

森夢空間にまつわるエトセトラ

大川 新之介^{*†}

概要

森夢空間に関する基本事項を復習した後、著者の研究結果および関連する未解決問題について概説する。

1 導入

森夢空間 (Mori dream space) という代数多様体のクラスは 2000 年に [HK] で導入された。森夢空間には同値な二通りの定義の仕方があり、どちらの立場からも様々な研究が為されている。

森夢空間のもっとも基本的な例は射影的 toric 多様体である。toric 多様体上の直線束が非常に良い性質を持つということが知られているが、それらを抽出することで森夢空間が定義される (定義 2.1)。これが一つ目の定義である。

さて、射影的 toric 多様体のもっとも基本的な例は射影空間である。 n 次元射影空間は、 $n+1$ 次元の affine 空間を 1 次元 torus の作用で割る (正確には、GIT 商を取る) ことによって作られるのであった。[Co] において、一般の射影的 toric 多様体も affine 空間の (因子類群の階数と同じ次元の) torus による GIT 商に書けるということが指摘された。この性質を抽象化し、ある種の affine 多様体の torus による商を考えたものが森夢空間である、というのがもう一つの定義である (§2.2)。ここにあらわれる affine 多様体の関数環を Cox 環と呼ぶのであるが、これは環論的な観点からも興味深い対象である。

本稿の前半では上述の二通りの定義について簡単に解説をする。また、幾つかの例を挙げる。後半 (§3) では、筆者の研究結果について概説する。それと共に、関連する未解決問題を幾つか挙げる。森夢空間や Cox 環に関する事項を網羅することは意図していない

^{*} 東京大学数理科学研究科博士課程 2 年 okawa@ms.u-tokyo.ac.jp

[†] Supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (KAKENHI No. 22-849) and the Grant-in-Aid for JSPS fellows.

ので、その点はご了承ください。

特に断らないかぎり k は任意標数の代数閉体とし、代数多様体は全て k 上射影的かつ正規、さらに $\mathbb{Q}$ 分解的とする。簡単のため因子とそれが定める因子的層とをしばしば混同した書き方をする。因子といった場合、特に断らない限りは ($\mathbb{R}$ 因子ではなく) $\mathbb{Z}$ 因子を指すことにする。

謝辞

城之崎代数幾何学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さり、またプロシーディングスに記事を掲載させて下さった世話人の入谷さん、川口さん、中岡さんにこの場をお借りしてお礼を申し上げます。

2 森夢空間入門

2.1 森夢空間

定義 2.1. 体 k 上の射影的正規代数多様体 X が以下の条件を満たすとき、**森夢空間**と呼ばれる。

1. X は $\mathbb{Q}$ 分解的であり、因子類群 $\mathrm{Cl}(X)$ は有限生成。
2. $\mathrm{nef\ cone\ Nef}(X)$ が有理凸であり、 nef な直線束は全て $\mathrm{semiample}$ (つまり、何回か捻れば大域切断で生成される)。
3. 余次元 2 以上の閉集合を除いたところで同型な双有理射 $f_i : X \dashrightarrow X_i$ が有限個存在し、各 X_i も条件 1, 2 を満たす。さらに、 $\mathrm{movable\ cone\ Mov}(X)$ は $f_i^*(\mathrm{Nef}(X_i))$ たちの合併になっている。

定義の条件 3 に出てくる $\mathrm{movable\ cone}$ とは、完備線型系が固定部分を持たない (=movable な) 因子が張る錐体である。Movable な因子の完備線型系は余次元 2 以上の固定点集合を持つかもしれないが、適当なモデルに取り替えれば (必要ならば何回か捻って) 固定点集合を無くせる、というのが条件 3 の意味である。

森夢空間の例を幾つか挙げよう。

例 2.2. n を 3 以上の自然数、 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を非特異射影超曲面とする。Lefschetz の定理より、 $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1)$ が成立する。従って X は自明に森夢空間である。

この例からわかるように、一般型の代数多様体でも森夢空間になることはある。

例 2.3. $^*1X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ を次数 $(2, 4)$ の一般的な超曲面とする。再び Lefschetz より、 $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1, 0) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(0, 1)$ である。また、すぐわかるように X は 3 次元 Calabi-Yau 多様体である。

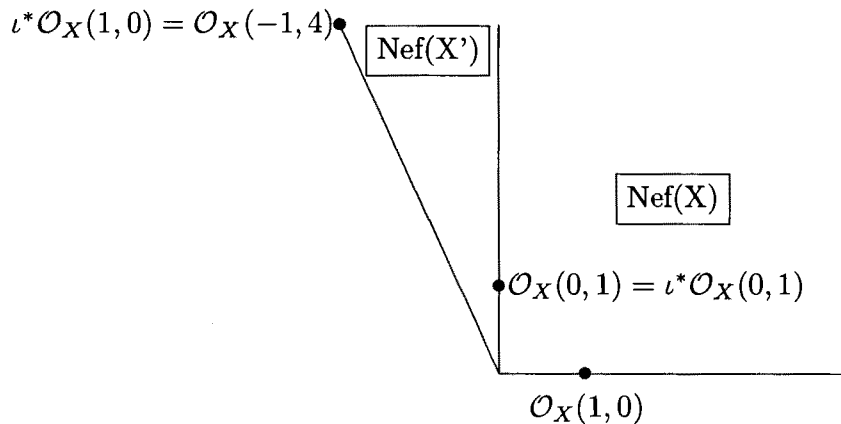
第二射影から定まる自然な射 $f : X \rightarrow \mathbb{P}^3$ を考えると、これは次数 2 の generically finite 射である。これを解析するために X の定義方程式を $X_0^2 f_0(Y_0, \dots, Y_3) + X_0 X_1 f_1(Y_0, \dots, Y_3) + X_1^2 f_2(Y_0, \dots, Y_3)$ と書く。 f_0, f_1, f_2 は次数 4 の斉次多項式である。これからわかるように、 f の fiber が有限個の点にならないのは $(Y_0 : \dots : Y_3) \in \mathbb{P}^3$ が f_0, f_1, f_2 の共通零点になっているときであり、そこでの fiber は $\mathbb{P}^1$ と同型である (共通零点は $4^3 = 64$ 点ある)。 f の Stein 分解を取り、連結 fiber 射の部分 $g : X \rightarrow Y$ とする。 K_X が自明であるので、 g は 64 本の $\mathbb{P}^1$ を潰す flopping contraction である。 g の flop を $g' : X' \rightarrow Y$ とする。

一方、 $f : X \rightarrow \mathbb{P}^3$ に関する被覆変換を ι とすると、これは X の位数 2 の双有理自己同型である。[Og, Theorem 3.3] の証明と同様の議論により、

$$\iota^* \mathcal{O}_X(0, 1) = \mathcal{O}_X(0, 1), \quad \mathcal{O}_X(1, 0) + \iota^* \mathcal{O}_X(1, 0) = \mathcal{O}_X(0, 4)$$

が成立する。このことから $X' = X$ 、 $g' = g \circ \iota$ が成立することがわかる。

以上より $\text{Mov}(X)$ は $\mathcal{O}_X(1, 0)$ と $\iota^* \mathcal{O}_X(1, 0) = \mathcal{O}_X(-1, 4)$ で張られる錐体であり、 $\text{Mov}(X)$ は $\text{Nef}(X) = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathcal{O}_X(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathcal{O}_X(0, 1)$ と $\text{Nef}(X') = \iota^* \text{Nef}(X) = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathcal{O}_X(0, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathcal{O}_X(-1, 4)$ の合併である。以上をもとに $\text{Mov}(X)$ を描くと以下のようになる。



こうして X が森夢空間であることがわかる。

例 2.4. 射影的かつ $\mathbb{Q}$ 分解的な toric 多様体は森夢空間である。これは以下で述べるよう

*1 この例は城之崎での講演後に小木曾先生に教えて頂きました。

に Cox 環が有限生成であることを確認することによって確かめられる (定理 2.13)。

森夢空間という名前の由来であるが、はっきりしたことは筆者の知る限りではどこにも明記されていない。恐らく、この名前には「森理論 = 極小モデル理論が夢のようにうまくいく代数多様体」という意味がこめられている。実際、 D を森夢空間上の因子としたとき、 D -因子収縮か D -フリップを有限回繰り返した後 D -nef モデルか D -森ファイバー空間にたどり着くことが証明できるのである [HK, Proposition 1.11]。 D がログ標準因子で無い場合にも極小モデルプログラムを走らせることが可能である、ということには実際的な利点がある (たとえば [GOST] では $(-K_X)$ -極小モデルを考えることが大切であった) のであるが、通常の場合と違い、プログラムを進めるにつれて特異点がだんだんと悪くなる可能性があることに注意しなければならない。

任意の因子に対して極小モデルプログラムが走るという性質は、実は森夢空間の定義よりも微妙に弱い。例えば K3 曲面は全てこの性質を持つのであるが、それらが全て森夢空間というわけではない。この辺の事情を説明しよう。

命題 2.5. X を K3 曲面或いは Enriques 曲面とする。このとき以下は同値である。

1. X は森夢空間。
2. X の nef cone は有理凸。
3. X の自己同型群は有限。

Proof. 1 と 2 の同値性は [AHL] で初めて証明されたのだが、ここでも簡単に説明をする。

X は曲面であるので、これが森夢空間であることと、nef cone が有理凸かつ nef 因子が全て semi-ample であることが同値である。Riemann-Roch と log mmp、log abundance より K3 曲面や Enriques 曲面については任意の nef 因子が semi-ample であるということがわかる ($\mathbb{R}$ 因子については不成立であるので注意!!)。以上より 1 と 2 が同値であることがわかる。1 から 3 は標準的な議論で示せる (例えば [Og, Theorem 3.1 (3)] の証明を参照のこと)。最後に 3 から 2 だが、これはいわゆる Morrison 予想の一部である ([Kaw, Theorem 2.1])。

□

尚、高次元の Calabi-Yau 多様体や射影的複素シンプレクティック多様体についても同様のことが成り立つと期待されている (ただしこの場合は自己同型群の有限性ではなく双有理自己同型群の有限性を考えるべきである)。

2.2 Cox 環と VGIT

定義 2.6. 射影的正規代数多様体 X と、 X 上の Weil 因子がなす有限生成な半群 $\Gamma \subset \text{Wdiv}(X)$ を考える。 Γ の多重切断環 $R_X(\Gamma)$ とは、 Γ で次数付けされた以下で定まる k -代数である。

$$R_X(\Gamma) = \bigoplus_{D \in \Gamma} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)).$$

これは Weil 因子 D の切断環

$$R(X, D) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$$

の一般化である。

定義 2.7. 射影的正規代数多様体 X は $\mathbb{Q}$ 分解的であり、因子類群 $\text{Cl}(X)$ は有限生成であるとする。 X 上の Weil 因子がなす有限生成群 Γ であって、自然な射

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Cl}(X)_{\mathbb{Q}}$$

が同型であるものを考える ($\bullet_{\mathbb{Q}} = \bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$)。このとき、 Γ の多重切断環 $R_X(\Gamma)$ を X の Cox 環と呼ぶ。

注意 2.8. $\text{Cl}(X)$ が torsion free な場合、 Γ として $\text{Cl}(X)$ と同型になるものを選ぶのが普通である。この場合、Cox 環の $\text{Cl}(X)$ による次数つき環としての同型類は一意に定まる。一般の場合には Cox 環は一意に定まらないが、有限生成性や特異点に関する性質 (log terminal, log canonical など) はこの曖昧さに依らない。詳しくは [GOST, Remark 2.17] を参照のこと。

例 2.9. Example 2.2 で見たように、3 次元以上の非特異射影超曲面 X の Picard 群は $\mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1)$ である。従って、 $\mathcal{O}_X(1)$ の切断環 $R(X, \mathcal{O}_X(1)) = k[X_0, \dots, X_{n+1}]/(F(X_0, \dots, X_{n+1}))$ は X の Cox 環である (F は X の定義方程式)。

例 2.10. X を射影的 toric 多様体であるとする。このとき、[Co] で証明されたように X の Cox 環は多項式環と同型である。さらに、多項式環の各変数は X の torus 不変な既約因子と 1 対 1 に対応する。

Cox 環は Γ による次数付けがあるため、 Γ の双対 torus $T = \text{Hom}_{gp}(\Gamma, k^*)$ が次のように作用する： $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \subset R_X(\Gamma)$ と $g \in T$ に対し $g \cdot s = g(D)s$ 。この作用に

より T は $V = \text{Spec } R_X(\Gamma)$ に作用するので、これに関する GIT (幾何学的不変式論) が考えられる。これについて少し復習しよう。

因子 $D \in \Gamma$ に対し、 T の指標 ev_D を $\text{ev}_D(g) = g(D) \in k^*$ で定める。これに対して半安定点集合 $V^{ss}(\text{ev}_D) \subset V$ が定まる。 $V^{ss}(\text{ev}_D)$ は T の作用で不変な開部分集合である。GIT の一般論から $V^{ss}(\text{ev}_D)$ の T による圏論的商 (categorical quotient) $V^{ss}(\text{ev}_D) \rightarrow V^{ss}(\text{ev}_D)//T$ が存在し、それは $\text{Proj}(R(\text{ev}_D))$ と同型であることがわかる。ただし、ここで $R(\text{ev}_D)$ は指標 ev_D に関する semi-invariant たちのなす環である。ただし $R_X(\Gamma)$ の元 f が指標 ev_D に関する semi-invariant であるとは、ある正数 m が存在して

$$g \cdot f = \text{ev}_D(g)^m f \quad (\forall g \in T)$$

が成立することをいう。この m によって $R(\text{ev}_D)$ には次数付けが入っていることに注意する。

例 2.11. X を例 2.2 に出てくる射影超曲面としよう。

$$V = \text{Spec } k[X_0, \dots, X_{n+1}]/(F(X_0, \dots, X_{n+1})) = V(F) \subset \mathbb{A}^{n+2}$$

である。このとき $V \setminus V^{ss}(\text{ev}_A) = \{(0, \dots, 0)\} \in V$ であり ($A = \mathcal{O}_X(1)$)、 $V^{ss}(\text{ev}_A)//k^* = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_{n+1}]/(F(X_0, \dots, X_{n+1}))) = X$ である。

D を取り替えるごとに $R(\text{ev}_D)$ も変わるため、商も変わる。指標に依存してこのように GIT 商が変化することを VGIT (variation of GIT quotients) と呼ぶ。

さて、定義に戻って考えればわかるように $R(\text{ev}_D) = R(X, D)$ が成立する。これに注意して、Cox 環の VGIT と直線束の幾何学の対応を考える。森夢空間上の豊富な因子 A を 1 つ固定しよう。任意に因子 D を取ってきたとき、以下のような可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 V^{ss}(\text{ev}_A) & \xleftarrow{\supset} & V^{ss}(\text{ev}_A) \cap V^{ss}(\text{ev}_D) & \xrightarrow{\subset} & V^{ss}(\text{ev}_D) \\
 \downarrow /T & & \downarrow /T & & \downarrow //T \\
 V^{ss}(\text{ev}_A)/T & \xleftarrow{\supset} & V^{ss}(\text{ev}_A) \cap V^{ss}(\text{ev}_D)/T & \longrightarrow & V^{ss}(\text{ev}_D)//T \\
 \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong \\
 X & \xrightarrow{\varphi_D} & & & \text{Proj } R(X, D)
 \end{array}$$

($\subset$ は開埋め込み)

上記の図式において、 $/T$ は幾何学的 (geometric) 商を表す。幾何学的商は特に圏論的商であるのだが、更に強く、商空間の点が群作用の軌道と 1 対 1 に対応しているということまで言える (圏論的商の場合、商空間の点は閉軌道のみを分類する)。また、 φ_D は $\text{Proj } R(X, D)$ の定義から自然に定まる有理射である。これからわかるように、2 つの因子 D, E について半安定点集合が一致していれば、有理射 φ_D と φ_E が同型になる。これを精密化すると、以下の命題を得る ([Ok, Proposition 6.8])。

命題 2.12. X を森夢空間、 D, E を X の上の因子とする。このとき、以下は同値である。

1. $V^{ss}(\text{ev}_D) = V^{ss}(\text{ev}_E)$ 。
2. φ_D と φ_E は同型であり、更に $\mathbb{B}(D) = \mathbb{B}(E)$ が成立する。

上の命題において、 $\mathbb{B}(D) = \bigcap_m Bs|mD|$ は D の stable base locus である。この命題により、 $\text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ の上に等価な 2 通りの同値関係が入ることに注意する。また、命題の証明で使う議論を発展させることで以下の重要な定理 (= [HK, Proposition 2.9]) を得る。

定理 2.13. 射影的正規代数多様体 X は $\mathbb{Q}$ 分解的であり、因子類群 $\text{Cl}(X)$ は有限生成であるとする。このとき、 X が森夢空間であることと X の Cox 環が有限生成であることは同値である。

射影的 toric 多様体の Cox 環は有限生成な多項式環であったので、上の定理からただちに森夢空間であることがわかる。

森夢空間の大切な例として、Fano 型の多様体がある。

定義 2.14. 射影的正規代数多様体 X が Fano 型であるとは、適当な effective $\mathbb{Q}$ 因子 Δ について (X, Δ) が klt でありかつ $-(K_X + \Delta)$ が豊富になることを言う。

錐体定理より、標数 0 の体上定義された Fano 型多様体の nef cone が有理凸であること、更に任意の nef 因子が semi-ample であることがわかる。近年 [BCHM] において次が証明された ([BCHM, Corollary 1.3.2])。

定理 2.15. 標数 0 の体上定義された Fano 型多様体は森夢空間である。

Cox 環の特異点による Fano 型多様体の特徴付けについては §3.4 を参照のこと。

コメント 2.16. 多重切断環の有限生成性が直線束の幾何学と深く関わる、という現象は Cox 環に限らない。多重切断環 $R_X(\Gamma)$ が有限生成なとき、半群 Γ が張る錐体のことを [HK] では森夢領域と呼んでいる。この領域の直線束に関しては、森夢空間と同様に (極小

モデル理論の観点から) 良い性質を期待できるのである。

Γ として有限個のログ標準因子が生成する半群を考えることにより、多重切断環の有限生成性から極小モデル理論を再構築するという立場もある ([CL])。

3 筆者の研究結果、いくつかの未解決問題

3.1 GKZ 分解の一般化

上述の通り、森夢空間 X の直線束の幾何と Cox 環の VGIT には密接な関係がある。これについてももう少し考えよう。先と同様 $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ と $\mathrm{Cl}(X)_{\mathbb{Q}}$ は同型であるとする。さらに $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ と $\chi(T)_{\mathbb{Q}}$ ($\chi(T)$ は T の指標群) には自然な同型 $D \mapsto \mathrm{ev}_D$ が存在する。これらを合わせて自然な同型 $\mathrm{Cl}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \chi(T)_{\mathbb{Q}}$ を得る。この同型によって effective cone に対応するのは、半安定集合が空でないような ($\iff$ 非自明な semi-invariant が存在するような) 指標がなす cone である。

さて、命題 2.12 で等価な 2 通りの同値関係を導入した。effective cone に、この同値関係を反映する扇の構造が入るというのが最初の結果である。

定理 3.1. 森夢空間 X の effective cone の上には、或る扇の構造が入る。その扇に属する錐体の相対内部は命題 2.12 に現れた (等価な 2 通りの) 同値関係についての同値類に一致する。

詳しくは [Ok, Proposition 6.8] を参照されたい。toric 多様体の場合、この扇構造は Gelfand-Kapranov-Zelevinsky (GKZ) 分解として [OP] で導入されている。また、[Ok] では Zariski 分解に注目してこの扇を導入したのであるが、Cox 環の VGIT の観点からは GIT 扇 [Hau] と呼ばれるものに一致する。例 2.3 の場合、図に描いたとおり 2 次元の錐体が 2 つ、1 次元の錐体が 3 つという扇になっている。他の例は、例えば [Ok, Example 9.1] を参照されたい。以下、森夢空間 X の扇を $\mathrm{Fan}(X)$ と書くことにする。

3.2 森夢空間と全射

一般に森夢空間をブローアップしたり変形したりすると、森夢空間でなくなる。一方で、像を取るぶんにはこの性質は保たれる ([Ok, Theorem 1.1])。

定理 3.2. X を森夢空間、 $f: X \rightarrow Y$ を任意の全射とする (Y も正規かつ $\mathbb{Q}$ 分解的とする)。このとき、 Y も森夢空間である。

証明は、 Y の Cox 環が有限生成であることを X の Cox 環が有限生成であることから導くという議論である。この結果は標数に依らずに成立する。

一方、 f から単射 $f^* : \text{Pic}(Y)_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ が定まるが、これによって X と Y の扇を比べることができる。実は、 Y の扇は X の扇の「制限」になっているということがわかる ([Ok, Theorem 1.2])。

定理 3.3. 定理 3.2 の状況で

$$\text{Fan}(Y) = \text{Fan}(X)|_{\text{Pic}(Y)_{\mathbb{R}}}$$

が成立する。

ただし $\text{Fan}(X)|_{\text{Pic}(Y)_{\mathbb{R}}}$ は $\text{Fan}(X)$ に属する錐体と部分空間 $\text{Pic}(Y)_{\mathbb{R}}$ の共通部分を取ることによって得られる扇である。

定理 3.1 で錐体の相対内部に 2 通りの解釈を与えたので、それぞれに対応してこの定理の証明も 2 通り与えることができる ([Ok] 参照)。

3.3 森夢空間の global Okounkov body

[LM] において (global) Okounkov body と呼ばれる概念が導入された。正確な定義は [LM] に譲るが、概要は以下の通りである。 X を n 次元射影的代数多様体、 L をその上の big 直線束とする。 X の部分多様体の列

$$Y_{\bullet} = (Y_0 = X \supseteq Y_1 \supseteq \cdots \supseteq Y_n = \{pt\})$$

(旗と呼ばれる。) を与えるごとに、 $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉凸部分集合 $\Delta_{Y_{\bullet}}(X, L)$ が定まり、 L の ($Y_{\bullet}$ に沿った) Okounkov body と呼ばれる。これは L の漸近的な情報を色々含んでいると期待されており、例えば $\Delta_{Y_{\bullet}}(X, L)$ の Euclid 体積 (の $n!$ 倍) は L の体積に一致することが知られている。また、Okounkov body を用いて L の (非常に一般的な点における) Seshadri 定数が評価できることがわかっている [I]。例えば toric 多様体の場合、豊富な直線束の Okounkov body は moment polytope に一致する。

Okounkov body を全ての直線束について束ねたものが global Okounkov body である。これは $\mathbb{R}^n \times N^1(X)_{\mathbb{R}}$ 内の閉凸錐であり、big 直線束 $L \in N^1(X)$ での fiber が L の Okounkov body と一致するものとして特徴付けられる (旗 $Y_{\bullet}$ は固定しておく)。

さて、一般に (global) Okounkov body は有理凸ではない。また、有理凸性は旗の選択にも依存する。一方で、非特異 toric 多様体の場合、toric strata を使って作った旗に関する global Okounkov body は有理凸であることが知られている [LM, Proposition 6.1

(ii)]. 森夢空間は toric 多様体の拡張であるので、同様の性質が成り立つが否かが気になる。すなわち、

問題 3.4. 森夢空間 X は、global Okounkov body が有理凸になるような旗を持つか？

上記の問題は [LM, Problem 7.1] であり、筆者のオリジナルではない。これについて [Ok3] で考察した。

注意 3.5. 森夢空間 X については体積関数が $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ 上の区分的多項式であることがわかっている。これは、森夢空間上の任意の直線束に Zariski 分解が存在すること、及びそれが区分的線型であること (より精密に、 $\text{Fan}(X)$ の極大錐体上では本当に線型である。) からすぐに従う。問題 3.4 はこの事実の精密化になっていることに注意する。

問題 3.4 は曲面については正しい ([Ok3, Lemma 1.2])。

命題 3.6. 森夢曲面上には global Okounkov body が有理凸になるような旗が存在する。

一般次元の場合を考えると、Okounkov body を次元に関して帰納的に計算したくなる。これは、 $\Delta_{Y_\bullet}(X, L)$ の切り口が Y_1 上の或る直線束の Okounkov body と関係する (理想的な状況では一致する) からである ([Ok3, Lemma 4.1])。この方法で考えていくと、次の素朴な問題を解決する必要がある。出てくる。

問題 3.7. 3 次元以上の森夢空間 X は、既約な因子であってそれ自体が森夢空間であるものを持つか？

問題 3.7 が肯定的に解決できれば、森夢空間 X は (2 次元以上の部分が) 森夢空間からなる旗を持つ。この旗に関する global Okounkov body は有理凸になるはずである (詳しくは [Ok3])。

もっとも素朴なアイディアは、豊富因子を取ることであろう。これに関しては [S] で証明されているとおり、 X がある条件を満たす場合には任意の既約な豊富因子が森夢空間になることがわかっている。具体的には、Cox 環 (対応する affine 多様体を V とする。) の GIT を考えたときに $V^{us}(\text{ev}_A) = V \setminus V^{ss}(\text{ev}_A)$ (A は任意の ample 因子) が V の中で余次元 3 以上を持つという条件である。例えば X が Picard 数 1 の場合はこの条件が成立する。

しかし、一般の森夢空間 X はその条件を満たさない。例えば toric の場合、対応する扇から任意に 2 つの 1 次元錐体を取ったとき、それらが張る錐体が再び扇に入るという条件と同値になる ([S])。殆どの toric 多様体はそのような条件を満たさないことに注意する。

「余次元 3 以上」という条件は必須である。実際、非特異射影的 toric 多様体の ample 因子が森夢空間にならない例が [Kaw][Og] など挙げられている。残念ながら、問題 3.7 は今のところ解決の方法がわからない状況である。

3.4 Fano 型多様体の Cox 環による特徴付けなど

射影的 toric 多様体は、Cox 環が多項式環になるということで特徴付けられる ([HK, Corollary 2.10])。射影的 toric 多様体は Fano 型であるので、同様の特徴付けを Fano 型多様体について期待するのは自然である。これについて、権業-三内-高木 (俊) 氏との共同研究 [GOST] で解答を与えた。

定理 3.8. 射影的正規代数多様体 X が Fano 型であるための必要十分条件は、 X が森夢空間でありかつその Cox 環が *log terminal* 特異点しか持たないことである。

[GOST] における定理 3.8 の証明は、標数 0 における *log terminal* 性が正標数還元の強 F 正則性と同値であるという結果 ([HW, Theorem 3.9]) に基づいている。これにより定理 3.8 の正標数版を証明すれば良いということになるのであるが、正標数版は証明が比較的容易であるということがポイントである。証明において鍵になったのは、次の定理である ([GOST, Theorem 1.2])。

定理 3.9. 森夢空間 X が Fano 型であるための必要十分条件は、 X が大域的強 F 正則型であることである。

大域的強 F 正則性とは強 F 正則性の_{大域版}であり、豊富因子の切断環が強 F 正則であることと同値である ([GOST, Proposition 2.10])。殆ど全ての素数への還元が大域的強 F 正則であるとき大域的強 F 正則型 (of globally F -regular type) と呼ぶのであるが、正確な定義は [GOST, Definition 2.13] や [SS] にゆずる。

一般に、Fano 型であれば大域的強 F 正則型であることが知られている [SS, Theorem 1.2]。森夢空間を仮定すれば逆が成立するというのが定理 3.9 の主張である。森夢空間を仮定しない場合これは未解決であるが、曲面の場合は正しいということが証明できる [Ok2]。曲面の場合の証明を高次元化しようとする、次の問題が気になる。

問題 3.10. X が F 有限な体 (正標数) 上定義された射影的代数多様体であるとする。 X が大域的強 F 正則であるとき、 X は森夢空間か？

これも曲面の場合は正しい [Ok2]。

参考文献

- [ADHL] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, and A. Laface, *Cox rings*, arXiv:1003.4229.
- [AHL] M. Artebani, J. Hausen, and A. Laface, *On Cox rings of K3 surfaces*, Compos. Math. **146** (2010), no. 4.
- [BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2.
- [CL] A. Corti, V. Lazic, *New outlook on Mori theory, II*, arXiv:1005.0614v2.
- [Co] D. A. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 1, 17–50.
- [GIT] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory, Third edition*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [GOST] Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai, and S. Takagi, *Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings*, 準備中、近日公開予定.
- [HW] N. Hara and K.-i. Watanabe, *F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 2, 363–392.
- [Hau] J. Hausen, *Cox rings and combinatorics II*, Mosc. Math. J. **8** (2008), no. 4.
- [HK] Y. Hu and S. Keel, *Mori Dream Spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000).
- [I] A. Ito, *Okounkov bodies and Seshadri constants*, preprint.
- [Kaw] Y. Kawamata, *On the cone of divisors of Calabi-Yau fiber spaces*, Internat. J. Math. **8** (1997).
- [LM] R. Lazarsfeld and M. Mustață, *Convex bodies associated to linear series*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 5.
- [M] J. McKernan, *Mori dream spaces*, Jpn. J. Math. **5** (2010), no. 1.
- [OP] T. Oda and H. Park, *Linear Gale transforms and Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions*, Tohoku Math. J. (2) **43** (1991), no. 3.
- [Og] K. Oguiso, *Birational automorphism groups and the movable cone theorem for Calabi-Yau manifolds of Wehler type via universal Coxeter groups*, arXiv:1107.5862.
- [Ok] S. Okawa, *On Images of Mori Dream Spaces*, arXiv:1104.1326.
- [Ok2] S. Okawa, *Surfaces of globally F-regular type are of Fano type*, 準備中.

- [Ok3] S. Okawa, *On global Okounkov bodies of Mori dream spaces*, in the proceedings of the Miyako-no-Seihoku Algebraic Geometry Symposium (2010). Also available on

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~okawa/papers.html>

- [S] J. Shin-Yao, *A Lefschetz hyperplane theorem for Mori dream spaces*, Math. Z. **268** (2011), no. 1-2.
- [SS] K. Schwede and K. Smith, *Globally F -regular and log Fano varieties*, Adv. Math. **224** (2010), no. 3.