3, 1/4, 1/12)$$

$$(B-6) \alpha = (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$$

$$(B-7) \alpha = (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 1/3, 1/6, 1/6), (1/3, 5/18, 2/9, 1/6)$$

$$(B-8) \text{ Case}(B-1), \dots, (B-7) \text{ に帰着される。}$$

参 考 文 献

- [1] Takashi Yonenura: Hypersurface Simple K3 Singularities, Tôhoku Math.J. 42, 351-380, 1990.