

混合問題の Green 函数の特異性

京大 数理解析 河合隆裕

双曲型方程式に対する初期-境界値混合問題の Green 函数が

即ち、時刻 $t=0$ での初期値を
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta(x')\delta(x_n-a) \end{pmatrix} \quad (0 < a)$$

で与え、 $\{x_n=0\}$ での境界値が 0 になる、 $P(t, x, D_t, D_x)E=0$

($t \geq 0, x_n > 0$) の解 E の特異性を考えたい。本講で扱うのは次の2つの場合である。(境界面は常に非特異的と仮定する。)

1° $P(t, x, D_t, D_x)$ の主要部が t 方向に真双曲型 (あるいは少しく一般に多重度一定) かつ境界条件 Lopatinsky 行列が $\neq 0$ 、更に、所謂 shadow condition が満たされているとする。この時

$p_m(t, x', x_n; \tau, \tau', \eta) \Big|_{\substack{x_n=0 \\ \tau'=0}} = 0$ は τ について τ のみを持つ (多重度一定ならその多重度に応じた修正を要する。以下同い) 従って $(t_0, x'_0; 1, 0)$ の

$(t, x'; \tau, \tau')$ が τ のある近傍を動く限り τ については問題は "双曲的"

である。実際、その近傍は $p_m=0, \frac{\partial p_m}{\partial \tau_n} \neq 0$ なる条件を満たし

$(t, x'; \tau, \tau') = (t_0, x'_0; 1, 0)$ と含む $(1-\tau)S \times N$ の連結成分に他ならぬ。

ここに $N = \{x_n=0\}$ 、 (t_0, x'_0) は最も速い "波" ((t, x', x_n)

$= (0, 0, a)$ より出る陪特異曲線で最も速く N に達する物) の

N への到達点である。従ってこの時は $\frac{\partial p_m}{\partial \tau_n} \neq 0$ 故陪特

異曲線は N と横断的に交わる故、"浜田の方法" により

反射波を容易に構成できる。 E の特異性が V で反射される

臨界状態に集中していることは、超双曲系の制限積分等の性質
と特異値スパートラムの関係を用いて、初期値問題の時と同様にできる。
(たとえば、松村, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 2 (1971) pp. 363
- 397 参照) 尚、一階双曲系の場合は Lewis, J. Math. Mech. 2 (1958)
pp. 571-592 も参照。

2° もう一つの場合は D が 定数係数, 斉次, 境界作用素も斉次の場合である。この時 $P = a(D)$, 境界作用素 B_p

$B_p (p=1, \dots, k)$ として (但し k は $a(\tau, \gamma', \gamma_n)$
 $= \prod_{j=1}^m (\gamma_n - \lambda_j(\tau, \gamma'))$ として (τ, γ') が適当な柱状領域 Γ_0

を動く時 $\Im \lambda_1(\tau, \gamma'), \dots, \Im \lambda_k(\tau, \gamma') > 0$ ととれることが知られている

から (たとえば松村; Proc. Japan Acad. 47 (1971) pp. 115-

119 参照) その k をとる) $\Delta(\tau, \xi') = \det (B_p(\tau, \gamma', \lambda_j(\tau, \gamma'))_{1 \leq j, p \leq k}$

$\varphi_j(x, \alpha, s, y'; \tau, \gamma') = \alpha_n \lambda_j(\tau, \gamma') + (\alpha - s)\tau + \langle \alpha' - y', \gamma' \rangle$

を定め, E を
$$\int \sum \frac{1}{\Delta(\tau, \gamma') \varphi_j^p(x, \alpha, s, y'; \tau, \gamma')} c_{j,\ell} \omega(\tau, \gamma')$$

の形にて求める。(P, B_p いずれも斉次と仮定したのは, ここで

係数 $c_{j,\ell}$ を決めることを容易にするためである。) 以下その

特異性は Δ^{-1} の正則な領域 と $\{ \varphi_j \neq 0, \varphi_j$ 正則 $\}$ という

領域の共通部分を調べることに由り, 被積分函数の特異性を

スパートラムを調べ, 通常通り積分と特異値スパートラムの関係を

見ればよい。その議論は本質的には (Atiyah-Bott-Gårding に
よる) 局所化の方法と云ってよい。(たとえば河合, J. Math.
Soc. Japan 24 (1972) pp. 481-517 等参照) しかし、この場合
 φ_j の正則な領域を調べる部分が面倒で本質的に平方根
型の特異性を持つ λ_j (所謂 Agmon の条件) の場合以外
今の所どのようにうまく幾何学的に捕えぬか私には
判らない。