

非線形方程式の Bifurcation Points の計算方法について

徳島大工 山本 範夫 (Norio Yamamoto)

§ 1. 序

我々は、非線形方程式の bifurcation points を正確に求める方法を提案する。そして、我々が、[14] で提案した周期解の bifurcation points を求める方法が、今回の方法と本質的に同じになることを示す。我々は、さらに、周期解が Hopf 分岐をおこす点を計算する方法を提案する。

§ 2. 非線形方程式 $F(x, B) = 0$ の場合

$(\hat{x}, \hat{B}) \in \Omega$ を、 n 次元の非線形方程式

$$(2.1) \quad F(x, B) = 0 \quad (B \text{ はパラメータ})$$

をみたし、かつ

$$(2.2) \quad n-1 = \text{rank } F_x(\hat{x}, \hat{B}) = \text{rank } (F_x(\hat{x}, \hat{B}), F_B(\hat{x}, \hat{B}))$$

を満足する点とする。ただし、 $F(x, B)$ は、 (x, B) -空間のある領域 Ω で、 (x, B) に関して 2 回連続微分可能であり、

$F_x(x, B)$ は, $F(x, B)$ の x に関する Jacobian 行列であり, $F_B(x, B)$ は, $F(x, B)$ の B に関する偏導関数である。我々は, この $(\hat{x}, \hat{B})$ を, 方程式 (2.1) の “bifurcation point” と呼ぶことにする。話を簡単にするために, 我々は,

$$(2.3) \quad n-1 = \text{rank } F_x(\hat{x}, \hat{B}) = \text{rank } F_0(\hat{x}, \hat{B})$$

を仮定する。ここで, $F_0(\hat{x}, \hat{B})$ は, $F_x(\hat{x}, \hat{B})$ の第 1 列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列とする。一方, 線形代数の結果より, ある自然数 j ($1 \leq j \leq n$) が存在して

$$(2.4) \quad n = \text{rank } (F_x(\hat{x}, \hat{B}), e_j) = \text{rank } (F_0(\hat{x}, \hat{B}), e_j)$$

が成り立つ。ただし, e_j は, $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)^T$ なる n 次元ベクトルである。ここで, $(\dots)^T$ は, ベクトル $(\dots)$ の転置ベクトルをあらわす。仮定 (2.2), (2.3) より, 方程式

$$(2.5) \quad \begin{cases} F_x(\hat{x}, \hat{B})h_2 + F_B(\hat{x}, \hat{B}) = 0, \\ h_1' = 0 \end{cases} \quad (h_2 = (h_2^1, h_2^2, \dots, h_2^n)^T)$$

は, ただ 1 つの解 $\hat{h}_2$ をもつ。したがって, bifurcation point $(\hat{x}, \hat{B})$ を求めるために, 我々は, パラメータ β を導入して, つぎの方程式

$$(2.6) \quad W(z) = \begin{pmatrix} F(x, B) - \beta e_j \\ F_x(x, B)h_1 \\ F_x(x, B)h_2 + F_B(x, B) \\ h_1' - 1 \\ h_2' \end{pmatrix} = 0$$

について考える。ただし, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{B}, \beta)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$, $\mathbf{h}_i = (h_i^1, h_i^2, \dots, h_i^n)^T$ ($i=1, 2$). 方程式 (2.6) は, 解 $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{h}}_2, \hat{\mathbf{B}}, 0)^T$ をもつ。ここで, $\hat{\mathbf{h}}_1$ は, 方程式

$$(2.7) \quad \begin{cases} F_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) \mathbf{h}_1 = 0, \\ \mathbf{h}_1^1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \left(\mathbf{h}_1 = (h_1^1, h_1^2, \dots, h_1^n)^T \right)$$

の解であり, $\hat{\mathbf{h}}_2$ は, (2.5) の解である。仮定より, $W(\mathbf{z})$ は, $\mathbf{z}$ に関して連続微分可能となり, $W'(\mathbf{z})$ を, $W(\mathbf{z})$ の $\mathbf{z}$ に関する Jacobian 行列とすれば, 解 $\hat{\mathbf{z}}$ に対して

$$(2.8) \quad \det W'(\hat{\mathbf{z}}) = \begin{vmatrix} F_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & 0 & F_{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & -e_j \\ F_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{h}}_1 & F_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & F_{\mathbf{x}\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{h}}_1 & 0 \\ F_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{h}}_2 + F_{\mathbf{B}\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & F_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & F_{\mathbf{x}\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{h}}_2 + F_{\mathbf{B}\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 & 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & F_0(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_j \\ (\#) & G_0(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & F_0(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & 0 & (\star) & 0 \\ (\#\#) & H_0(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{h}}_2, \hat{\mathbf{B}}) & 0 & 0 & 0 & F_0(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) & (\star\star) & 0 \\ 0 & 0 \ \dots \ 0 & 1 & 0 \ \dots \ 0 & 0 & 0 \ \dots \ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \ \dots \ 0 & 0 & 0 \ \dots \ 0 & 1 & 0 \ \dots \ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし,

$$(\#) = \{F_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{h}}_1\} \hat{\mathbf{h}}_1,$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} (\#\#) = \{F_{xx}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\mathcal{A}, \hat{B})\}\hat{h}_1, \\ (\hat{\star}) = F_{xB}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_1 + \{F_{xx}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_1\}\hat{h}_2, \\ (\hat{\star}\hat{\star}) = F_{xB}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_2 + F_{BB}(\mathcal{A}, \hat{B}) + \{F_{xx}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\mathcal{A}, \hat{B})\}\hat{h}_2 \end{cases}$$

であり, $G_0(\mathcal{A}, \hat{h}_1, \hat{B})$ および $H_0(\mathcal{A}, \hat{h}_2, \hat{B})$ は, それぞれ, $F_{xx}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_1$ および $F_{xx}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\mathcal{A}, \hat{B})$ の第1列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列である。(2.9)より,

$$(2.10) \quad (\#\#) = (\hat{\star}).$$

このとき, 我々は, 次の結果を得る。

定理1. $\text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\#\#)) = n-1$ が成り立つならば,

$$(2.11) \quad \det W'(\hat{\mathcal{Z}}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\hat{\star})) = n.$$

定理2. $\text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\hat{\star})) = n-1 < n = \text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\#\#))$ が成り立つならば,

$$(2.12) \quad \det W'(\hat{\mathcal{Z}}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\hat{\star}\hat{\star})) = n.$$

定理3. $\text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\#\#)) = \text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), (\hat{\star})) = n$ が成り立つならば,

$$(2.13) \quad \det W'(\hat{\mathcal{Z}}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(F_0(\mathcal{A}, \hat{B}), \hat{\mathcal{S}}) = n.$$

ただし,

$$(2.14) \quad \hat{\mathcal{S}} = F_{xB}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_2 + F_{BB}(\mathcal{A}, \hat{B}) + \{F_{xx}(\mathcal{A}, \hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\mathcal{A}, \hat{B})\}\hat{h}_1.$$

ここで, $\hat{k}$ は, 方程式

$$(2.15) \quad \begin{cases} F_x(\alpha, \beta)k + F_\beta(\alpha, \beta) = 0, \\ F_x(\alpha, \beta)k' + \{F_{xx}(\alpha, \beta)\hat{k}_1\}k + F_{x\beta}(\alpha, \beta)\hat{k}_1 = 0, \\ k'_1 = 0 \end{cases}$$

をみたす解 $(\hat{k}, \hat{k}')^T$ の k -成分 $\hat{k}$ である。ただし, $k = (k_1, \dots, k_n)^T$, $k' = (k'_1, \dots, k'_n)^T$.

§ 3. 特性乗数 1 をもつ周期解の分岐について

我々は, n 次元の周期的微分方程式系

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = X(x, B, t) \quad \left(\begin{array}{l} t \text{ に関し周期 } 2\pi, \\ B \text{ はパラメータ} \end{array} \right)$$

の周期解 $x = x(t)$ で, その第一変分方程式

$$(3.2) \quad \frac{dh}{dt} = X_x(x(t), B, t)h$$

が, 特性乗数 1 をもつ場合, すなわち, (3.2) の $\Phi(0) = E_n$ (n 次の単位行列) をみたす基本行列を $\Phi(t)$ とするとき, $\Phi(2\pi)$ が固有値 1 をもつ場合について考える。ここで, $X(x, B, t)$ は, ある領域 $\Delta \times R$ で定義されており, そこで, (x, B) に関して 2 回連続微分可能であり, $X(x, B, t)$ およびその (x, B) に関する 1 階, 2 階偏導関数は, すべて, $\Delta \times R$ で (x, B, t) に関して連続であるとする。ただし, Δ は, (x, B) -

空間のある領域であり, R は数直線である。いま, $(x(0), B) \in \Delta$ に対して, $\varphi(0, x(0), B) = x(0)$ をみたす (3.1) の解を, $\varphi(t, x(0), B)$ と書くことにして, つぎの方程式

$$(3.3) \quad F(x(0), B) = \varphi(0, x(0), B) - \varphi(2\pi, x(0), B) = x(0) - \varphi(2\pi, x(0), B) = 0$$

について考える。そうすれば, (3.3) をみたす $(\hat{x}(0), \hat{B})$ の x -成分 $\hat{x}(0)$ は, 実は, (3.1) の $B = \hat{B}$ における 2π -周期解の初期値になっている。すなわち, $B = \hat{B}$ のとき, $t=0$ で $\hat{x}(0)$ を通る (3.1) の解 $\varphi(t, \hat{x}(0), \hat{B})$ は, 2π -周期解になる。故に, (3.1) の 2π -周期解を求める問題は, 非線形方程式 (3.3) をみたす点を求める問題に帰着される。仮定より, $F(x(0), B)$ は, $(x(0), B)$ に関して 2 回連続微分可能であり, $F_x(x(0), B)$ を, $F(x(0), B)$ の $x(0)$ に関する Jacobian 行列とすれば,

$$(3.4) \quad F_x(x(0), B) = E_n - \Phi(2\pi)$$

となる。したがって, (3.1) の特性乗数 1 をもつ周期解で分岐するものについて考えるという問題は, (3.3) をみたす $(\hat{x}(0), \hat{B}) \in \Delta$ で,

$$(3.5) \quad \begin{cases} n-1 = \text{rank } F_x(\hat{x}(0), \hat{B}) = \text{rank } [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] \\ \quad = \text{rank } [E_n - \hat{\Phi}(2\pi), \hat{\Phi}_1(2\pi)] = \text{rank } (F_x(\hat{x}(0), \hat{B}), F_B(\hat{x}(0), \hat{B})) \end{cases}$$

を満足するものについて考えるという問題に帰着される。ただし, $\hat{\Phi}(t)$ は, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の $\hat{\Phi}(0) = E_n$ をみたす基本行列であり, $\hat{\Phi}_1(t) = \hat{\Phi}(t) \int_0^t \hat{\Phi}^{-1}(s) X_B(\hat{x}(s), \hat{B}, s) ds$

である。ここで、 $\hat{x}(t)$ は、 $B=\hat{B}$ のとき、 $t=0$ で $\hat{x}(0)$ を通る (3.1) の解、すなわち、 2π -周期解であり、 $F_B(x(0), B)$ および $X_B(x, B, t)$ は、それぞれ、 $F(x(0), B)$ および $X(x, B, t)$ の B に関する偏導関数である。実は、 $F_B(\hat{x}(0), \hat{B}) = -\hat{\Phi}_1(2\pi)$ 。この場合、話を簡単にするために、§2 と同様に、

(3.6) $n-1 = \text{rank } F_x(\hat{x}(0), \hat{B}) = \text{rank } [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank } \hat{D}_0(2\pi)$
 を仮定する。ここで、 $\hat{D}_0(t)$ は、 $E_n - \hat{\Phi}(t)$ の第1列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列である。一方、 n 次元ベクトル $e_j = (0, \dots, 0, \frac{1}{j}, 0, \dots, 0)^T$ は、

(3.7) $n = \text{rank } [E_n - \hat{\Phi}(2\pi), e_j] = \text{rank } (\hat{D}_0(2\pi), e_j)$
 をみたすベクトルである。そうすれば、§2 で述べたように bifurcation point $(\hat{x}(0), \hat{B})$ を求めるには、(2.6) に相当する方程式、すなわち、

$$(3.8) \quad W(z) = \begin{pmatrix} F(x(0), B) - \beta e_j \\ F_x(x(0), B)h_1(0) \\ F_x(x(0), B)h_2(0) + F_B(x(0), B) \\ h_1' - 1 \\ h_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0, y) - \varphi(2\pi, y) - \beta e_j \\ \varphi_1(0, y) - \varphi_1(2\pi, y) \\ \varphi_2(0, y) - \varphi_2(2\pi, y) \\ h_1' - 1 \\ h_2' \end{pmatrix} = 0$$

について考えればよい。ただし、 $y = (x(0), h_1(0), h_2(0), B)^T$ 、 $z = (y, \beta)^T$ 、 $x(0) = (x_1, \dots, x_n)^T$ 、 $h_i(0) = (h_i^1, h_i^2, \dots, h_i^n)^T$ ($i=1, 2$) であり、 $(\varphi(t, y), \varphi_1(t, y), \varphi_2(t, y))^T$ は、

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, B, t), \\ \frac{dh_1}{dt} = X_x(x, B, t)h_1, \\ \frac{dh_2}{dt} = X_x(x, B, t)h_2 + X_B(x, B, t) \end{cases}$$

の初期条件 $(\varphi(0, y), \varphi_1(0, y), \varphi_2(0, y))^T = (x(0), h_1(0), h_2(0))^T$ をみたす解である。一方、我々は、[14]で、(3.1)の右辺 $X(x, B, t)$ が特別な条件を満たすとき、bifurcation point $(\hat{x}(0), \hat{B})$ を求めるのに、上に述べた方法とは違う方法を提案した。ここでは、この2つの方法が、本質的に同じであることを示す。まず、我々は、次の2つの場合に分けて考える。

Case (I). $x_0(t)$ を、 $(x_0(t), B) \in \Delta$ for $\forall t$ をみたす任意の反周期 π (すなわち、 $x_0(t+\pi) = -x_0(t)$ for $\forall t$) の関数とするとき、

$$(3.10) \quad \begin{cases} X(x_0(t), B, t), X_B(x_0(t), B, t), X_{xx}(x_0(t), B, t) \text{ は,} \\ t \text{ に関して反周期 } \pi, X_x(x_0(t), B, t), X_{xB}(x_0(t), B, t) \\ \text{は, } t \text{ に関して周期 } \pi \text{ である。} \end{cases}$$

さらに、 $\hat{x}(t)$ を、 $B = \hat{B}$ のときの(3.1)の反周期 π の周期解、 $\hat{\Phi}(t)$ を、 $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの(3.2)の初期条件 $\hat{\Phi}(0) = E_n$ をみたす基本行列とするとき、

$$(3.11) \quad \begin{cases} n-1 = \text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(\pi)] = \text{rank } \hat{D}_0(\pi), \\ n-1 = \text{rank } F_x(\hat{x}(0), \hat{B}) = \text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank } \hat{D}_0(2\pi) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \text{rank} [\hat{D}_0(2\pi), \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank} (F_x(\hat{x}(0), \hat{B}), F_B(\hat{x}(0), \hat{B})), \\ n = \text{rank} [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]. \end{array} \right.$$

Case (II). $x_0(t)$ を, $(x_0(t), B) \in \Delta$ for $\forall t$ をみたす
周期 π の任意の関数とすると,

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(x_0(t), B, t), X_B(x_0(t), B, t), X_{xx}(x_0(t), B, t), \\ X_x(x_0(t), B, t) \text{ および } X_{xB}(x_0(t), B, t) \text{ は, すべて, } t \text{ に関して周期} \pi \text{ である。} \end{array} \right.$$

さらに, $\hat{x}(t)$ を, $B = \hat{B}$ のときの (3.1) の周期 π の周期解,
 $\hat{\Phi}(t)$ を, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の初期条件 $\hat{\Phi}(0) = E_n$
をみたす基本行列とすると,

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} n-1 = \text{rank} [E_n + \hat{\Phi}(\pi)] = \text{rank} \hat{\mathcal{Q}}_0(\pi), \\ n-1 = \text{rank} F_x(\hat{x}(0), \hat{B}) = \text{rank} [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank} \hat{D}_0(2\pi) \\ = \text{rank} [\hat{D}_0(2\pi), \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank} (F_x(\hat{x}(0), \hat{B}), F_B(\hat{x}(0), \hat{B})), \\ n = \text{rank} [E_n - \hat{\Phi}(\pi)]. \end{array} \right.$$

ただし, $\hat{\mathcal{Q}}_0(t)$ は, $E_n + \hat{\Phi}(t)$ の第1列を取り除いた $n \times (n-1)$
行列である。

Case (I), Case (II) は, とともに同じような議論をする
ので, Case (I) について考えていく。まず, 仮定 (3.10) より,
 $X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)$ は周期 π となるから, 基本行列 $\hat{\Phi}(t)$ は,

$$(3.14) \quad \hat{\Phi}(t+\pi) = \hat{\Phi}(t)\hat{\Phi}(\pi) \quad \text{for } \forall t$$

をみたしている。したがって、 $\hat{\Phi}(2\pi) = \hat{\Phi}(\pi)^2$ であるから、
方程式

$$(3.15) \quad F_x(\hat{x}(0), \hat{B})\hat{k} = [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)]\hat{k} = 0$$

は、

$$(3.16) \quad [E_n + \hat{\Phi}(\pi)][E_n - \hat{\Phi}(\pi)]\hat{k} = 0$$

とかける。仮定 (3.11) より、方程式

$$(3.17) \quad \begin{cases} [E_n - \hat{\Phi}(\pi)]\hat{k} = 0, \\ \hat{k}_1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \left(\text{ここで, } \hat{k} = (\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_n)^T \right)$$

は、ただ1つの解 $\hat{k}$ をもち、この $\hat{k}$ は、(3.16) (または、
(3.15)) の解でもある。したがって、 $\hat{h}(t) \equiv \hat{\Phi}(t)\hat{k}$ とおけば、
 $\hat{h}(t)$ は、 $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の 2π -周期解に
なっている。ところが、 $\hat{k}$ は、もともと (3.17) の解であり、
かつ仮定 (3.10) より、 $X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)$ は周期 π であるから、実
は、 $\hat{h}(t)$ は、 $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の周期 π の周期解
になる。したがって、bifurcation point $(\hat{x}(0), \hat{B})$ を求める
には、我々は、次の方程式

$$(3.18) \quad H(x) = \begin{pmatrix} \varphi(0, x) + \varphi(\pi, x) \\ \varphi_1(0, x) - \varphi_1(\pi, x) \\ \hat{k}_1 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

について考えればよい。ただし、 $x = (x(0), h(0), B)^T$, $x(0) =$

$$(x_1, \dots, x_n)^T, h(0) = (h_1, \dots, h_n)^T \text{ であり, } (\varphi(t, x), \varphi_1(t, x))^T \text{ は,}$$

$$(3.19) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, B, t), \\ \frac{dh}{dt} = X_x(x, B, t)h \end{cases}$$

の初期条件 $(\varphi(0, x), \varphi_1(0, x))^T = (x(0), h(0))^T$ をみたす解である。
 そうすれば, 上に述べたことより, 方程式 (3.18) は, 解 $\hat{x} = (\hat{x}(t), \hat{h}(t), \hat{B})^T$ (もちろん, $\hat{h}(0) = \hat{h}$) をもち, この解 $\hat{x}$ に対して, 我々は, 次の定理を得る。

定理 4.

$$(3.20) \quad \det H'(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\hat{D}_0(\pi), \hat{\eta}) = n.$$

ただし, $H'(x)$ は, $H(x)$ の x に関する Jacobian 行列であり,
 $\hat{\eta} = -\hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\xi} - \hat{\mathfrak{K}}_2(\pi)$. ここで, $(\hat{\Phi}(t), \hat{\Phi}_2(t))^T$ は,

$$(3.21) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{h}(t)\}z_1 \end{cases}$$

の初期条件 $(\hat{\Phi}(0), \hat{\Phi}_2(0))^T = (E_n, 0)^T$ (0 は, $n \times n$ 零行列)
 をみたす解 ($2n \times n$ 行列) であり, $\hat{\xi}$ は,

$$(3.22) \quad [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\xi} = -\hat{\mathfrak{K}}_1(\pi) \quad (\hat{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T)$$

の解であり, $\hat{\mathfrak{K}}_2(t)$ は,

$$(3.23) \quad \frac{dP}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)P + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{\mathfrak{K}}_1(t) + X_{xB}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\}\hat{h}(t)$$

の初期条件 $\hat{x}_2(0)=0$ をみたす解である。

証明. 解 $\hat{x}$ に対して

$$(3.24) \quad \det H'(\hat{x}) = \begin{vmatrix} E_n + \hat{\Phi}(\pi) & 0 & \hat{x}_1(\pi) \\ -\hat{\Phi}_2(\pi) & E_n - \hat{\Phi}(\pi) & -\hat{x}_2(\pi) \\ 0 \cdots 0 & 1 \cdots 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E_n + \hat{\Phi}(\pi) & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{\Phi}_2(\pi) & 0 & \hat{D}_0(\pi) & \hat{\eta} \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

これより, 結論 (3.20) がいえる。

証明終り.

Case (II) の場合には, 方程式 (3.18) のかわりに, 次の方程式

$$(3.25) \quad K(x) = \begin{pmatrix} \varphi(0, x) - \varphi(\pi, x) \\ \varphi_1(0, x) + \varphi_1(\pi, x) \\ h_1 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

について考えればよい。仮定より, 方程式 (3.25) は, 解 $\hat{x} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{B})^T$ をもち, この解 $\hat{x}$ に対して, 我々は, 次の定理を得る。

定理 5.

$$(3.26) \quad \det K'(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\hat{\mathcal{Q}}_0(\pi), \hat{\eta}') = n.$$

ただし, $K'(x)$ は, $K(x)$ の x に関する Jacobian 行列であり,
 $\hat{\eta}' = \hat{\Phi}_2(\pi) \hat{\xi}' + \hat{\Phi}_2(\pi)$. ここで, $\hat{\xi}'$ は,

$$(3.27) \quad [E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\xi}' = \hat{\Phi}_1(\pi) \quad (\hat{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)^T)$$

の解である。

まず, Case (I) の場合に, 方程式 (3.8) と (3.18) の間の関係を調べる。(3.18) の解 $\hat{x} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{\beta})^T$ に対して,
 $\hat{z} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{h}_2(0), \hat{\beta}, 0)^T$ は, (3.8) の解になっている。ただし, $\hat{h}_2(0)$ は,

$$(3.28) \quad \begin{cases} F_x(\hat{x}(0), \hat{\beta}) \hat{h}_2(0) + F_{\beta}(\hat{x}(0), \hat{\beta}) = 0, \\ \hat{h}_2' = 0 \end{cases} \quad (\hat{h}_2(0) = (h_2^1, h_2^2, \dots, h_2^n)^T)$$

の解である。この解 $\hat{z}$ に対して, 仮定 (3.10) および基本行列に関する結果 (3.14) より,

$$(3.29) \quad \begin{cases} \hat{\Phi}_1(2\pi) = -[E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\Phi}_1(\pi), \\ \hat{\Phi}_2(2\pi) = [E_n + \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\Phi}_2(\pi) - \hat{\Phi}_2(\pi) \hat{\Phi}_1(\pi), \\ \hat{\Phi}_2(2\pi) = \hat{\Phi}(\pi) \hat{\Phi}_2(\pi) - \hat{\Phi}_2(\pi) \hat{\Phi}(\pi), \\ \hat{\ell}(2\pi) = -\hat{\Phi}_2(2\pi) \hat{h}(0) = -[E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\ell}(\pi) \end{cases}$$

がいえ。ただし, $\hat{\ell}(t) = -\hat{\Phi}_2(t) \hat{h}(0)$. ところが,

$$(3.30) \quad (\#) = \{F_{xx}(\hat{x}(0), \hat{\beta}) \hat{h}(0)\} \hat{h}(0) = -\hat{\Phi}_2(2\pi) \hat{h}(0) = \hat{\ell}(2\pi)$$

となるから, (3.29) より,

$$(3.31) \quad n-1 = \text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi), \hat{\ell}(2\pi)] = \text{rank}(F_x(\hat{x}(0), \hat{\beta}), (\#)).$$

したがって、この場合、§2の定理1の場合になるから、

$$(3.32) \quad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\hat{D}_0(2\pi), (\hat{\star})) = n.$$

ただし、

$$(3.33) \quad (\hat{\star}) = F_{xB}(\hat{x}(0), \hat{B})\hat{h}(0) + \{F_{xx}(\hat{x}(0), \hat{B})\hat{h}(0)\}\hat{h}_2(0).$$

今の場合、

$$(3.34) \quad F_{xB}(\hat{x}(0), \hat{B})\hat{h}(0) = -\hat{\mathfrak{F}}_2(2\pi), \quad F_{xx}(\hat{x}(0), \hat{B})\hat{h}(0) = -\hat{\Phi}_2(2\pi)$$

となり、 $\hat{h}_2(0)$ は、

$$(3.35) \quad \hat{h}_2(0) = \hat{\mathcal{E}} + c\hat{h}(0) \quad (c \text{ は定数})$$

と書けるから、

$$(3.36) \quad \begin{cases} (\hat{\star}) = -[E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\{\hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathfrak{F}}_2(\pi)\} + c\hat{\ell}(2\pi) \\ \quad = [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\eta} + c\hat{\ell}(2\pi) \end{cases}$$

となる。したがって、

$$(3.37) \quad \begin{cases} \text{rank}(\hat{D}_0(2\pi), (\hat{\star})) = \text{rank}(E_n - \hat{\Phi}(2\pi), (\hat{\star})) \\ \quad = \text{rank}(E_n - \hat{\Phi}(2\pi), [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\eta}) \\ \quad = \text{rank}([E_n + \hat{\Phi}(\pi)][E_n - \hat{\Phi}(\pi)], [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\eta}) \\ \quad = \text{rank}(E_n - \hat{\Phi}(\pi), \hat{\eta}) = \text{rank}(\hat{D}_0(\pi), \hat{\eta}) \end{cases}$$

がいえるから、(3.20)および(3.32)より、

$$(3.38) \quad \det H'(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow \det W'(\hat{z}) \neq 0.$$

故に、Case (I) の条件を満たすときには、方程式(3.8)のかわりに、方程式(3.18)について考えれば十分であることがわかる。

次に, Case (II) の場合に, 方程式 (3.8) と (3.25) の間の関係について調べる。方程式 (3.25) の解 $\hat{x} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{\beta})^T$ に対して, Case (I) と同様に, $\hat{z} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{h}_2(0), \hat{\beta}, 0)^T$ は, (3.8) の解になっている。ただし, $\hat{h}_2(0)$ は, (3.28) の解である。この解 $\hat{z}$ に対して, この場合は,

$$(3.39) \quad \begin{cases} \hat{\mathfrak{F}}_1(2\pi) = [E_n + \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\mathfrak{F}}_1(\pi), \\ \hat{\mathfrak{F}}_2(2\pi) = -[E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\mathfrak{F}}_2(\pi) - \hat{\Phi}_2(\pi) \hat{\mathfrak{F}}_1(\pi), \\ \hat{\Phi}_2(2\pi) = \hat{\Phi}(\pi) \hat{\Phi}_2(\pi) - \hat{\Phi}_2(\pi) \hat{\Phi}(\pi), \\ \hat{\ell}(2\pi) = [E_n + \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\ell}(\pi) \end{cases}$$

がいえる。(したがって,

$$(3.40) \quad n-1 = \text{rank} [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank} [E_n - \hat{\Phi}(2\pi), \hat{\ell}(2\pi)]$$

がいえるから, この場合も, §2 の定理1より,

$$(3.41) \quad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank} (\hat{D}_0(2\pi), (\hat{\star})) = n.$$

今の場合,

$$(3.42) \quad \begin{cases} (\hat{\star}) = [E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \{ \hat{\Phi}_2(\pi) \hat{\mathfrak{F}}_1' + \hat{\mathfrak{F}}_2(\pi) \} + c' \hat{\ell}(2\pi) \\ \quad = [E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\eta}' + c' \hat{\ell}(2\pi) \quad (c' \text{ は定数}) \end{cases}$$

と書けるから,

$$(3.43) \quad \begin{cases} \text{rank} (\hat{D}_0(2\pi), (\hat{\star})) = \text{rank} (E_n - \hat{\Phi}(2\pi), (\hat{\star})) \\ \quad = \text{rank} (E_n - \hat{\Phi}(2\pi), [E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\eta}') \\ \quad = \text{rank} ([E_n - \hat{\Phi}(\pi)] [E_n + \hat{\Phi}(\pi)], [E_n - \hat{\Phi}(\pi)] \hat{\eta}') \\ \quad = \text{rank} (E_n + \hat{\Phi}(\pi), \hat{\eta}') = \text{rank} (\hat{D}_0(\pi), \hat{\eta}') \end{cases}$$

が いえる。したがって, (3.26) および (3.41) より,

$$(3.44) \quad \det K'(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow \det W'(\hat{z}) \neq 0.$$

故に, Case (II) の場合も, 方程式 (3.8) のかわりに, 方程式 (3.25) について考えれば十分である。

§ 4. 周期解の Hopf 分岐の計算方法

この節では, 周期系 (3.1) の周期解の Hopf 分岐について考える。すなわち, (3.2) の $\Phi(0) = E_n$ をみたす基本行列を $\Phi(t)$ とするとき, $\Phi(2\pi)$ が固有値 $e^{i\theta}$ をもつ場合について考える。いま, $B = \hat{B}$ のときの (3.1) の 2π -周期解を $\hat{x}(t)$ とし, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の $\hat{\Phi}(0) = E_n$ をみたす基本行列を $\hat{\Phi}(t)$ とするとき, $\hat{\Phi}(2\pi)$ が固有値 $e^{i\theta}$ をもつと仮定する。そうすれば, ある複素ベクトル $\hat{H}(0)$ が存在して

$$(4.1) \quad \hat{\Phi}(2\pi)\hat{H}(0) = e^{i\theta}\hat{H}(0) \quad (\text{または, } [e^{i\theta}E_n - \hat{\Phi}(2\pi)]\hat{H}(0) = 0).$$

この $\hat{H}(0)$ に対して, $\hat{H}(t) \equiv \hat{\Phi}(t)\hat{H}(0)$ とおけば, $\hat{H}(t)$ は, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の解で

$$(4.2) \quad e^{i\theta}\hat{H}(0) - \hat{H}(2\pi) = 0$$

をみたしている。ところが, このままでは, (4.2) をみたす (3.2) の解がただ1つに決まらないので, 適当な付加条件を与える必要がある。話を簡単にするために, 我々は,

$$(4.3) \quad n-1 = \text{rank} [e^{i\theta}E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank } \hat{H}. \quad (\text{複素行列として})$$

を仮定する。ただし, $\hat{H}_0$ は, $e^{i\hat{\theta}} E_n - \hat{\Phi}(2\pi)$ の第1列を取り除いた $n \times (n-1)$ 複素行列である。そうすれば, 次の条件

$$(4.4) \quad H_1(0) - 1 = 0$$

を与えれば, $\hat{H}(t)$ は, ただ1つに決まる。ただし, $H(0) = (H_1(0), H_2(0), \dots, H_n(0))^T$. さて, $\hat{H}(0) = \hat{h}(0) + i\hat{k}(0)$ とおいて, $\hat{h}(t) \equiv \hat{\Phi}(t)\hat{h}(0)$, $\hat{k}(t) \equiv \hat{\Phi}(t)\hat{k}(0)$ とおけば, $\hat{h}(t)$, $\hat{k}(t)$ は, もちろん, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の解になっており, かつ

$$(4.5) \quad \begin{cases} \hat{h}(0) \cos \hat{\theta} - \hat{k}(0) \sin \hat{\theta} - \hat{h}(2\pi) = 0, \\ \hat{h}(0) \sin \hat{\theta} + \hat{k}(0) \cos \hat{\theta} - \hat{k}(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \begin{cases} \hat{h}_1(0) - 1 = 0, \\ \hat{k}_1(0) = 0 \end{cases}$$

を満たしている。ただし, $\hat{h}(0) = (\hat{h}_1(0), \dots, \hat{h}_n(0))^T$, $\hat{k}(0) = (\hat{k}_1(0), \dots, \hat{k}_n(0))^T$. したがって, Hopf 分岐をおこすパラメータの値 $\hat{B}$ およびそのときの 2π -周期解 $\hat{x}(t)$ を求めるには, 次の方程式

$$(4.7) \quad G(x) = \begin{pmatrix} \varphi(0, x) - \varphi(2\pi, x) \\ \psi_1(0, x) \cos \theta - \psi_2(0, x) \sin \theta - \psi_1(2\pi, x) \\ \psi_1(0, x) \sin \theta + \psi_2(0, x) \cos \theta - \psi_2(2\pi, x) \\ h_1 - 1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \chi(0) - \varphi(2\pi, \chi) \\ h(0) \cos \theta - k(0) \sin \theta - \varphi_1(2\pi, \chi) \\ h(0) \sin \theta + k(0) \cos \theta - \varphi_2(2\pi, \chi) \\ h_1 - 1 \\ k_1 \end{pmatrix} = 0$$

について考えればよい。ただし, $\chi = (\chi(0), h(0), k(0), B, \theta)^T$,
 $\chi(0) = (\chi_1, \dots, \chi_m)^T$, $h(0) = (h_1, \dots, h_m)^T$, $k(0) = (k_1, \dots, k_m)^T$
 であり, $(\varphi(t, \chi), \varphi_1(t, \chi), \varphi_2(t, \chi))^T$ は,

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{d\chi}{dt} = X(\chi, B, t), \\ \frac{dh}{dt} = X_h(\chi, B, t)h, \\ \frac{dk}{dt} = X_k(\chi, B, t)k \end{cases}$$

の初期条件 $(\varphi(0, \chi), \varphi_1(0, \chi), \varphi_2(0, \chi))^T = (\chi(0), h(0), k(0))^T$ を
 みたす解である。前述の議論より, 方程式 (4.7) は, 解 $\hat{\chi} =$
 $(\hat{\chi}(0), \hat{h}(0), \hat{k}(0), \hat{B}, \hat{\theta})^T$ をもつ。 $G'(\chi)$ を, $G(\chi)$ の χ に
 関する Jacobian 行列 とすれば,

$$(4.9) \quad \det G'(\hat{\chi}) = \begin{vmatrix} E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & 0 & 0 & -\hat{\Phi}_1(2\pi) & 0 \\ -\hat{\Phi}_2(2\pi) & \cos \hat{\theta} E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & -\sin \hat{\theta} E_n & -\hat{\Phi}_2(2\pi) & \hat{\eta}_2 \\ -\hat{\Phi}_3(2\pi) & \sin \hat{\theta} E_n & \cos \hat{\theta} E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & -\hat{\Phi}_3(2\pi) & \hat{\eta}_3 \\ 0 \cdots 0 & 1 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 1 \cdots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{\Phi}_2(2\pi) & 0 & \hat{A}_0 & 0 & -\hat{C}_0 & (\hat{*}) & \hat{\eta}_2 \\ -\hat{\Phi}_3(2\pi) & 0 & \hat{C}_0 & 0 & \hat{A}_0 & (\hat{**}) & \hat{\eta}_3 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし, $\hat{\Phi}_2(t)$ は,

$$(4.10) \quad \frac{dz}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{h}(t)\}\hat{\Phi}(t)$$

の $\hat{\Phi}_2(0) = 0$ ($n \times n$ 零行列) をみたす解である;

$\hat{\Phi}_3(t)$ は,

$$(4.11) \quad \frac{dw}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)w + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{K}(t)\}\hat{\Phi}(t)$$

の $\hat{\Phi}_3(0) = 0$ ($n \times n$ 零行列) をみたす解である;

$(\hat{\mathfrak{P}}_1(t), \hat{\mathfrak{P}}_2(t), \hat{\mathfrak{P}}_3(t))^T$ ($3n$ 次元ベクトル) は,

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)P_1 + X_B(\hat{x}(t), \hat{B}, t), \\ \frac{dP_2}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)P_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)P_1 + X_{xB}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\}\hat{h}(t), \\ \frac{dP_3}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)P_3 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)P_1 + X_{xB}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\}\hat{K}(t) \end{cases}$$

の $(\hat{\mathfrak{P}}_1(0), \hat{\mathfrak{P}}_2(0), \hat{\mathfrak{P}}_3(0))^T = (0, 0, 0)^T$ をみたす解である;

$$(4.13) \quad \begin{cases} \hat{\eta}_2 = -\hat{h}(0)\sin\hat{\theta} - \hat{K}(0)\cos\hat{\theta}, \\ \hat{\eta}_3 = \hat{h}(0)\cos\hat{\theta} - \hat{K}(0)\sin\hat{\theta}; \end{cases}$$

$\hat{A}_0$ および $\hat{C}_0$ は, それぞれ, $\cos\hat{\theta}E_n - \hat{\Phi}(2\pi)$ および $\sin\hat{\theta}E_n$ の第1列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列である;

$$\{(\hat{*})\} = -\hat{\mathfrak{P}}_2(2\pi) - \hat{\Phi}_2(2\pi)\hat{\mu},$$

$$(4.14) \quad \begin{cases} (\hat{*}) = -\hat{\Phi}_3(2\pi) - \hat{\Phi}_3(2\pi)\hat{\mu}. \end{cases}$$

ここで, $\hat{\mu}$ は, 方程式

$$(4.15) \quad [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)]\mu = \hat{\Phi}_1(2\pi) \quad (\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T)$$

の解である。

そうすれば, (4.9) より, 我々は, 次の定理を得る。

定理 6.

$$(4.16) \quad \det G'(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \hat{A}_0 & -\hat{C}_0 & (\hat{*}) & \hat{\eta}_2 \\ \hat{C}_0 & \hat{A}_0 & (\hat{*}) & \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} = 2n.$$

次に, Hopf 分岐の特別な場合, すなわち, $\hat{\Phi}(2\pi)$ が固有値 1 を 2 重根にもち, かつ $\text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = n-1$ となる場合について考える。この場合, パラメータ B の次元を 2 とする。つまり, $B = (B_1, B_2)^T$ 。いま, $B = \hat{B} = (\hat{B}_1, \hat{B}_2)^T$ のときの (3.1) の 2π -周期解を $\hat{x}(t)$, そして, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の $\hat{\Phi}(0) = E_n$ をみたす基本行列を $\hat{\Phi}(t)$ とするとき, $\hat{\Phi}(2\pi)$ が固有値 1 を 2 重根にもち, かつ固有値 1 に対する Jordan ブロック $J(1)$ が, $J(1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$) なる形をしていると仮定する。そうすれば, あるベクトル $\hat{h} = (\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_n)^T$, $\hat{k} = (\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_n)^T$ が存在して

$$(4.17) \quad \begin{cases} \hat{\Phi}(2\pi)\hat{h} = \hat{h}, \\ \hat{\Phi}(2\pi)\hat{k} = \hat{k} + a\hat{h}. \end{cases}$$

いま, $\hat{h}(t) \equiv \hat{\Phi}(t) \hat{h}$, $\hat{k}(t) \equiv \hat{\Phi}(t) \hat{k} - \frac{a}{2\pi} t \hat{\Phi}(t) \hat{h}$ とおけば,
 $(\hat{h}(t), \hat{k}(t))^T$ は,

$$(4.18) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{h}}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t) \hat{h}, \\ \frac{d\hat{k}}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t) \hat{k} - \frac{a}{2\pi} \hat{h} \end{cases}$$

の 2π -周期解になっている。 $\hat{h}(t), \hat{k}(t)$ は, このままでは,
 定数倍だけの自由度があり, ただ1組に決まらないので, 適
 当な条件を与える必要がある。話を簡単にするために,

$$(4.19) \quad n-1 = \text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \text{rank } \hat{D}_0(2\pi)$$

と仮定する。ただし, $\hat{D}_0(t)$ は, $E_n - \hat{\Phi}(t)$ の第1列を取り
 除いた $n \times (n-1)$ 行列である。そうすれば,

$$(4.20) \quad \begin{cases} \hat{h}_1(0) - 1 = 0, \\ \hat{k}_1(0) = 0 \end{cases}$$

なる条件を与えてやれば, $\hat{h}(t), \hat{k}(t)$ は, ただ1組決まる。

したがって, この場合, 我々は, 次の方程式

$$(4.21) \quad M(x) = \begin{pmatrix} \varphi(0, x) - \varphi(2\pi, x) \\ \varphi_1(0, x) - \varphi_1(2\pi, x) \\ \varphi_2(0, x) - \varphi_2(2\pi, x) \\ \hat{h}_1 - 1 \\ \hat{k}_1 \end{pmatrix} = 0$$

について考えればよい。ただし, $x = (x(0), \hat{h}(0), \hat{k}(0), B)^T$,

$x(0) = (x_1, \dots, x_n)^T$, $h(0) = (h_1, \dots, h_n)^T$, $k(0) = (k_1, \dots, k_n)^T$, $B = (B_1, B_2)^T$ であり, $(\varphi(t, x), \varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x))^T$ は,

$$(4.22) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, B, t), \\ \frac{dh}{dt} = X_x(x, B, t)h, \\ \frac{dk}{dt} = X_x(x, B, t)k - \frac{a}{2\pi}h \end{cases}$$

の初期条件 $(\varphi(0, x), \varphi_1(0, x), \varphi_2(0, x))^T = (x(0), h(0), k(0))^T$ をみたす解である。上述の議論より, 方程式 (4.21) は, 解 $\hat{x} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{k}(0), \hat{B})^T$ をもつ。 $M'(x)$ を, $M(x)$ の x に関する Jacobian 行列とすれば, 解 $\hat{x}$ に対して

$$(4.23) \quad \det M'(\hat{x}) = \begin{vmatrix} E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & 0 & 0 & -\hat{\Phi}_{11}(2\pi) & -\hat{\Phi}_{12}(2\pi) \\ -\hat{\Phi}_2(2\pi) & E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & 0 & -\hat{\Phi}_{21}(2\pi) & -\hat{\Phi}_{22}(2\pi) \\ -\hat{\Phi}_3(2\pi) & aE_n & E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & -\hat{\Phi}_{31}(2\pi) & -\hat{\Phi}_{32}(2\pi) \\ 00 \cdots 0 & 10 \cdots 0 & 00 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 00 \cdots 0 & 00 \cdots 0 & 10 \cdots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし, $(\hat{\Phi}_2(t), \hat{\Phi}_3(t))^T$ は,

$$(4.24) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z_1 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{h}(t)\}\hat{\Phi}(t), \\ \frac{dz_2}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{k}(t)\}\hat{\Phi}(t) - \frac{a}{2\pi}z_1 \end{cases}$$

の $(\hat{\Phi}_2(0), \hat{\Phi}_3(0))^T = (0, 0)^T$ (0 は, $n \times n$ 零行列) をみたす

解であり, $(\hat{\mathbb{F}}_{1i}(t), \hat{\mathbb{F}}_{2i}(t), \hat{\mathbb{F}}_{3i}(t))^T$ ($i=1, 2$) は,

$$(4.25) \quad \begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t) w_1 + X_{\beta_i}(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t), \\ \frac{dw_2}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t) w_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t) w_1 + X_{x\beta_i}(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t)\} \hat{h}(t), \\ \frac{dw_3}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t) w_3 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t) w_1 + X_{x\beta_i}(\hat{x}(t), \hat{\beta}, t)\} \hat{h}(t) - \frac{a}{2\pi} w_2 \end{cases}$$

の $(\hat{\mathbb{F}}_{1i}(0), \hat{\mathbb{F}}_{2i}(0), \hat{\mathbb{F}}_{3i}(0))^T = (0, 0, 0)^T$ をみたす解である。

(4.23)より, 我々は, 次の定理を得る。

定理 7. $\text{rank}(\hat{D}_0(2\pi), \hat{\mathbb{F}}_{11}(2\pi)) = n$ が成り立つならば,

$$(4.26) \quad \det M'(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} \hat{D}_0(2\pi) & 0 & (\hat{\dagger}) & (\hat{*}) \\ aE_{n,n-1} & \hat{D}_0(2\pi) & (\hat{\dagger}\dagger) & (\hat{*}\ast) \end{pmatrix} = 2n.$$

ただし, $E_{n,n-1}$ は, 単位行列 E_n の第 1 列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列であり,

$$(4.27) \quad (\hat{\dagger}) = \hat{\Xi}_2(2\pi) \hat{h}(0), \quad (\hat{\dagger}\dagger) = \hat{\Xi}_3(2\pi) \hat{h}(0),$$

$$(4.28) \quad \begin{cases} (\hat{*}) = -\hat{\mathbb{F}}_{22}(2\pi) + [\hat{D}_2(2\pi), \hat{\mathbb{F}}_{21}(2\pi)] \hat{\eta}, \\ (\hat{*}\ast) = -\hat{\mathbb{F}}_{32}(2\pi) + [\hat{D}_3(2\pi), \hat{\mathbb{F}}_{31}(2\pi)] \hat{\eta}. \end{cases}$$

ここで, $\hat{D}_2(2\pi)$ および $\hat{D}_3(2\pi)$ は, それぞれ, $-\hat{\Xi}_2(2\pi)$ および $-\hat{\Xi}_3(2\pi)$ の第 1 列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列であり, $\hat{\eta}$ は, 方程式

$$(4.29) \quad [\hat{D}_0(2\pi), \hat{\mathbb{F}}_{11}(2\pi)] \eta = \hat{\mathbb{F}}_{12}(2\pi) \quad (\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T)$$

の解である。

注意.

H. Kawakami [11] は, Hopf 分岐を計算するため, 方程式 (4.7) のかわりに, 次の方程式

$$(4.30) \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} \varphi(0, \psi) - \varphi(2\pi, \psi) \\ g(\psi) \end{pmatrix} = 0$$

について考えた。ただし, $\psi = (x(0), B)^T$, $x(0) = (x_1, \dots, x_n)^T$ であり, $\varphi(t, \psi)$ は, (3.1) の初期条件 $\varphi(0, \psi) = x(0)$ をみたす解である。そして, $g(\psi) = 0$ は,

$$(4.31) \quad g_1(\psi, \theta) = \operatorname{Re} \{ \det(e^{i\theta} E_n - \Phi(2\pi)) \} = 0$$

$$(4.32) \quad g_2(\psi, \theta) = \operatorname{Im} \{ \det(e^{i\theta} E_n - \Phi(2\pi)) \} = 0$$

の2つの方程式から θ を消去した方程式である。ここで, $\operatorname{Re} \{ \cdot \}$ および $\operatorname{Im} \{ \cdot \}$ は, それぞれ, 複素数 $\{ \cdot \}$ の実部および虚部をあらわす。

§ 5. 数値例

例 1 (Hopf 分岐).

$$(5.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = B \cos \nu t \quad (\mu=0.2).$$

$\nu=0.9$ とおき, B をパラメータとして, Hopf 分岐を計算した。計算結果は,

$$(5.2) \quad \{ x(0)=1.25704, \dot{x}(0)=-0.55890, B=0.29563, \}$$

$$\left\{ \hat{\theta} = 0.59920 \quad (\cos \hat{\theta} = 0.82579, \sin \hat{\theta} = 0.56398). \right.$$

例2.

次に, (5.1)において, ν と B をパラメータにとり, Hopf分岐の特別な場合, すなわち, $\hat{\Phi}(2\pi)$ が固有値1を2重根にもち,かつ $\text{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = n-1$ となる場合について考える。計算結果は,

$$(5.3) \quad \begin{cases} x(0) = -0.99968, & \dot{x}(0) = -1.10124, \\ \hat{\nu} = 1.04940, & \hat{B} = 0.20741, \end{cases}$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} x(0) = 0.99960, & \dot{x}(0) = -0.90135, \\ \hat{\nu} = 0.94934, & \hat{B} = 0.19239. \end{cases}$$

ただし, $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

References

- [1] Abbott, J. P., An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points, J. Comp. and Appl. Math., 4 (1978), 19-27.
- [2] Seydel, R., Numerical computation of branch points in ordinary differential equations, Numer. Math., 32 (1979), 51-68.
- [3] Seydel, R., Numerical computation of branch points in nonlinear equations, Numer. Math., 33 (1979), 339-352.

- [4] Moore, G. and Spence, A., The calculation of turning points of nonlinear equations, SIAM J. Numer. Anal., 17 (1980), 567-576.
- [5] Pönisch, G. and Schwetlick, H., Computing turning points of curves implicitly defined by nonlinear equations depending on a parameter, Computing, 26 (1981), 107-121.
- [6] Weber, H. and Werner, W., On the accurate determination of nonisolated solutions of nonlinear equations, Computing, 26 (1981), 315-326.
- [7] Weber, H., On the numerical approximation of secondary bifurcation problems, Lecture Notes in Mathematics, 878 (1981), 407-425.
- [8] Seydel, R., Numerical computation of periodic orbits that bifurcate from stationary solutions of ordinary differential equations, Appl. Math. Comp., 9 (1981), 257-271.
- [9] Melhem, R. G. and Rheinboldt, W. C., A comparison of methods for determining turning points of nonlinear equations, Computing, 29 (1982), 201-226.
- [10] Spence, A. and Werner, B., Non-simple turning points and cusps, IMA J. Numer. Anal., 2 (1982), 413-427.
- [11] Kawakami, H., Bifurcations of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters, to appear in IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. 31 (March, 1984).
- [12] Yamamoto, N., Galerkin method for autonomous differential equations with unknown parameters, J. Math. Tokushima

Univ., 16 (1982), 55-93.

- [13] Yamamoto, N., A remark to Galerkin method for nonlinear periodic systems with unknown parameters, J. Math. Tokushima Univ., 16 (1982), 95-126.

- [14] Yamamoto, N., Newton's method for singular problems and its application to boundary value problems, J. Math. Tokushima Univ., 17 (1983), 27-88.