

Harmonic analysis on affine symmetric spaces

東大理 大島利雄

京大理 関口次郎

1. 問題

Riemannian symmetric space 上の不変微分作用素の同時固有函数と, その Martin 境界上の line bundle の hyperfunction sections の間には (generic には) Poisson 積分と境界値を取る操作とによって, 1対1の対応がある.

ここでは, "Riemannian symmetric space をある compact real analytic manifold に open に埋め込んだ時にその外側にあらわれる" 必ずしも Riemannian とは限らない, symmetric space に対して, 上に述べた命題の類似を考えることにする.

必ずしも Riemannian とは限らない symmetric space (それを affine symmetric space と呼ぶことにする) の分類は M. Berger [1] にある. ここで考察の対象にするもの

は、そのうちの特殊なものである。もっと一般的に扱うことも可能だと思われるが、それについてはふれない。

特に断わらないで使う記号は大島[3]参照のこと。

2. 岩沢分解

G を connected real semisimple Lie group with finite center, K をその maximal compact subgroup, それぞれの Lie algebra を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とする。 $\mathfrak{k}$ に関する $\mathfrak{g}$ の Cartan involution を θ とする。 $(\mathfrak{g}, \alpha)$ に関する root system を Σ で表わし, それに順序を入れておく。 positive simple roots の集合を $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ とする。

次の条件をみたす写像 $\varepsilon: \Sigma \rightarrow \{-1, 1\}$ を考える。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \varepsilon(\alpha_i) = \pm 1 \quad \text{for } \alpha_i \in \Psi \\ \text{(ii)} \quad & \varepsilon(\alpha) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\ell} m_i} \quad \text{for } \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i \in \Sigma \end{aligned}$$

ε に対して $\mathfrak{g}$ の involution θ_ε を

$$\theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha) \theta(X) \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}^\alpha, (\forall \alpha \in \Sigma)$$

$$\theta_\varepsilon(X) = \theta(X) \quad \text{for } X \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$$

で定義する。そして

$$\mathfrak{k}_\varepsilon = \{X \in \mathfrak{g}; \theta_\varepsilon(X) = X\}$$

とおく。すると $\mathfrak{k}_\varepsilon$ は $\mathfrak{k}$ と複素化が同型である $\mathfrak{g}$ の sub-

algebra になる. $\bar{K}_\varepsilon$ から生成される G の analytic subgroup を K_ε° , そして $K_\varepsilon = MK_\varepsilon^\circ$ とおく. さらに

$$M_\varepsilon^* = M^* \cap K_\varepsilon$$

$$W_\varepsilon = M_\varepsilon^* / M$$

とおき, $W_\varepsilon \setminus W$ の代表元を $w_1=e, w_2, \dots, w_r$ とする ($r=[W:W_\varepsilon]$)

Lemma 1 (岩沢分解)

- 1) $\mathfrak{g} = \bar{k}_\varepsilon + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ direct sum
- 2) $G \supset \bigcup_{i=1}^r K_\varepsilon m_{w_i} AN$ open dense, unique

以下では, affine symmetric space G/K_ε を考える. 1. で述べた "Riemannian symmetric space G/K をある compact real analytic manifold に open に埋め込んだ時に, その外側にあらわれる" affine symmetric space は infinitesimal には上のような手続きで得られ, 必ず G/K_ε の形にあらわせる.

3. G/K_ε の埋め込み

Riemannian symmetric space G/K の compact 化の 1 つの方法は大島 [3] にある. そこで定義された compact real analytic manifold の open G -orbit はすべて G/K

と同型である。しかしその方法を少し修正すると、 G/K と同型な open orbit から出発して closed orbit を越えて別の open orbit に移るとき $\mathfrak{g}$ の Cartan involution θ がある ε に対する $\mathfrak{g}$ の別の involution θ_ε に変り、その open orbit は G/K_ε と同型になる。したがって、 $\varepsilon: \Sigma \rightarrow \{-1, 1\}$ の定義の仕方は 2^l 通りの可能性があるので、 K/M と同型な最も次元の低い G -orbit の近傍の open G -orbit は、すべての可能な ε に対応する affine symmetric space G/K_ε が1つずつあらわれる。これから open orbit がすべての可能な G/K_ε である K/M の近傍が、大島 [3] の方法とほぼ同様に定義できる。root system Σ が reduced の場合には、このような K/M の近傍の「コピー」を $\#W$ 個つじつまがあうようにはり合せることができ、 G が real analytic に作用する connected compact real analytic manifold が定義できる。構成の仕方から G/K 、及び K/M と同型な G -orbit は $\#W$ 個あらわれ、 G/K_ε と同型な G -orbit は $\#W_\varepsilon$ 個あり、その closure に含まれる K/M と同型な orbit は $r = [W; W_\varepsilon]$ 個ある。 Σ が non reduced の場合には、そのままでは連結でないのでその連結成分を考えればよい。ここで述べた G/K 及び G/K_ε の compact 化は佐武の compact 化と関係があることに注意しておく (cf [4])

簡単な場合に open orbit とどのような homog. space が表われるかを例示しておこう.

例 1 $G = SL(2, \mathbb{R})$ root 系 A_1 .

$\Sigma = \{\alpha, -\alpha\}$ を root 系とする.

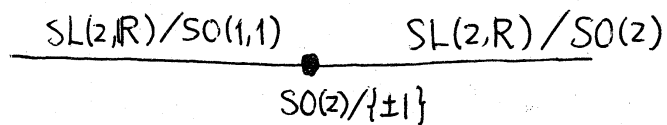
$\varepsilon(\alpha) = 1$ のとき $G/K_\varepsilon = SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.

$\varepsilon(\alpha) = -1$ のとき 簡単な計算により

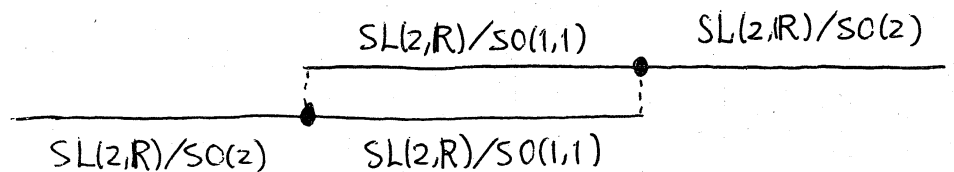
$G/K_\varepsilon = SL(2, \mathbb{R})/SO(1, 1)$ がわかる.

abelian part A の "compact 化" を図示しよう.

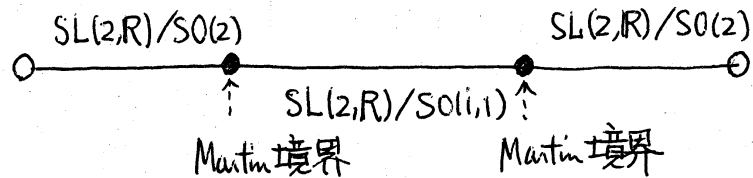
Martin 境界の近傍として



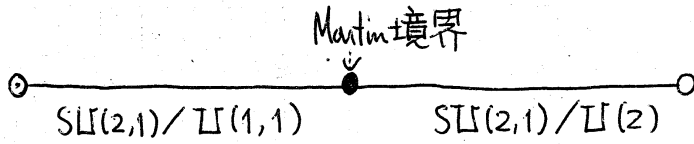
が得られる. これの2つのコピーを下のように
はり合せる.



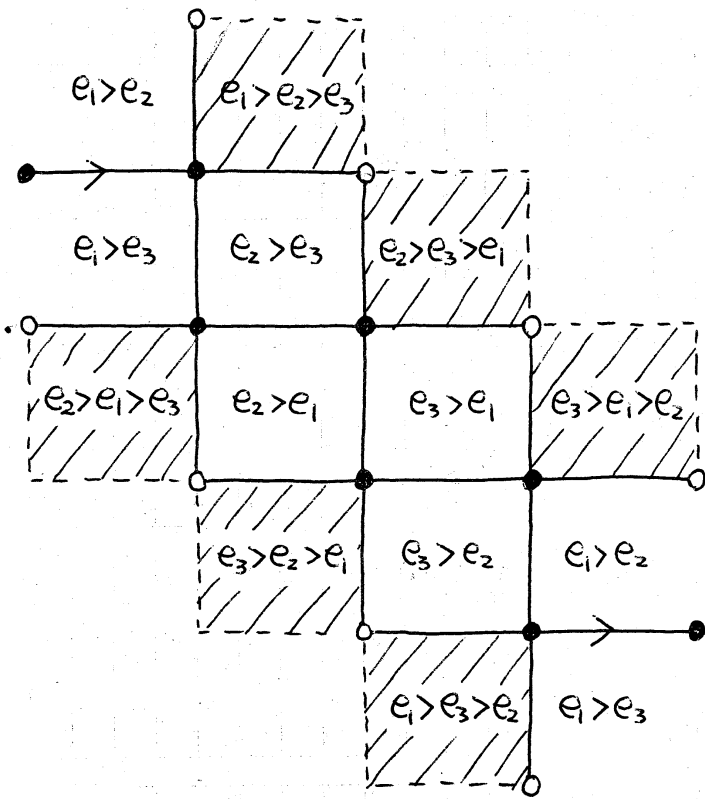
得られた結果を下の図のように表わす.



例 2. $G = SU(2, 1)$ root系 BC_1



例 3. $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ root 系 A_2



斜線部 $\cong SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$

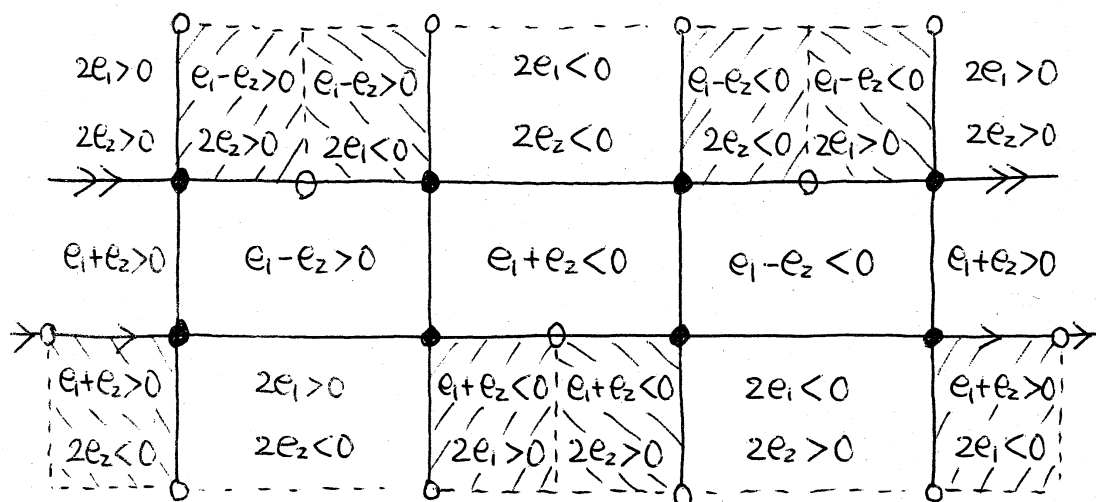
$$\{e_i > e_j\} \text{ の } \frac{2}{5} \text{ 分}$$
$$\cong SL(3, \mathbb{R}) / SO(2, 1)$$

● Martin 境界

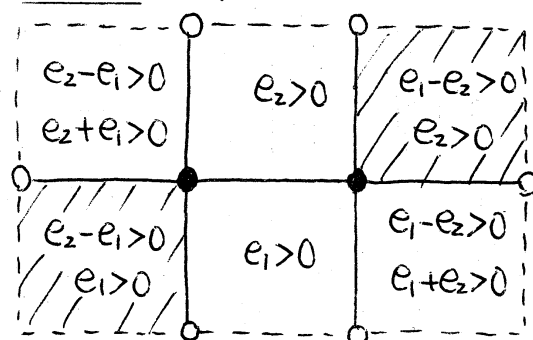
(余次元 = 2)

例 4: $G = Sp(2, \mathbb{R})$

$$\text{斜線部} \cong \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{U}(2)$$
$$\{e_1 + e_2 > 0\} \quad \{e_1 - e_2 > 0\} \quad \{e_1 + e_2 < 0\} \quad \{e_1 - e_2 < 0\}$$
$$\text{上の } \frac{1}{n} \text{ 部分} \cong \text{Sp}(2, \mathbb{R}) / \text{GL}(2, \mathbb{R})$$
$$\{2e_1 > 0, 2e_2 > 0\} \text{ と } \mathbb{C}^2 \text{ の部分} \cong \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{U}(1, 1)$$



例 5 $G = \mathrm{SU}(3, 2)$ root系 BC_2



$$\{e_1 - e_2 > 0, e_2 > 0\}, \{e_2 - e_1 > 0, e_1 > 0\}$$

$$\cong \mathrm{SU}(3, 2) / \mathrm{S}(\mathrm{U}(3) \times \mathrm{U}(2))$$

$$\{e_1 \pm e_2 > 0\}, \{e_2 \pm e_1 > 0\}$$

$$\cong \mathrm{SU}(3, 2) / \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1, 2))$$

$$\{e_1 > 0\}, \{e_2 > 0\}$$

$$\cong \mathrm{SU}(3, 2) / \mathrm{S}(\mathrm{U}(2, 1) \times \mathrm{U}(1, 1))$$

Remark: 上で個々の図のワウの不等式は Riemannian (あるいは affine) symmetric space の Weyl chamber を表わしている. affine symmetric pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ に対して W_ε に関する α の基本領域 α_ε^+ をひとつ固定すれば, $A_\varepsilon^+ = \exp \alpha_\varepsilon^+$ として, $G/K_\varepsilon \cong K \overline{A_\varepsilon^+} K_\varepsilon / K_\varepsilon$ となる. α_ε^+ は上の例ではそれぞれの不等式で定義できるのである.

4. Poisson 変換

$\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ を G/K_ε 上の ~~左~~ G -不変微分作用素環とす

る.

Lemma 2. $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon) \cong \mathbb{D}(G/K)$

$$e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))} = \begin{cases} e^{\lambda(\log a)} & \text{if } g = k_\varepsilon m_{w_i} a n \in K_\varepsilon m_{w_i} AN \\ 0 & \text{if } g \notin K_\varepsilon m_{w_i} AN \end{cases}$$

で $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ を定義する.

Lemma 3. $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ は $\lambda \in \alpha_c^*$ に関して有理的な G 上の hyperfunction になる.

$$\varphi_{\lambda, \varepsilon}^i(g) = \int_K e^{-(\lambda + \rho)H_\varepsilon^i(g^{-1}k)} dk$$

とみると, $\varphi_{\lambda, \varepsilon}^i$ は K に関して左, K_ε に関して右不変な G 上の函数である. $\varphi_{\lambda, \varepsilon}^i$ を G/K_ε 上の函数とみたとき, $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ の同時固有函数になる.

さて, $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ から $\mathbb{C}^\wedge$ の algebra hom. χ に対し

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \pi(\chi)) = \{ u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon); \\ Du = \chi(D)u \text{ for } \forall D \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon) \}$$

とよく. すると

$\varphi_{\lambda, \varepsilon}^i \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda)) \quad i=1, \dots, r$
 となるような $\chi = \chi_\lambda$ が unique に定まる. さらに
 $\Psi_{\lambda, \varepsilon}^i(g) = e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(g^{-1})}$ とおけば

$\Psi_{\lambda, \varepsilon}^i \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon, \pi(\chi_\lambda)) \quad i=1, \dots, r$
 もわかる.

$$\varphi_{\lambda, \varepsilon} = (\varphi_{\lambda, \varepsilon}^1, \dots, \varphi_{\lambda, \varepsilon}^r)$$

$$\Psi_{\lambda, \varepsilon} = (\Psi_{\lambda, \varepsilon}^1, \dots, \Psi_{\lambda, \varepsilon}^r)$$

として vector 表示する.

Def. 4

$$\mathcal{P}_\lambda: \bigoplus_r \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda))$$

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K (\pi(k)\Psi_{\lambda, \varepsilon})(g) f(k) dk$$

を Poisson 変換とよぶことにする. ただし

$$(\pi(k)\Psi_{\lambda, \varepsilon})(g) = (\Psi_{\lambda, \varepsilon}^1(k^{-1}g), \dots, \Psi_{\lambda, \varepsilon}^r(k^{-1}g))$$

$$f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_r(k) \end{bmatrix} \quad f_i \in \mathcal{B}(K/M) \quad i=1, \dots, r$$

とおいだ.

簡単な計算により

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K \Psi_{\lambda, \varepsilon}(k) f(gk) dk$$

と書き直せる. ($f(gk) := f(\pi(gk)) e^{(\lambda+\rho)H(gk)}$ とおいだ.)

5. 帯球函数

Def. 5.

$$A^K(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda)) = \{u \in B(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda)); f(kg) = f(g), \forall k \in K\}$$

の元を (K, K_ε) -不変帯球函数と呼ぶことにする.

($B(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda))$ の元で左 K -不変であれば, 必然的に real analytic になることに注意しておく.)

Lemma 6. $\dim_{\mathbb{C}} A^K(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda)) = r$

であり, Σ の basis として $\{\varphi_{\lambda, \varepsilon}^1, \dots, \varphi_{\lambda, \varepsilon}^r\}$ をとれる.

Lemma 7. (函数等式)

$$\varphi_{\lambda, \varepsilon} = \varphi_{w\lambda, \varepsilon} A_w(\lambda) \quad \text{for } \forall w \in W$$

ここで $A_w(\lambda)$ は $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$ の meromorphic function を成分とする $r \times r$ 行列で, さらに

$$A_{w_1 w_2}(\lambda) = A_{w_1}(w_2 \lambda) A_{w_2}(\lambda) \quad w_1, w_2 \in W$$

が成立つ.

$A_w(\lambda)$ の各成分は $\{\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*; \frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \mathbb{Z} \text{ for } \forall \alpha \in \Sigma\}$

で正則である. Gindikin - Karpelevič - Helgason - Schiffmann の方法によつて, w が simple root に関する鏡映の場合には, $A_w(\lambda)$ の各成分を計算できる.

例1 $G = SL(2, \mathbb{R})$, $K_\varepsilon = SO(1, 1)$, $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \right\}$ のとき
 $W = \mathbb{S}_2$, $W_\varepsilon = \{e\}$, $w = (1, 2) \in \mathbb{S}_2$ とおくと $W_\varepsilon \setminus W$
 の代表元として e, w をとれる. (K, K_ε) -帯球函
 数は第2種の Legendre の函数で表わせる.

$$\mu = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \text{for } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^*$$

$$A_e(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad A_w(\lambda) = \begin{bmatrix} \sec \mu & \tan \mu \\ \tan \mu & \sec \mu \end{bmatrix}$$

例2 $G = SL(3, \mathbb{R})$, $K_\varepsilon = SO(2, 1) = \{g \in G; {}^t g \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\}$
 $N^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\}$ のとき

$$W = \mathbb{S}_3, \quad s_1 = (1, 2), \quad s_2 = (2, 3) \in \mathbb{S}_3 \text{ とおくと}$$

$$W_\varepsilon = \{e, s_1\} \cong \mathbb{S}_2, \quad W_\varepsilon \setminus W \text{ の代表元として}$$

$$w_1 = e, \quad w_2 = s_2, \quad w_3 = s_2 s_1 \text{ をえらぶ.}$$

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 - \lambda_1), \quad \mu_2 = \frac{\pi}{2}(\lambda_3 - \lambda_2), \quad \mu_3 = \frac{\pi}{2}(\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^*) \text{ とおくと}$$

$$A_e(\lambda) = I_3, \quad A_{s_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \sec \mu_1 & \tan \mu_1 \\ & \tan \mu_1 & \sec \mu_1 \end{bmatrix}, \quad A_{s_2}(\lambda) = \begin{bmatrix} \sec \mu_2 & \tan \mu_2 & \\ \tan \mu_2 & \sec \mu_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{s_1 s_2}(\lambda) = A_{s_1}(s_2 \lambda) A_{s_2}(\lambda), \quad A_{s_2 s_1}(\lambda) = A_{s_2}(s_1 \lambda) A_{s_1}(\lambda)$$

$$A_{s_1 s_2 s_1}(\lambda) = A_{s_1}(s_2 s_1 \lambda) A_{s_2 s_1}(\lambda).$$

例3 $G = Sp(2, \mathbb{R}) = \{g \in SL(4, \mathbb{R}); {}^t g \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}\}$

$$K_\varepsilon = \{g \in G, {}^t g \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}\} \cong U(1, 1)$$

$$N^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ のとき.}$$

$W = \langle s_2^\pm \rangle$. (e_1, e_2) を直交基底とすると

$$s_1: (e_1, e_2) \rightarrow (e_2, e_1) \quad s_2: (e_1, e_2) \rightarrow (e_1, -e_2)$$

で s_1, s_2 を定義すると W は s_1, s_2 で生成される.

$W_\varepsilon = \{e, s_2, s_1 s_2 s_1, (s_1 s_2)^2\}$ となる. $W_\varepsilon \setminus W$ の代表元として $w_1 = e, w_2 = s_1$ をとる. さらに $\mu_1 = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$

$\mu_2 = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 + \lambda_1)$ for $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \alpha_{\mathbb{R}}^*$ とおくと

$$A_e(\lambda) = A_{s_2}(\lambda) = 1_2 \quad A_{s_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tan \mu_1 & \sec \mu_1 \\ \sec \mu_1 & \tan \mu_1 \end{bmatrix}$$

他は $A_{w_1 w_2}(\lambda) = A_{w_1}(w_2 \lambda) A_{w_2}(\lambda)$ を使えば求まる.

例 3 bis $K_\varepsilon = \{g \in G; {}^t g \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\} \cong GL(2, \mathbb{R})$ のとき. $W_\varepsilon = \{e, s_1\}$ となる. $W_\varepsilon \setminus W$ の代表元として

$w_1 = e, w_2 = s_2, w_3 = s_2 s_1, w_4 = s_2 s_1 s_2$ をとる.

$$A_e(\lambda) = 1_4 \quad A_{s_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \sec \mu_1 & \tan \mu_1 & \\ & \tan \mu_1 & \sec \mu_1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{s_2}(\lambda) = \begin{bmatrix} \sec 2(\mu_1 + \mu_2) & -\tan 2(\mu_1 + \mu_2) & & \\ -\tan 2(\mu_1 + \mu_2) & \sec 2(\mu_1 + \mu_2) & & \\ & & \sec 2(\mu_1 + \mu_2) & -\tan 2(\mu_1 + \mu_2) \\ & & -\tan 2(\mu_1 + \mu_2) & \sec 2(\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix}$$

6. 境界値

以下では K_ε を固定して G/K_ε を考えることにする.

3. で述べたように G/K_ε を compact 多様体に埋め込んだ時に、その closure には K/M と同型の homog. space が $r = [W:K_\varepsilon]$ ありわれた。それらを $B_1, \dots, B_r$ で表わし G/K_ε の Martin 境界と呼ぶことにする.

Lemma 8. 微分方程式系

$\pi(\chi_\lambda): D u = \chi_\lambda(D) u$ for $\forall D \in D(G/K_\varepsilon)$
 は各 Martin 境界を edge とするそのまわりのカベに沿って確定特異点型である。(註) さらにその決定方程式の根は

$$\lambda(w) = \left(-\frac{1}{2}(w\lambda - \rho)(H_1), \dots, -\frac{1}{2}(w\lambda - \rho)(H_r) \right)$$

 ~~$\lambda(w) = (-w\lambda(H_1), \dots, w\lambda(H_r))$~~ $w \in W$
 である. (cf. [2][3])

$u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda))$ に対して Martin 境界 $B_i \wedge$ の決定方程式の根 $\lambda(w)$ に対応する境界値を $\beta_{w\lambda}^i u$ であらわす. すると $\mathcal{B}(B_i) \cong \mathcal{B}(K/M)$ の同一視で G -hom.

$$\beta_{w\lambda}: \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \pi(\chi_\lambda)) \rightarrow \bigoplus^r \mathcal{B}(K/M)$$

$$\beta_{w\lambda} u = \begin{bmatrix} \beta_{w\lambda}^1 u \\ \vdots \\ \beta_{w\lambda}^r u \end{bmatrix}$$

(註) この埋め込みでは、正確には弱い意味で確定特異点型である。しかし簡単な座標変換でこのようにできる。

を定義できる. $B_1, \dots, B_r$ の文字を適当に並び変えて

$$c_{ji}(\lambda) = \beta_\lambda^j \varphi_{\lambda, \varepsilon}^i = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda + \rho) H_\varepsilon(\bar{w}_j \bar{n})} d\bar{n}$$

となるようにする. このとき Bruhat の理論により Poisson 核の境界値がわかり

$$\beta_\lambda^j \Psi_{\lambda, \varepsilon}^i = c_{ji}(\lambda) \delta(k)$$

となる. $\delta(k)$ は K/M 上のデルタ函数である. $c_{ji}(\lambda)$ は

$c(\lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda + \rho) H(\bar{n})} d\bar{n}$ と (K, K_ε) -不変帯球函数の函数等式 (Lemma 7) にあらわれた行列 $A_w(\lambda)$ であらわせる. 実際

$$\beta_\lambda \varphi_{\lambda, \varepsilon} = c(\lambda) E_\sigma A_{w^*}(\lambda)$$

がわかる. ここで E_σ は次のように定義される. $\{W_\varepsilon w_1, \dots,$

$W_\varepsilon w_r\} = \{W_\varepsilon w_1 w^*, \dots, W_\varepsilon w_r w^*\}$ であるが $\sigma \in \mathcal{S}_r$ を $W_\varepsilon w_i$

$= W_\varepsilon w_{\sigma(i)} w^*$ となるようにえらぶとき $E_\sigma \in SL(r, \mathbb{R})$ は

$$E_\sigma \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(r)} \end{bmatrix} \quad \text{for } \forall a_1, \dots, a_r$$

となる行列である.

7. 同時固有函数の積分表示

はじめに Riemannian symmetric space G/K に対する

1. で述べた結果を書いておこう. $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して条件

$$(*) \quad \frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \mathbb{Z} \quad \text{for } \forall \alpha \in \Sigma$$

を仮定する (この条件はさらに弱めることもできるが元のままにしておく).

Thm ([2]) Poisson 変換

$$J_\lambda : B(K/M) \longrightarrow A(G/K; \pi(\chi_\lambda))$$

$$(J_\lambda f)(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)} f(k) dk$$

は、条件(*)のもとで onto G -isomorphism である。

この結果は affine symmetric space G/K_ϵ に対しても ほぼ同様な次の形に定式化される。

Thm 9. Poisson 変換

$$J_\lambda : \bigoplus B(K/M) \longrightarrow B(G/K_\epsilon; \pi(\chi_\lambda))$$

は 条件(*)のもとで onto G -isomorphism である。

証明もほぼ同様である。ただし条件(*)を弱めるときに多少のちがいがあこる。

8. 特殊固有超函数

affine symmetric space 上の特殊固有函数をいくつか考えよう。

5. で (K, K_ϵ) -不変帯球函数を定義したが、もっと一般に $(K_\epsilon', K_\epsilon)$ -不変帯球函数を定義できる。

$$B^{K_\epsilon'}(G/K_\epsilon; \pi(\chi_\lambda))$$

$= \{ u \in B(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) ; u(k_\varepsilon g) = u(g) \text{ for } k_\varepsilon \in K_\varepsilon \}$
 の元がそうである. $K_{\varepsilon'}$ は K_ε と同様に定義した G の sub-
 group である. $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ などと同様に $K_{\varepsilon'}$ についての
 "岩沢分解" を使って $e^{\lambda(H_{\varepsilon'}(g))}$ を考えることができるが.

そのとき

$$\int_K e^{(\lambda-\rho)H_{\varepsilon'}(gk)} e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(k)} dk$$

などがそれである. このように一般にするとともに実解
 析的でなくなる. しかしこれらの"帯球函数"はよく知ら
 れた両側 K -不変な帯球函数と無縁ではない. それらは同
 じ確定特異点型の微分方程式の解になっており, いくつかの
 異なった cycle に関する積分表示を与えているのである.
 また, Poisson 核 $\Psi_{\lambda,\varepsilon}^i(g) = e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(g^{-1})}$ も同様に
 極大過剰決定系をみたす. $\Psi_{\lambda,\varepsilon}^i(g)$ は Riemannian symmetric
 space 上の Poisson 核の解析接続によって得られる.

(K, K_ε) -不変帯球函数, Poisson 核の境界値は意
 味がある. 前者は "c-function" を与え, 後者は
 intertwining operator の核函数 (の定数倍) になる.

他に $B(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元で興味深いものがある.

G を semisimple linear group, $G_\mathbb{Z}$ を G の $\mathbb{Z}$ -点とす
 る. として Eisenstein series

$$E(g; \lambda) = \sum_{h \in G_\mathbb{Z}} e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}h)}$$

を考えよう.

$$E(g; \lambda) \in Q(G/K; \mathcal{M}(\lambda))$$

であるから $E(g; \lambda)$ の境界値を定義できる. λ が generic であるとき, さらに affine symmetric space G/K_ε に Poisson 変換することにより, G/K_ε 上の保型性を有する固有函数が定義でき, 函数等式が得られる. もっと一般に,

$$\mathcal{B}^\mathbb{Z}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\lambda))$$

$$= \{u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\lambda)) ; u(hg) = u(g) \text{ for } h \in G_\mathbb{Z}\}$$

の元を Eisenstein hyperfunction と仮りに呼ぼう. (λ が generic でないとまずい) このとき $\mathcal{B}^\mathbb{Z}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\lambda))$ の次元, またその元の満たす函数等式などが問題になるが まだくわしいことはわからない. "帯球函数" や Poisson 核と同様 $E(g; \lambda)$ の境界値には意味があるかもしれない.

例 $G = SL(2; \mathbb{R})$, $K = SO(2)$, $G_\mathbb{Z} = SL(2; \mathbb{Z})$ のとき,

$$G/K \cong H = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$E(z; s) = \sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \quad (z = x + \sqrt{-1}y)$$

決定方程式の根 $s, 1-s$ に対する境界値を $\beta_s E, \beta_{1-s} E$ などであらわせば

$$\beta_s E = \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{|cx+d|^{2s}}$$

$$\beta_{1-s} E = 2c(s) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{2s}} \sum_{(c,d)=1} \delta\left(x + \frac{d}{c}\right)$$

ここで $c(s) = B(\frac{1}{2}, s - \frac{1}{2})$ である. これらを $G/K_E = SL(2, \mathbb{R})/SO(1, 1)$ に Poisson 変換すれば Eisenstein hyperfunction が得られる.

$\beta_{1-s} E$ の係数にはデルタ函数があるが, その代りに Heaviside 函数をもってきたりして, $G/K \cong H$ に Poisson 変換したものなども意味がありそうである. (保型形式になる).

References

- [1] M. Berger: Les espaces symétriques non compacts.
Ann. Ec. Norm. Sup., 74 (1957) 85-177
- [2] K. Okamoto 他 5 名: Eigenfunctions of invariant
differential operators on a symmetric space, to appear
- [3] T. Oshima: A realization of Riemannian Symmetric spaces
本講究録にのる予定
- [4] I. Satake: On representations and compactifications of
symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. vol. 71 1960