

重調和方程式の境界問題の 解の正値性について

東京教育大学 理 清水昭信

§ 1. 序

重調和方程式の境界問題の解の正値性について Hadamard, Duffin, Garabedian, Aronszajn & Smith 等の研究がある。Duffin, Garabedian は、ある特殊の境界問題について、Green 函数の正値性が、くずれることを示した。

Aronszajn & Smith [1] は、次の 2 つの type の境界問題の Green 函数の正値性について考察した。

D は n 次元 Euclid 空間 R^n の有界領域であり、 D の境界 ∂D は、十分なめらかであるとする。 Δ は Laplacian を表わし、 Δ^2 は、 Δ を 2 回 operate する作用素とする。こうして、

$$\text{問題 I: } \Delta^2 u(x) = f(x) \quad x \in D$$

$$u(\xi) = 0 \quad \xi \in \partial D$$

$$-C \frac{\partial u}{\partial n} + \Delta u(\xi) = 0 \quad \xi \in \partial D$$

問題 II. $\Delta^2 u(x) = f(x) \quad x \in D$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) + b u(\xi) = 0 \quad \xi \in \partial D$$

$$d u(\xi) + \left(\frac{\partial}{\partial n} + b\right) \Delta u(\xi) = 0 \quad \xi \in \partial D.$$

ここで, n は ∂D における内向きの方線であり, b, c, d は ∂D 上で定義された 十分なめらかな函数である。

Aronszajn & Smith は, ある条件の下で 存在の保証される 問題 I, 問題 II の Green 函数が Pseudo-reproducing kernel となることに注意して, reproducing kernel の正值性を 考察する問題に 帰着している。reproducing kernel についての一般論は Aronszajn & Smith によって 良く調べられているが, 問題 I, 問題 II の Green 函数の正值性の考察という 具体的問題に, reproducing kernel の一般論を当てはめることは, そう簡単ではない。問題 I, 問題 II の持つ 特長性とうまく使っている。なによりも, この方法では, 問題 I, 問題 II から生まる $L^2(D)$ 上の operator が self-adjoint であることが 基本的である。

ここでは, 上記問題 II を 更に一般化した問題¹⁾の解の正值性をしらべる。その際, reproducing kernel についての理論と独立に, 空間 $C(\partial D)$ 上の semi-group の理論を用いて, 考察する。問題 I についても, 全く同じ方法で,

1) 必ずしも self-adjoint でない問題

考察出来る。問題の formulation は, Aronszajn & Smith [1] と全く異っているため, 得られる結果を厳密に比較することは困難であるが, Rough にみれば, ほぼ対応する結果が得られているとみなせる。

§2 問題の formulation と結果

D は, n 次元 Euclid 空間 R^n 中の有界領域であり, ∂D は, 有限個の連結成分から成り, その各々の成分は, C^3 級の $(n-1)$ 次元 hypersurface であるとする。 $C(\bar{D})$ (又は $C(\partial D)$) は, $\bar{D}$ (又は ∂D) 上の連続関数の空間であり, norm は, uniform norm とする。 $C^2(\bar{D})$ 上の operator Δ (Laplacian) の $C(\bar{D})$ における最小内拡張を Δ とかくことにする。又, 定数 $\alpha \geq 0$ に対して, $G_\alpha^{\min} f$ ($f \in C(\bar{D})$) を次の式を満足する関数として定義する。

$$\begin{aligned} (\alpha - \Delta) u(x) &= f(x), \quad x \in \bar{D}, \\ u(z) &= 0, \quad z \in \partial D. \end{aligned}$$

又, 定数 $\alpha \geq 0$ と $\varphi \in C(\partial D)$ に対して, $H_\alpha \varphi$ を次の式をみたす, $C(\bar{D})$ に属する関数として定義する。

$$\begin{aligned} (\alpha - \Delta) u(x) &= 0, \quad x \in \bar{D}, \\ u(z) &= \varphi(z), \quad z \in \partial D. \end{aligned}$$

「Wentzell type の operator」とは, K. Sato & T. Ueno [2]

の §4 で 定義された. integro-differential operator $\mathcal{E}$ 換す。ただし, [2] §4 の条件 (L.1) と (L.2) は みたされるところ。さて, L が Wentzell type の operator であるとしよう。operator $L G_\alpha^{\min}$ は $\mathcal{C}(\bar{D})$ から $\mathcal{C}(\partial D) \rightarrow$ の positive bounded operator へ 一意的に拡張出来る。[2; Lemma 4.2]。拡張された operator を $\overline{L G_\alpha^{\min}}$ で表わす。更に operator $\overline{L H_\alpha}$ は, $L H_\alpha$ の $\mathcal{C}(\partial D)$ における 最小閉拡張 とある [2; Corollary to Lemma 4.1]。 $\mathcal{D}(\Delta)$ (又は $\mathcal{D}(\overline{L H_\alpha})$) は operator Δ (又は $\overline{L H_\alpha}$) の domain とし, $[u]_{\partial D}$ は 函数 $u \in \mathcal{C}(\bar{D})$ の ∂D への restriction とする。 $\mathcal{D}(\hat{L}) = \{ u \in \mathcal{D}(\Delta) ; [u]_{\partial D} \in \mathcal{D}(\overline{L H_\alpha}) \}$ 。 二重に $\mathcal{D}(\overline{L H_\alpha})$ は α に 依存しない。 このとき $\mathcal{D}(\hat{L}) = \{ u = G_\alpha^{\min} f + H_\alpha g ; f \in \mathcal{C}(\bar{D}), g \in \mathcal{D}(\overline{L H_\alpha}) \}$ となる。 $\mathcal{D}(\hat{L})$ 上に, operator $\hat{L}$ を 次の式で 定義しよう。

$$\hat{L} u = \overline{L G_\alpha^{\min}} f + \overline{L H_\alpha} g, \text{ for } u = G_\alpha^{\min} f + H_\alpha g$$

この定義は, Well-defined である。

L_1 と B は, Wentzell type の operator とし, d は ∂D 上の 連続函数 としよう。我々は, 次のような, biharmonic equation の 境界内題 を 研究する。

$$(1.1) \quad u \in \mathcal{D}(\Delta^2) \cap \mathcal{D}(\hat{L}_1) \cap \mathcal{D}(\hat{L}_2)$$

$$(1.2) \quad \Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \bar{D}.$$

$$(1.3) \quad \hat{L}_1 u(z) = 0, \quad z \in \partial D,$$

$$(1.4) \quad \hat{L}_2 u(z) = d(z)u(z) - \hat{B} \Delta u(z) = 0, \quad z \in \partial D.$$

ここで, $\mathcal{D}(\Delta^2) = \{u; u \in \mathcal{D}(\Delta) \text{ \& } \Delta u \in \mathcal{D}(\Delta)\}$ であり, $\mathcal{D}(\hat{L}_2) = \{u; u \in \mathcal{D}(\Delta) \text{ \& } \Delta u \in \mathcal{D}(\hat{B})\}$ である。任意の $f \in C(\bar{D})$ に対して, (1.1) ~ (1.4) をみたす解 u が一意的存在するとき, $f \mapsto u$ へ移す mapping E . この境界問題, Green operator という。それを G であらわす。

次の定理 1 において, 次の 2 つの仮定をおく。

仮定 I. 方程式 $-\overline{L_1 H_0} \varphi = \varphi$ は, 任意の $\varphi \in C(\partial D)$ に対して, unique solution $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{L_1 H_0})$ をもつ。更に, ある正の定数 λ が存在し, 次の命題が成り立つ。即ち, 任意の $\varphi \in C(\partial D)$ に対して, 方程式 $(\lambda I - \overline{B H_0}) \varphi = \varphi$ は, unique solution $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{B H_0})$ をもつ。ここで I は, 恒等作用素である。

注意: 仮定 I のもとで, $\overline{L_1 H_0}$ と $\overline{B H_0}$ は, $C(\partial D)$ 上の positive contraction strongly continuous semigroup の infinitesimal generator になっている [2; Corollary to Theorem 5.1].

仮定 I のもとで、次の境界問題の Green operator の存在が分っている。

$$-\bar{\Delta} u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \bar{D},$$

$$\hat{L}_1 u(\xi) = 0 \quad , \quad \xi \in \partial D.$$

この Green operator を $G_0^{\hat{L}_1}$ であらわす。次に、新たに、integro-differential operator を導入しよう。 $\tilde{L}$ と $\tilde{L}_\lambda$ を 次の式で定義する。

$$\tilde{L} u = \tilde{L}_2 G_0^{\hat{L}_1} u$$

$$\tilde{L}_\lambda u = \tilde{L}_\lambda u + \lambda [u]_{\partial D}$$

$$\mathcal{D}(\tilde{L}) = \mathcal{D}(\tilde{L}_\lambda) = \{u; G_0^{\hat{L}_1} u \in \mathcal{D}(\tilde{L}_2)\}.$$

注意: operator $\tilde{L}$ は次の形で表わされる。

$$\tilde{L} = d(\xi) (-\tilde{L}_1 H_0)^{-1} \tilde{L}_1 G_0^{\hat{L}_1} + \hat{B}.$$

$$\text{更に, } \mathcal{D}(\tilde{L}) = \mathcal{D}(\hat{B}) \text{ となる。}$$

仮定 II. positive constant λ が存在して次の命題が成り立つ。
 $f \in \mathcal{D}(\tilde{L} H_0)$ かつ $\eta \in \partial D$ で positive maximum をとれば、 $\tilde{L}_\lambda H_0 f(\eta) \leq 0$ である。

定理 1. 仮定 I, 仮定 II のもとで、次の命題が成り立つ。

(i) $\tilde{L} H_0$ は、 $C(\partial D)$ 上のある positive contraction strongly

Continuous semigroup の generator であり,
 $-\tilde{L}H_0$ の range は $C(\partial D)$ に等しく, $-\tilde{L}H_0$ は
 有界, 正值の逆作用素をもつ。

(ii) $C(\bar{D})$ の任意の函数 f に対し, (1.1) ~ (1.4) をみたす
 解が一意的に存在し, 解は次の式で表現される。

$$(1.5) \quad u = Gf = G_0^{\tilde{L}} G_0^{\tilde{L}} f$$

ここで $G_0^{\tilde{L}}$ は次の式で与えられる。

$$(1.6) \quad G_0^{\tilde{L}} f = G_0^{\min} f + H_0 (-\tilde{L}H_0)^{-1} \tilde{L} G_0^{\min} f$$

(iii). 函数 d が ∂D 上で nonnegative ならば, operators
 $G_0^{\tilde{L}}$ と G は positive である。

次に, L_1, L_2 とし, 特殊な形のものを与え, 仮定 I, 仮
 定 II がともに満足されるための十分条件を求めよう。

(1.3), (1.4) の代りに, 次の (1.3'), (1.4') を採用する。

$$(1.3') \quad \hat{L}_1 u(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial n} u(\xi) - (b(\xi) + \mu) u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$$

$$(1.4') \quad \hat{L}_2 u(\xi) \equiv d(\xi) u(\xi) - \hat{L}_1 \bar{\Delta} u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$$

ここで, b と d は ∂D 上の連続函数であり, μ は定数, $\frac{\partial}{\partial n}$ は
 ∂D における内向きの方向線に沿った微分をあらわす。更に,

$C(\partial D)$ 上の bounded operator である $\overline{\frac{\partial}{\partial n} G_0^{\min}} H_0$ の operator
 norm を m とあらわし, $\|d\| = \sup_{\xi} |d(\xi)|$ とする。

定理 1 を用いて, 次の定理 2 を得る。

定理2. b, d "nonnegative function" であり, $\mu > 0$, $\mu^2 > m \|d\|$ であるならば, (1.1) (1.2) (1.3') (1.4') をみたす解が一意的に存在し, Green operator G は positive である。

注意. $C(\bar{D})$ (or $C(\partial D)$) 上の operator ϕ : nonnegative function $\in$ nonnegative function $\rightarrow$ 移すとき, その operator は positive であるという。

§3. 定理1, 定理2の証明.

[定理1の証明] 先ず $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の Lemma を証明する。

Lemma 1. $\tilde{L}H_0$ は $C(\partial D)$ 上の ある positive contraction strongly continuous semigroup の generator であり, $-\tilde{L}H_0$ の range は, $C(\partial D)$ に等しく, $-\tilde{L}H_0$ は, bounded positive inverse をもつ。

(証明) 任意の $f \in \mathcal{D}(\tilde{L}H_0)$ に対して, $\tilde{L}_\lambda H_0 f = \tilde{L}H_0 f + \lambda f$, $\tilde{L}H_0 = d(\beta)(-\overline{L_1 H_0})^{-1} \overline{L_1 G_0^{\min}} + \overline{B}H_0$ であるから,

$$\tilde{L}_\lambda H_0 = \overline{B}H_0 + d(\beta)(-\overline{L_1 H_0})^{-1} \overline{L_1 G_0^{\min}} + \lambda I.$$

である。仮定 I より, $\overline{B}H_0$ は generator である。

$d(\beta)(-\overline{L_1 H_0})^{-1} \overline{L_1 G_0^{\min}} + \lambda I$ は, bounded operator である。

仮定 II より, ある λ に対して $\tilde{L}_\lambda H_0$ が generator

になることが分る。(2; Corollary to Theorem 1.2)

さ2. 今 $-\tilde{L}H_0 = \lambda I - \tilde{L}_\lambda H_0$ であるから. 結局.

$-\tilde{L}H_0$ は generator であり. $-\tilde{L}H_0$ の range は $\mathcal{C}(\partial D)$ であり,

$-\tilde{L}H_0$ が bounded positive inverse をもつことが分る.

次の2つの Lemma は. 容易に証明出来る.

Lemma 2 $u \in \mathcal{C}(\bar{D})$ が (1.1) ~ (1.4) をみたすなら

は, $v = \Delta u$ は. 次の性質をもつ.

$$(2.1) \quad u = G_0^{\tilde{L}} v$$

$$(2.2) \quad v \in \mathcal{D}(\Delta) \quad \text{and} \quad -\Delta v = f$$

$$(2.3) \quad v \in \mathcal{D}(\tilde{L}) \quad \text{and} \quad \tilde{L}v(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$$

逆に, $v \in \mathcal{C}(\bar{D})$ が (2.2) (2.3) をみたすならば. (2.1) で定義される u は, (1.1) ~ (1.4) をみたす.

Lemma 3. (2.2), (2.3) をみたす 解は一意的に存在し, 次の式で与えられる.

$$(2.4) \quad v = G_0^{\min} f + H_0 (-\tilde{L}H_0)^{-1} \tilde{L} G_0^{\min} f$$

Lemma 2 と Lemma 3 から, (1.1) ~ (1.4) をみたす 解が一意的に存在し. 次の式で与えられることが分る.

$$u = G_0^{\tilde{L}} G_0^{\tilde{L}} f, \quad \text{即ち} \quad G_0^{\tilde{L}} f = G_0^{\min} f + H_0 (-\tilde{L}H_0)^{-1} \tilde{L} G_0^{\min} f.$$

次に $d(\xi) \geq 0$ としよう。

$$\widehat{L} G_0^{\min} = d(\xi) (-\overline{L_1 H})^{-1} \overline{L_1 G_0^{\min}} + \overline{B G_0^{\min}}$$

であるから, $\widehat{L} G_0^{\min}$ は, positive であることが分る。従って
(1.5), (1.6) より, $\widehat{G}_0^{\min}$ と G が positive になる。

[定理2の証明] 境界条件 (1.3'), (1.4') は, それぞれ
(1.3), (1.4) の 特別の場合である。 $b(\xi) \geq 0$, $d(\xi) \geq 0$,
 $\mu > 0$, $\mu^2 > m \|a\|$ としよう。定理1によつて, 仮定 I
と仮定 II が満たされることを示せば, 十分である。仮定 I
が $b(\xi) \geq 0$, $\mu > 0$ のとき, 満たされることは, 明らかである。
さす。

$$\widehat{L} H_0 \varphi = \frac{\partial}{\partial n} H_0 \varphi - b \varphi + \left\{ d \left(\mu - \left(\frac{\partial}{\partial n} - b \right) H_0 \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} G_0^{\min} H_0 \varphi - \mu \varphi \right\}$$

である。 $K = d \left(\mu - \left(\frac{\partial}{\partial n} - b \right) H_0 \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial n} G_0^{\min} H_0$ とおく。

K は $C(\partial D)$ 上の bounded positive operator である。

$$\|K\| \leq \|a\| \cdot \frac{m}{\mu} \quad \text{である。} \quad \lambda \in 0 < \lambda < \mu - \frac{m \|a\|}{\mu} \quad \text{とする}$$

ようにする。 $f \in \mathcal{D}(\widehat{L} H_0)$ かつ $\eta \in \partial D$ での positive maximum
 ε を持ったとしよう。

$$K f(\xi) \leq f(\eta) K 1(\xi) \leq \frac{m}{\mu} \|a\| f(\eta), \quad (\forall \xi \in \partial D)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \widehat{L}_\lambda H f(\eta) &= \frac{\partial}{\partial n} H f(\eta) - b(\eta) f(\eta) + \{ K f(\eta) - (\mu - \lambda) f(\eta) \} \\ &\leq \left\{ \frac{m}{\mu} \|a\| - (\mu - \lambda) \right\} f(\eta) \leq 0 \end{aligned}$$

従って、仮定Ⅱが満たされることが分った。

References

- [1] N. Aronszajn and K.T. Smith, "Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions." Amer. J. Math., Vol 79, 1957, pp. 611-622.
- [2] K. Sato and T. Ueno, "Multi-dimensional diffusion and the Markov processes on the boundary." J. Math. Kyoto Univ., Vol 4, NO.3, 1965, pp. 529-605.
- [3] A. D. Wentzell, "On the lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes." Teor. Veroyat. Primen., Vol 4, 1959, pp. 172-185.
- [4] A. Shimizu, "Boundary value problems for the bi-harmonic equation and Markov processes on the boundary." to appear