

不安定化する磁性流体界面波動のスペクトル特性変化

北海道大学大学院・工学研究院 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

磁性流体の界面では、印加磁場に応じて界面が急激に不安定化し、ある場合には平らな界面から規則的な界面形状パターンが発生する。この現象は、界面変形に応じて変化する磁化の効果を取り込んだ波動の不安定化が端緒となると考えることができ、界面変形が微小な場合の不安定化条件は古くに調べられている [1]。しかし、不安定化条件が満たされて界面が不安定化し、規則的な界面形状パターンが現れるまでの実際の過程は充分明らかにされていないとは言えない。

本研究ではこれまでに、任意の界面形状と印加磁場分布のもとで界面近傍の磁場を厳密に求める汎用解析と、やはり任意界面形状の流体を扱う**界面力学方程式**を結合して、磁性流体界面の安定性解析などを行ってきた。安定性解析では、界面変位に関する界面応力和の勾配行列の固有値である**非線形応答**の波数依存性に基づいて、印加磁場強度と界面変位振幅についての安定性分岐図式を求めた [2, 3]。しかし本研究の方法を用いれば、分岐図式に限らず、時間を追いながら波動のような動的現象を調べることも可能になる。

印加磁場が臨界磁場に近づくと、波動の周期が大きく伸び、やがて界面は不安定化する。このとき、非線形効果により、臨界波数付近の波数成分とともに多数の波数成分が急激に成長する。本稿では、元々は水平な磁性流体界面を三角格子形状に変形し、鉛直一様磁場を印加したとき、界面が不安定化するまでの過程を界面変位・界面応力和の波数スペクトルの時間変化を見ながら調べる。

2 有限厚さ領域における汎用界面磁場解析

調和性と界面条件を厳密に満たす界面磁場は、界面形状や印加磁場分布が任意であることを前提として、以下のように求める [4].

界面における接線磁場 $h_{X,Y}$ ・法線磁束密度 b_Z は、既知の外部印加磁場 h^0 より直接定義できる基本場 $h_{X,Y}^0 = t_{X,Y} \cdot h^0$, $b_Z^0 = t_Z \cdot h^0 / P$ と、基本場と合わせて調和性と界面条件を満たす誘導場 $h_{X,Y}^1, b_Z^1$ に分ける. ここで、 $t_{X,Y}$ は接線単位ベクトル、 t_Z は法線単位ベクトル、また流体と真空の透磁率を μ_+, μ_- とし、 $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$ である.

誘導場は、3次元 Poisson 方程式の基本解 ψ と磁気ポテンシャル ϕ に対する Green の定理から導かれた次の **3次元界面磁場方程式** から求める [5].

$$\begin{cases} (P + M\hat{G}_Z)b_Z^1 = -M\hat{G}_Z b_Z^0 + t_Z \cdot g, \\ h_{X,Y}^1 + M\hat{G}_{X,Y}b_Z^1 = -M\hat{G}_{X,Y}b_Z^0 + t_{X,Y} \cdot g. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$. また、 $\hat{G}_I$ ($I=X,Y,Z$) は **3次元 Hilbert 変換演算子**で、界面全体にわたる積分により

$$\hat{G}_I F(X, Y) \equiv t_I \cdot \hat{G} F(X', Y'), \quad \hat{G} F(X, Y) \equiv 2 \iint_F dS' (\nabla' \psi) F(X', Y') \quad (2)$$

と定義されている. g は、上方境界・下方境界が界面に及ぼす影響を表している. ここで求めた $h_{X,Y}, b_Z$ からは、次節に用いる磁気応力差を

$$T \equiv -[1/\mu_j]\{\mu_+\mu_-(h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2\}/2 \quad (3)$$

のように計算することができる. ただし、 μ_j は流体/真空の透磁率 ($j=+/-$), $[\dots]$ は界面を横切る値の跳び (流体 - 真空) を表す.

3 有限厚さ流体領域における界面力学方程式

ここでは、流体領域の厚さ d が有限で界面形状が任意な流体を扱うための **界面力学方程式** を導く.

$\rho, v, D, G, \hat{p}$ を流体密度・流速・動圧・重力ポテンシャル・圧力とすれば、非粘性流体の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla(D + G + \hat{p}) \quad (4)$$

と表される. 次に、 C, T, p_0, Z を表面張力・磁気応力差・大気圧・一般化座標の

法線成分とすれば, 界面 $Z = \zeta$ における力学的条件は, $\hat{p}_{Z=\zeta} = (C + T + p_0)_{Z=\zeta}$ となる. これを (4) の界面方向成分に用いると,

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_{Z=\zeta} = -\nabla_2 S, \quad S \equiv (D + G + C + T + p_0)_{Z=\zeta} \quad (5)$$

が導かれる. ただし, $v_2 = (v_X, v_Y)$ は流速の界面成分, $\nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ は界面方向偏微分を表す.

$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ を満たす渦なし流体には, 流速を $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ と求める速度ポテンシャル φ が存在し, 非圧縮性 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ があれば, φ は Laplace 方程式 $\nabla^2 \varphi = 0$ を満たす. ζ, φ, v_Z を波数ベクトル $\mathbf{k}$ に属する成分の重ね合わせで $\zeta = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$, $\varphi = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$, $v_Z = \sum_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}}$ と表すとき, 境界条件

$$\begin{cases} \text{界面 } (Z = 0 + \zeta) & v_Z|_{Z=\zeta} = \partial \zeta / \partial t, \\ \text{水平底 } (Z = -d) & v_Z|_{Z=-d} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

を満たす速度ポテンシャル・流速の各成分は次のように決まる.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \frac{\cosh k(Z+d)}{k \sinh kd} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t}, \\ \hat{v}_{\mathbf{k}} &= \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}}{\partial Z} = \frac{\sinh k(Z+d)}{\sinh kd} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \hat{v}_{\mathbf{k}}}{\partial Z} = \frac{k \cosh k(Z+d)}{\sinh kd} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t}. \quad (k = |\mathbf{k}|) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, 界面上 ($Z = \zeta$) で非圧縮性条件の時間変化を考え, 流速を波数成分の重ね合わせで次のように表す.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Big|_{Z=\zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_Z}{\partial Z} + \nabla_2 \cdot \mathbf{v}_2 \right) \Big|_{Z=\zeta} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \hat{v}_{\mathbf{k}}}{\partial Z} + \nabla_2 \cdot \frac{\partial (\hat{\mathbf{v}}_2)_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) \Big|_{Z=\zeta}. \quad (8)$$

(5) を $v_2 = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{v}}_2)_{\mathbf{k}}$, $S = \sum_{\mathbf{k}} \hat{S}_{\mathbf{k}}$ で表し, (7) を用いれば, (8) は界面力学方程式

$$0 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\tanh kd} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) + \nabla_2 \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \nabla_2 \hat{S}_{\mathbf{k}} \right) \right\} \quad (9)$$

となる. $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}, \hat{S}_{\mathbf{k}}$ は, 界面変位 $\zeta(\mathbf{R})$ ・界面応力和 $S(\mathbf{R})$ を波数ベクトル $\mathbf{k}_{\mu}$ に属する周期関数を成分とする横ベクトル $\boldsymbol{\Phi}^{(zS)}(\mathbf{R})$ を用いて $\zeta(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\Phi}^{(zS)}(\mathbf{R}) \tilde{\zeta}$, $S(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{S}_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \boldsymbol{\Phi}^{(zS)}(\mathbf{R}) \tilde{S}$ と展開したときの波数成分であり, $\nabla_2^2 \hat{S}_{\mathbf{k}} + k^2 \hat{S}_{\mathbf{k}} = 0$ を満たす. したがって, (9) から, 波数空間における界面力学方程式

$$\frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} = -\frac{k \tanh(kd)}{\rho} \tilde{S}(\tilde{\zeta}), \quad \tilde{S}(\tilde{\zeta}) = \tilde{G}(\tilde{\zeta}) + \tilde{C}(\tilde{\zeta}) + \tilde{T}(\tilde{h}_X(\tilde{\zeta}), \tilde{h}_Y(\tilde{\zeta}), \tilde{b}_Z(\tilde{\zeta})) \quad (10)$$

が導かれる (運動が緩やかとして, D の寄与は省略した). なお, $\mathbf{R} = (X, Y)$

は界面に沿う一般化座標, $\tilde{\zeta} \equiv (\tilde{\zeta}_\mu)$, $\tilde{S} \equiv (\tilde{S}_\mu)$ ($1 \leq \mu \leq N$) は展開係数縦ベクトルである. (10) の因子 $\tanh(kd) < 1$ は, 流体の厚さを有限とすることで, 同じ S に対する界面の動きが抑制されることを示している.

$\tilde{S}(\tilde{\zeta})$ が定まれば, これから勾配行列

$$H \equiv \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{\zeta}_\mu} \right)_{1 \dots \mu \dots N}, \quad \tilde{\zeta} \equiv (\tilde{\zeta}_\mu), \quad \tilde{S} \equiv (\tilde{S}_\mu) \quad (11)$$

を求めることができる. 勾配行列は, 定常界面形状を求めるとき, その逆行列を Newton 法で用いる. また, 界面変位が有限な場合の界面の安定性を調べるとき, H の固有値の符号を判定して臨界磁場強度を決める.

4 三角格子界面形状の安定性分岐図式

元々は水平な磁性流体界面を Fig. 1(a) のように三角格子形状に変形して鉛直一様磁場を印加したとき, 界面が不安定化して行く様子を調べる. このように規則的な界面形状は, 格子ベクトル $a = (\sqrt{3}X - Y)h_0$, $b = (\sqrt{3}X + Y)h_0$, および格子ベクトルから定義される逆格子ベクトル $A = (X - \sqrt{3}Y)\pi / (2\sqrt{3}h_0)$, $B = (X + \sqrt{3}Y)\pi / (2\sqrt{3}h_0)$ に基づいて生成される (X, Y は実空間界面座標の直交単位ベクトル, h_0 は水平スケール因子). これにより界面形状は, ζ_0 を界面変位振幅として, 次の関数で表される.

$$\zeta(R) = \zeta_0 (\cos k_1 \cdot R + \cos k_2 \cdot R + \cos k_3 \cdot R), \quad \begin{cases} k_1 = 2A + 0B, \\ k_2 = 0A + 2B, \\ k_3 = 2A + 2B. \end{cases} \quad (12)$$

(12) は, Fig. 1(b) (矢印), Fig. 2(a) (矢印), Fig. 2(b) (○印) に示す基本波数ベクトル k_1, k_2, k_3 (および $k_0 = 0A + 0B$) で表されている. ところで, $k_{1,2,3}$ の大

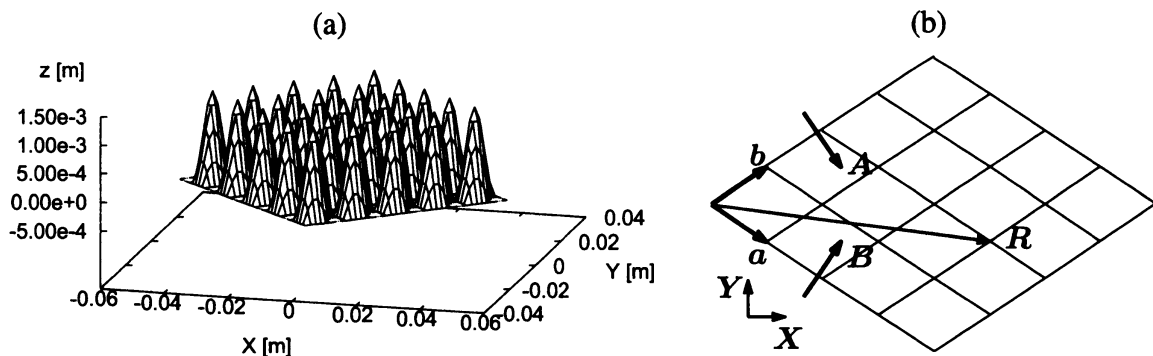


Fig. 1: 実空間 : (a) 三角格子界面形状, (b) 格子ベクトル a, b ・逆格子ベクトル A, B .

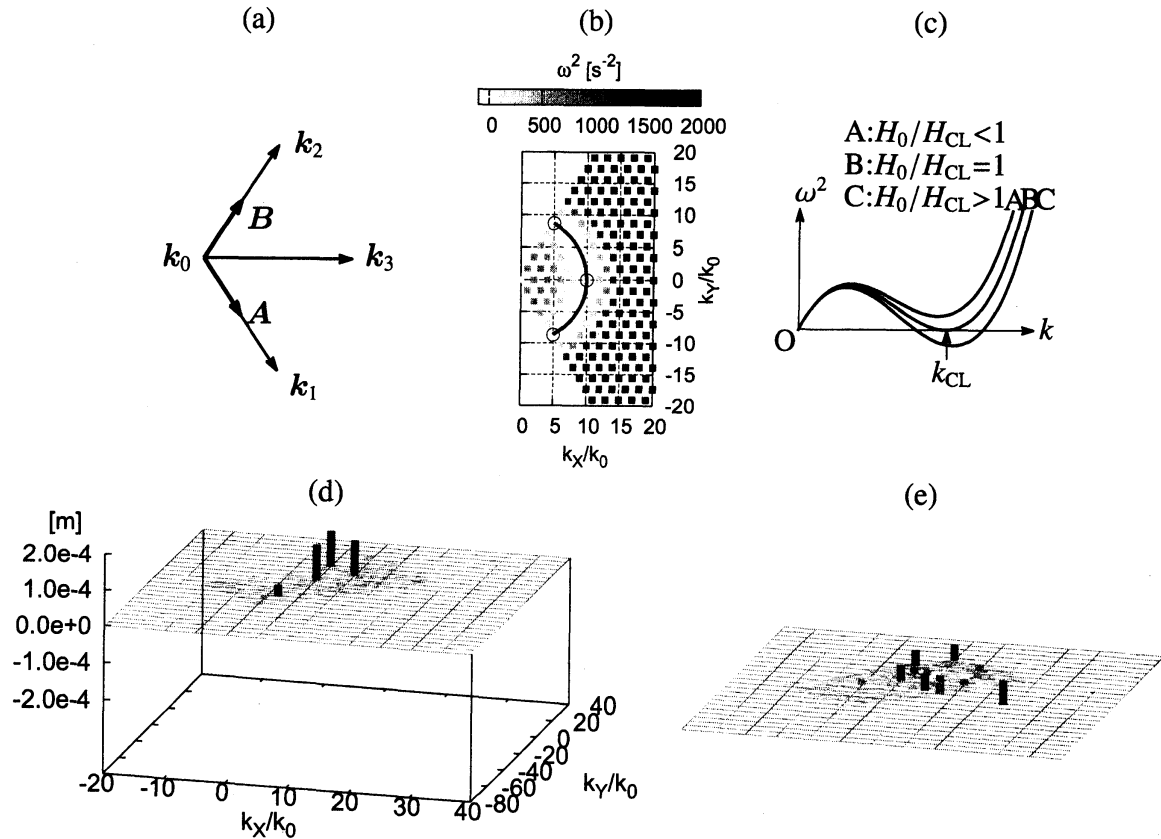


Fig. 2: 波数空間：(a) 基本波数ベクトル，(b) 三角格子界面形状の線形分散関係，(c) 2次元線形分散関係． $H_0/H_{CL}=0.90$, $\zeta_0=0.10$ mm, $\mu_+/\mu_0=1.2$, $\Delta T=2.5 \times 10^{-2}$ s における界面変位の波数スペクトル $\tilde{\zeta}$, (d) $t=00 \cdot \Delta T$, (e) $t=07 \cdot \Delta T$.

きさはいずれも $2\pi/(\sqrt{3}h_0)$ と等しく，対応する振幅 ζ_0 も共通である．このときは，波数ベクトルの大きさ k を横軸，角周波数 ω の2乗を縦軸として Fig. 2(c) に示す2次元波動の線形分散関係がそのまま当てはまり，(b) では ω^2 の大きさを濃淡をつけた四角点で表している．鉛直一様磁場の大きさ H_0 が臨界磁場 H_{CL} を越えて $\omega^2 < 0$ となると界面は不安定化するが， $H_0 = H_{CL}$ で ω^2 の最小値が(c)の横軸に接し，このときの臨界波数 k_{CL} が(b)では円弧で描かれている．この後は， $k_{1,2,3}$ の大きさが k_{CL} に一致した結果を示す．

界面変位が微小でない場合の界面の安定性は，勾配行列(11)の最小固有値である非線形応答の波数依存性を用いて調べることができる (Fig. 3) [6]. 非線形応答 $h(k)$ は線形分散関係を拡張したものであり，負の符号を持つとき界面は不安定と判定される．界面変位振幅 ζ_0 毎に臨界磁場強度 H_c を求める

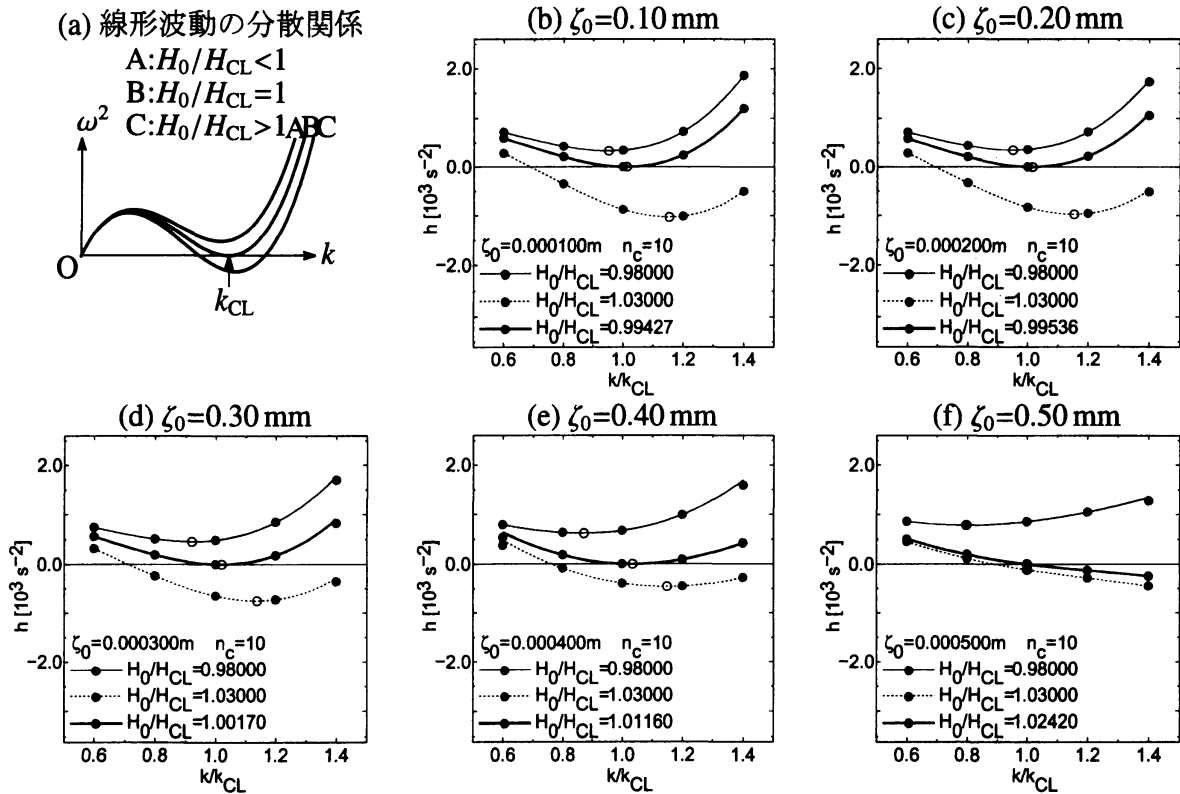


Fig. 3: 非線形応答の界面変位振幅・印加磁場強度依存性 ($\mu_+/\mu_0 = 1.2$)

と、安定性分岐図式を描くことができる。Fig. 4(a)は、透磁率比 $\mu_+/\mu_0 = 1.1$ ($\blacktriangle\triangle$), 1.2 ($\blacklozenge\lozenge$), 1.3 ($\bullet\circ$), 1.4 ($\blacksquare\square$) 毎に分岐の枝を描いたものである。透磁率比が大きいほど磁場の効果が実質的に増えるため、 H_c は下がる。なお、 $h(k)$ に極小がない場合があり、このときは $k = k_{CL}$ で $h = 0$ となる印加磁場強度を H_c として、 $\blacktriangle\blacklozenge\bullet\blacksquare$ の代わりに $\triangle\lozenge\circ\square$ で示した。

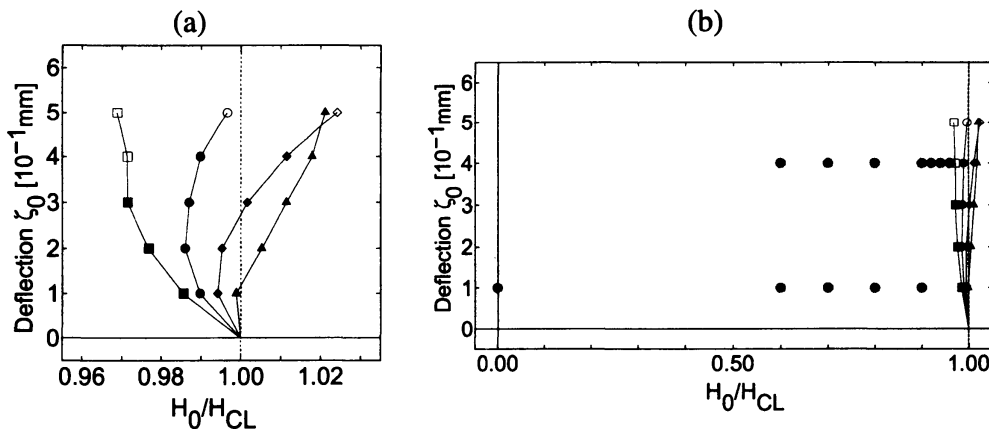


Fig. 4: (a) H_{CL} 付近の分岐図式, (b) 時間発展解析に用いた印加磁場強度と界面変位振幅。

5 波数スペクトルの時間発展

界面力学方程式 (10) を用いると、前節の分岐図式に限らず、波動のような動的現象を時間を追いながら調べることも可能になる。ここでは、元々水平な磁性流体の界面に鉛直一様磁場を印加したとき、界面変位・界面応力和の波数スペクトルが非線形効果のために時間変化していく様子を、印加磁場強度・初期界面変位振幅を変えながら調べる。

Fig. 2 には、初期時刻に (b) の○印 または (d) のように与えた界面変位の波数スペクトル $\tilde{\xi}$ が、時間 $7 \times \Delta T$ ($\Delta T = 2.5 \times 10^{-2}$ s) の後、(e) のように変わる様子を示している。

Fig. 4(b) に示した印加磁場強度と界面変位振幅について、Fig. 2(d) のような界面変位スペクトルを初期時刻に与えたとき、その後の界面変位・界面応力和の波数スペクトル $\tilde{\xi}$, $\tilde{S}$ が時間変化する様子をさらに詳しく調べた (Fig. 5, Fig. 6). これらでは、波数スペクトルの表示を、斜め上から俯瞰する Fig. 2(d),(e) に代えて、直上から見たものにしてある。また、磁気応力差 (3) による 2 次の非線形相互作用で界面磁場モード l, m から生じる磁気応力差モード $n = l \pm m$ のうち、原点に関する反転で移りあわない互いに独立なモードの範囲を示している [4].

時間発展に伴い、卓越したいくつかの波数成分 (卓越成分、図では丸で囲んで示す) と連続した弱い波数成分 (連続成分) が現れる。印加磁場強度が臨界磁場強度から離れた Fig. 5 の場合、連続成分はあまりなく、卓越成分がいくつか現れる程度である。しかし臨界磁場強度により近い Fig. 6 では、卓越成分の数と共に、連続成分がもっと増えている。また、Fig. 5, Fig. 6 の (b) に示すように、基本波数における界面力 $-(k_\mu/\rho)\tilde{S}_\mu$ の時間変化の振幅は小さくなり、それに伴って界面変位の周期が延びてくる。この後、多数の波数成分が急激に成長し、やがて界面は不安定化する。

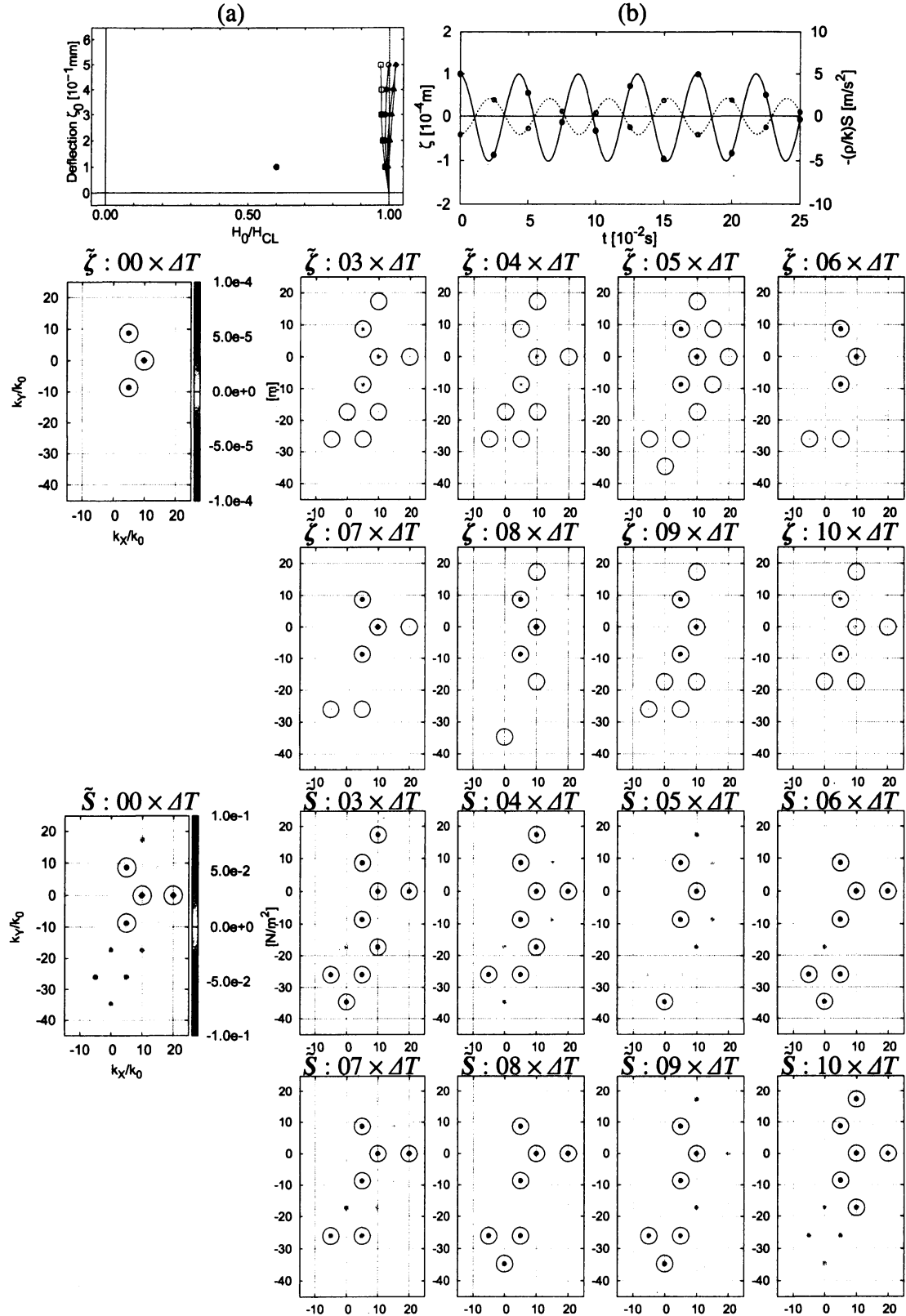


Fig. 5: 界面変位・界面応力 and の波数スペクトル $\tilde{\zeta}, \tilde{S}$ の時間発展.

$H_0/H_{CL}=0.60$, $\zeta_0=0.10$ mm, $\mu_+/\mu_0=1.2$, $\Delta T=2.5 \times 10^{-2}$ s.

(a) 印加磁場強度 H_0 と界面変位振幅 ζ_0 の位置,

(b) 界面変位 $\tilde{\zeta}_\mu$ (実線)・界面力 $-(k_\mu/\rho)\tilde{S}_\mu$ (破線) の時間変化.

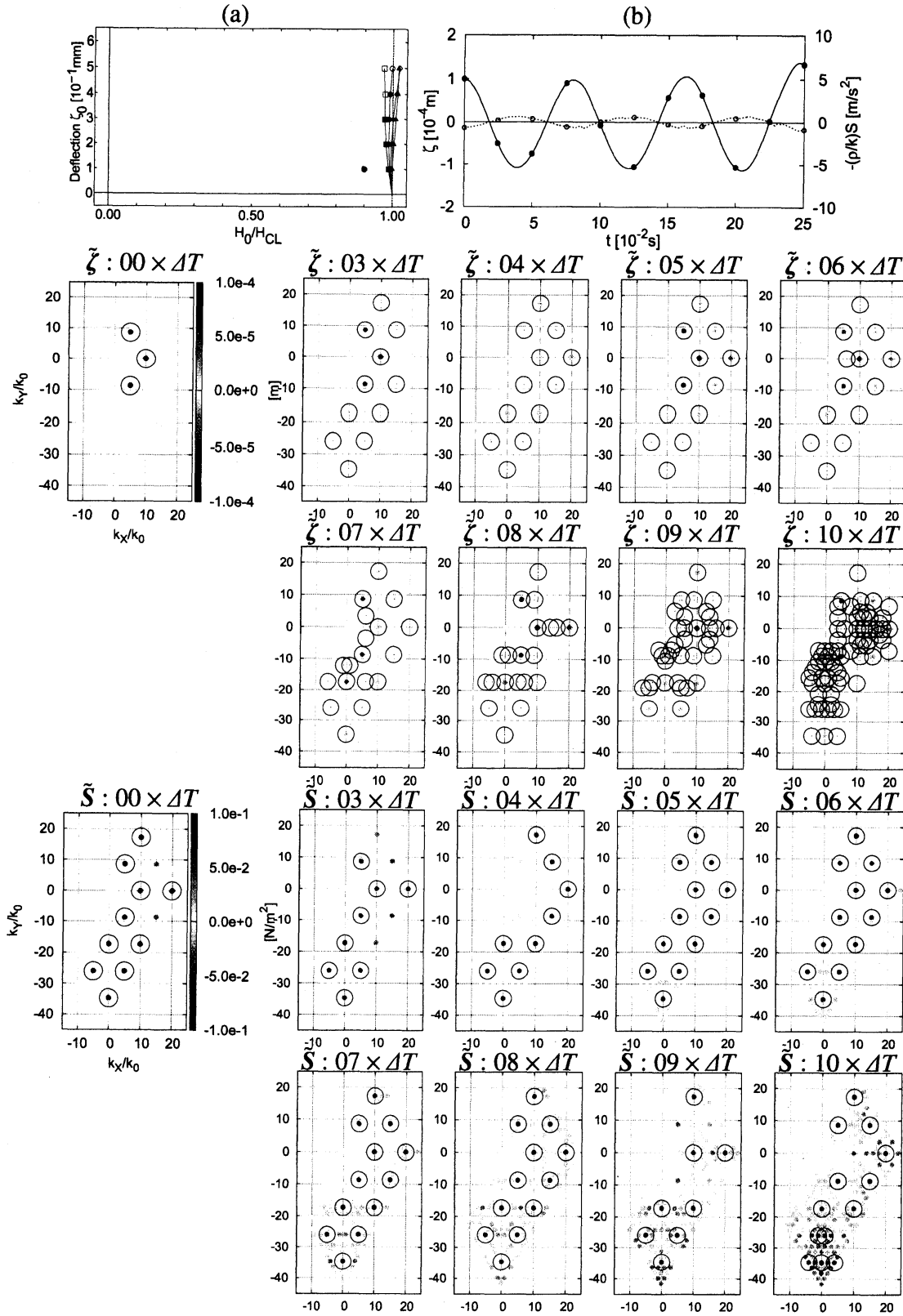


Fig. 6: 界面変位・界面応力 and の波数スペクトル $\tilde{\zeta}, \tilde{S}$ の時間発展.

$H_0/H_{CL}=0.90$, $\zeta_0=0.10$ mm, $\mu_+/\mu_0=1.2$, $\Delta T=2.5 \times 10^{-2}$ s.

(a) 印加磁場強度 H_0 と界面変位振幅 ζ_0 の位置,

(b) 界面変位 $\tilde{\zeta}_\mu$ (実線)・界面力 $-(k_\mu/\rho)\tilde{S}_\mu$ (破線) の時間変化.

6 界面力学におけるエネルギー保存則

ここでは、数値計算による結果を検証するためのエネルギー保存則について考えてみたい。界面力学方程式(9)の両辺に $\partial\zeta/\partial t$ をかけて、界面 F 全体について平均すれば、

$$0 = \left\langle \frac{\partial\zeta}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho k}{\tanh kd} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) + k^2 \hat{S}_{\mathbf{k}} \right\} \right\rangle \quad \left(\langle \cdots \rangle \equiv \frac{1}{F} \iint_F dX dY \cdots \right) \quad (13)$$

ただし、周期関数 $\hat{S}_{\mathbf{k}}$ に対する $\nabla_2^2 \hat{S}_{\mathbf{k}} + k^2 \hat{S}_{\mathbf{k}} = 0$ を考慮してある。次に、界面変位も $\zeta = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ のように周期関数に展開し、周期関数の直交性 $\langle \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_1} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_2} \rangle \neq 0$ ($\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$) を用いる。また、 $\delta\zeta$ を微小界面変位として、 $\hat{S}_{\mathbf{k}} = \delta\hat{U}_{\mathbf{k}}/\delta\zeta$ のように界面応力和を与えるポテンシャルエネルギー密度 $\hat{U}_{\mathbf{k}}$ が見つければ、(13) は次のように書き換えられる。

$$0 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\rho k}{\tanh kd} \left\langle \frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \frac{\partial^2 \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} \right\rangle + k^2 \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} \delta \hat{U}_{\mathbf{k}} \right\rangle \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} \left\langle \frac{\rho k}{2 \tanh kd} \left(\frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right)^2 + k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}} \right\rangle. \quad (14)$$

したがって、 $\sum_{\mathbf{k}} \left\langle \frac{\rho k}{2 \tanh kd} \left(\frac{\partial \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right)^2 + k^2 \hat{U}_{\mathbf{k}} \right\rangle$ は時間的に一定となり、界面の単位面積あたりの平均エネルギーとして保存される。

重力加速度・表面張力係数・界面形状の主曲率を $g, \gamma, \kappa_{1,2}$ とすれば、(5) で定義したように、界面応力和 S は動圧 $D \simeq 0$ 、重力ポテンシャル $G = \rho g \zeta$ 、表面張力 $C = -\gamma(\kappa_1 + \kappa_2)$ および(3)の磁気応力差 T の和である。 S を

$$S = \frac{\delta U}{\delta \zeta} = \frac{U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta)}{\delta\zeta} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{S}_{\mathbf{k}}, \quad U(\zeta) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{k}} = \frac{\delta \hat{U}_{\mathbf{k}}}{\delta \zeta} \quad (15)$$

のようにエネルギー密度 $U(\zeta)$ から求めるとき、 G, C, T に対応するエネルギー密度 U_G, U_C, U_T は次のようになる。

$$U_G = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2, \quad U_C = \gamma \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}, \quad U_T = \int_{-\infty}^{\zeta} dz \frac{B^2}{2\mu_+} + \int_{\zeta}^{\infty} dz \frac{B^2}{2\mu_-}, \quad (16)$$

$$U(\zeta) = U_G + U_C + U_T.$$

U_G から G は容易に得られる。 U_C は単位面積あたりの張力エネルギーであり、 C は微分幾何学的に導かれる [7]。 U_T は単位面積あたりの物質が外界へする仕事から得られる。 $B^2/2\mu_j$ は単位体積あたりの磁場エネルギーである。

7 まとめ

汎用解析による磁場解析と界面力学方程式による流体解析を結合して、磁性流体界面波動の安定性解析と動的解析を行った。動的解析では、水平に近い磁性流体界面に鉛直一様磁場を印加したとき、界面変位・界面応力 and の波数スペクトルが非線形効果のために時間変化していく様子を調べ、以下の事項を確認した。

1. 時間の経過と共に、初期の基本波数以外の波数成分が発生する。新たな波数成分の成長は、臨界磁場に近づくほど早くなる。
2. 新たな波数成分には、卓越成分と連続成分がある。卓越成分は、基本波数ベクトルの和または差から生じる。
3. 印加磁場の大きさが臨界磁場に近づくにつれ、界面応力 and は小さくなり、波動の周期は長くなる。

今後、水平な界面が不安定化した後、規則的な界面形状パターンが残るまでの過程を解明するが、このために、界面エネルギーなど各種物理量の時間変化を調べ、波数スペクトルの時間発展を定量的に把握して行く。

参考文献

- [1] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.7 (1985).
- [2] 水田 洋: 磁性流体界面形状解析における非線形応答; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の多様性と普遍性」, **1761**, p.163 (2011).
- [3] Y.Mizuta: Interface stability analysis of magnetic fluid by using a method for general use and nonlinear response; *Magnetohydrodynamics*, **49** (3–4), p.397 (2013).
- [4] 水田 洋: 磁性流体 3 次元界面解析のためのいくつかの考察; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1594**, p.55 (2008).
- [5] 水田 洋: 水深が有限な磁性流体界面の波動と安定性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847**, p.96 (2013).
- [6] 水田 洋: 磁性流体界面解析における行列解法; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の研究の新たな進展」, **1800**, p.203 (2012).
- [7] 小林昭七: 曲線と曲面の微分幾何 (裳華房, 東京), 第 2 章 (1995).