

非可換エルゴード理論

京大 数研 荒木不二洋

無限系の統計力学の枠として C^* 環の理論が考えられ、最近この枠の中で非可換エルゴード理論と称するものが展開されている。その統計力学的背景については別の研究会で述べたので、ここでは作用素環的側面に限って、現在まで知られていることをまとめてみる。エルゴード状態の特徴づけと任意状態のエルゴード状態への分解が主な内容である。

目 次

§ 1. 群上の平均

1.1	Godement 平均	1
1.2	平均エルゴード定理	3
1.3	柔順群と不変平均	4
1.4	M フィルター	6

§ 2. C^* 環の自己同型による群の表現

2.1	基礎的定義	8
2.2	相互関係	10
2.3	性質	11
2.4	共変環	14

§ 3. エルゴード状態と分解定理

3.1	エルゴード状態	14
3.2	分解定理	16
3.3	部分群に関する分解と弱 <i>mixing</i> 性	18
3.4	概周期状態	20

§ 4. その他

§ 1. 群上の平均

1.1 Godement 平均

G : 局所コンパクト群

$B(G)$: G 上有界複素数値関数の C^* 環, $\|f\| = \sup |f(g)|$.

$C(G)$: G 上連続有界複素数値関数の C^* 環, $C(G) \subset B(G)$.

$C_0(G)$: $f \in C(G)$, $\lim_{g \rightarrow \infty} f(g) = 0$ のような f 全体,

$\mathcal{P}(G)$: G 上連続正型複素数値関数. 正型とは

$$\sum C_i^* C_j f(g_i^{-1} g_j) \geq 0$$

$V(G)$: $\mathcal{P}(G)$ の元の線形結合全体.

$\overline{V}(G)$: $V(G)$ の $B(G)$ における閉包, C^* 環.

$AP(G)$: G 上既周期関数の C^* 環. すなわち, $f(g) = (\Xi_1, U(g)\Xi_2)$

(U は G の有限次元表現, Ξ_1, Ξ_2 は表現空間のベクトル) 全体のノルムによる閉包.

R_s, L_s : $R_s f(g) \equiv f(s^{-1}g)$, $L_s f(g) \equiv f(g s)$.

Rf : $R_s f$, $s \in G$ の凸閉包.

$\overline{R}f$: Rf の $B(G)$ におけるノルムによる閉包.

$Lf, \overline{L}f$ も同様

E : $\overline{R}f, \overline{L}f$ がともに定数関数を含むような f 全体,

$M(f)$: Godement 平均, $\overline{R}f \cup \overline{L}f$ に含まれる定数関数の値.

定理 1 (a) $f \in E$ に対し $M(f)$ は一意的にきまり, 次の性

質をもつ,

$$(a1) \quad \mathcal{E} \text{ は } B(G) \text{ で閉じていて, } |M(f)| \leq \|f\|$$

$$(a2) \quad f \in \mathcal{E} \text{ なら, } f^*, \alpha f, R_g f, L_g f \in \mathcal{E} \quad (\alpha \in \mathbb{C}, g \in G)$$

$$M(f)^* = M(f^*), M(\alpha f) = \alpha M(f), M(R_g f) = M(L_g f) = M(f).$$

$$(a3) \quad f \in \mathcal{E}, \quad f \geq 0 \text{ なら } M(f) \geq 0$$

$$(b) \quad \overline{V}(G) \subset \mathcal{E}, \quad M \text{ は } \overline{V}(G) \text{ の } R_g, L_g \text{ 不変状態,}$$

$$(c) \quad f \in \overline{V}(G) \text{ に対し, 次の分解が一意的に存在する,}$$

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in AP(G), \quad M(|f_2|^2) = 0$$

$f \in \overline{V}(G)$ に対し, G のユニタリ表現 U_f , 表現空間のベクトル Ψ_1, Ψ_2 が存在して

$$f_1(g) = (\Psi_1, U_f(g) E_f^F \Psi_2)$$

$$f_2(g) = (\Psi_1, U_f(g) (1 - E_f^F) \Psi_2)$$

ただし

E_f^F : 表現 U_f の有限次元不変部分空間への射影子を含む最小の射影子.

$f \in \mathcal{A}(G)$ の場合, $f(g) = (\Psi_f, U_f(g) \Psi_f)$ となる巡回ベクトル Ψ_f をもつ表現 U_f に対して, 次の条件は同等である.

$$(i) \quad U_f \text{ が } 0 \text{ 以外 } G \text{ の有限次元表現を含まない.}$$

$$(ii) \quad M(|f|^2) = 0$$

$$(iii) \quad M(|f|) = 0$$

(d) 次の性質をもつコンパクト群 $\overline{G}$ が存在する。

(d1) G から $\overline{G}$ の中への準同型 π が存在して $\overline{\pi G} = \overline{G}$

(d2) $f \in AP(G)$ に対し $\pi^* f \in C(\overline{G})$ が存在して $\pi^* f(\pi g) = f(g)$,

かつ π^* は $AP(G)$ と $C(\overline{G})$ の同型対応 (onto) を与える。

(d3) $M(f) = \int_{\overline{G}} \pi^* f(\bar{g}) d m(\bar{g})$ ($f \in AP(G)$), ここに m は $\overline{G}$ の規格化された不変測度。

1.2 平均エルゴード定理

$U(g)$: G のヒルベルト空間 H 上のユニタリ表現。

E^F : H の有限次元不変部分空間をすべて含む最小の射影子。

U^E : U の $E^F H$ への制限。

S_e : G の既約表現全体。

$U^\sigma(g)$: $\sigma \in S_e$ に対する表現演算子。

H^σ : $\sigma \in S_e$ の表現空間, 次元は d_σ とする。

$$U^E \text{ の既約分解 } \begin{cases} E^F H = \sum_{\sigma \in S_e}^{\oplus} H^\sigma \otimes H'^\sigma \\ U^E(g) = \sum_{\sigma \in S_e}^{\oplus} U^\sigma(g) \otimes 1'_\sigma \end{cases}$$

E^σ : H における $H^\sigma \otimes H'^\sigma$ への射影子。

定理2 (a) $f \in \mathcal{V}(G)$ に対し, 次式をみたす H 上有界作用素 $M(fU)$ が一意に存在する.

$$(\Psi_1, M(fU)\Psi_2) = M\{f(g)(\Psi_1, U(g)\Psi_2)\} \quad \forall \Psi_1, \Psi_2 \in H$$

$$(b) \quad \|M(fU)\| \leq \|f\|$$

(c) $f(g) = (\Psi_1, U_f(g)\Psi_2)$, U_f と U^E が部分表現を共有しなければ, $M(fU) = 0$.

$$(d) \quad M\{(\Psi_1^\sigma, U^\sigma(g)\Psi_2^\sigma)^* U(g)\} = d_\sigma^{-1} \{P_{12} \otimes 1_\sigma'\} E^\sigma$$

ただし, $\Psi_1^\sigma, \Psi_2^\sigma \in H^\sigma$, $P_{12}\Psi = (\Psi_2^\sigma, \Psi)\Psi_1^\sigma$ ($\forall \Psi \in H^\sigma$).

$$M(U) = E^\sigma \text{ (不変ベクトル全体への射影).}$$

1.3 乗順群と不変平均

定理3 次のいずれかの条件をみたす $\mathcal{C}(G)$ の状態 η の存在は, 与えられた G に対し同等である.

$$(1) \quad \eta(f(\tau g)) = \eta(f(g)), \quad \forall g \in G \quad \text{左側不変平均}$$

$$(2) \quad \eta(f(g\tau)) = \eta(f(g)), \quad \forall g \in G \quad \text{右側不変平均}$$

$$(3) \quad \text{上記二条件が同時に成立} \quad \text{(両側) 不変平均}$$

定義 不変平均 η をもつ局所コンパクト群を乗順群という.

定理4 乗順群に対しては, 任意の不変平均 η は $\mathcal{C}$ 上 M に一致する. G が非コンパクトなら η は $\mathcal{C}_0(G)$ 上 0 である.

$\mathcal{O} : C^*$ 環. $\mathcal{O}^* : \mathcal{O}$ の位相的共軛空間.

$\mathcal{C}(G, \sigma)$: G 上 σ 値弱有界弱連続関数全体, すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G, \sigma), \varpi \in \sigma^* \Rightarrow (\varpi, X(g)) \in \mathcal{C}(G)$$

このとき, $\|X\| \equiv \sup \|X(g)\| < \infty$.

σ^{**} : σ の enveloping W^* 環

$\mathcal{L}(H)$: ヒルベルト空間 H 上の有界作用素全体.

$\mathcal{C}(G, H)$: G 上 $\mathcal{L}(H)$ 値有界弱連続関数全体, すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G, H), \varpi_1, \varpi_2 \in H \Rightarrow (\varpi_1, X(g)\varpi_2) \in \mathcal{C}(G),$$

$$\|X\| \equiv \sup \|X(g)\| < \infty.$$

定理 5 (a) $\mathcal{C}(G)$ の状態 (G 上の平均という) $\tilde{\nu}$ に対し,
次式をみたす $\mathcal{C}(G, \sigma)$ から σ^{**} への写像 $\tilde{\nu}$ が一意的に存在
する. $X \in \mathcal{C}(G, \sigma)$ に対し,

$$(\varpi, \tilde{\nu}(X)) = \tilde{\nu}\{(\varpi, X(g))\}, \quad (\forall \varpi \in \sigma^*)$$

この $\tilde{\nu}$ は次の性質をもつ.

(1) X につき線形.

(2) 有界, $\|\tilde{\nu}(X)\| \leq \|X\|$.

(3) 正, すなわち $X(g) \geq 0 \ (g \in G) \Rightarrow \tilde{\nu}(X) \geq 0$.

(4) $\tilde{\nu}(A) = A$, $\tilde{\nu}(AX) = A\tilde{\nu}(X)$, $\tilde{\nu}(XA) = \tilde{\nu}(X)A \ (\forall A \in \sigma)$.

(b) G が非コンパクト, 乗順で $\tilde{\nu}$ が右側不変なら,

$$\lim_{g \rightarrow \infty} (\varpi, X(g)) = 0 \quad (\varpi \in \sigma^*) \Rightarrow \tilde{\nu}(X) = 0$$

(c) $\mathcal{C}(G)$ の状態 η に対し次式をみたす $\mathcal{C}(G, H)$ から $\mathcal{L}(H)$ への写像 $\tilde{\eta}$ が一意的に存在する. $X \in \mathcal{C}(G, H)$ に対し,

$$(\Psi_1, \tilde{\eta}(X) \Psi_2) = \eta\{\langle \Psi_1, X(q) \Psi_2 \rangle\} \quad (\Psi_1, \Psi_2 \in H)$$

この $\tilde{\eta}$ は次の性質をもつ.

- (1) X につき線形.
- (2) 有界, $\|\tilde{\eta}(X)\| \leq \|X\|$.
- (3) 正, すなわち, $X(q) \geq 0 \quad (q \in G) \Rightarrow \tilde{\eta}(X) \geq 0$.
- (4) $\tilde{\eta}(A) = A$, $\tilde{\eta}(AX) = A\tilde{\eta}(X)$, $\tilde{\eta}(XA) = \tilde{\eta}(X)A \quad (\forall A \in \mathcal{L}(H))$.
- (5) $\tilde{\eta}(X) \in \{X(q); q \in G\}''$

(d) G が柔順局所コンパクト群, $U(q)$ が H 上 G の連続ユニタリ表現, E^0 を G 不変ベクトル全体への射影子とすると,

$$\tilde{\eta}(U(q)) = E^0.$$

X が G の連続指標, E^x を $U(q)\Psi = X(q)\Psi$ のようなベクトル Ψ 全体への射影子とすると,

$$\tilde{\eta}(X^* U(q)) = E^x.$$

1.4 M フィルター

$\{\alpha\}$: フィルター

f_α : G 上可測関数

定義 $\{f_\alpha\}$ が次の三条件をみたすとき右 M フィルターとい

う。

$$(1) \quad f_\alpha(g) \geq 0$$

$$(2) \quad \int f_\alpha(g) d\mu(g) = 1$$

$$(3) \quad \lim_{\alpha} \int d\mu(g) |f_\alpha(g) - f_\alpha(gg')| = 0 \quad \forall g' \in G$$

ここに μ は右側不変測度である。同様に左 M フィルターも定義される。

定理 6 右 M フィルター f_α に対し、極限

$$\eta_f(k) = \lim_{\alpha} \int f_\alpha(g) k(g) d\mu(g)$$

が存在するときはそれを与える右側不変平均が存在する。

例 Van Hove 平均。 $G = \mathbb{R}^n$, $\{\Lambda_k \subset \mathbb{R}^n, k=1,2,\dots\}$
に対し

$$v_a^+(\Lambda) \equiv \{g; \Lambda \cap (S_a + g) \neq \emptyset\} \text{ の体積}$$

$$v_a^-(\Lambda) \equiv \{g; \Lambda \supset S_a + g\} \text{ の体積}$$

ただし S_a は原点中心半径 a の球

$$\lim_k v_a^+(\Lambda_k) / v_a^-(\Lambda_k) = 1 \quad (\forall a)$$

のとき $\Lambda_k \rightarrow \infty$ と定義する。 $v(\Lambda)$ を Λ の体積とすると、

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} v(\Lambda)^{-1} \int_{\Lambda} dx f(x)$$

は上の意味で不変平均を与える。

定義 G 上 $\mathcal{L}(H)$ 値可測関数 X に対し、次式をみたす $\bar{X}_f^w$, $\bar{X}_f^s$, $\bar{X}_f^u \in \mathcal{L}(H)$ が存在すれば、それぞれ X の弱平均, 強平均, 一様平均という。

$$\lim_{\alpha} (\Psi_1, [\int f_{\alpha}(g) X(g) d\mu(g) - \bar{X}_f^w] \Psi_2) = 0, \Psi_1, \Psi_2 \in H$$

$$\lim_{\alpha} \|\int f_{\alpha}(g) X(g) d\mu(g) - \bar{X}_f^s\| \Psi = 0, \Psi \in H$$

$$\lim_{\alpha} \|\int f_{\alpha}(g) X(g) d\mu(g) - \bar{X}_f^u\| = 0$$

もし存在すれば、いずれも $\bar{\eta}_f(X)$ と一致する。

定理 7 U が G の連続表現, f_{α} が右 M フィルター, χ が G の連続指標, E^{χ} を $U(g)\Psi = \chi(g)\Psi$ のようなベクトル Ψ 全体への射影とすると, $\chi(g)^* U(g)$ の f_{α} による強平均が存在して, E^{χ} に等しい。特に, $U(g)$ の f_{α} による強平均が存在して, E^0 に等しい。

§ 2 C^* 環の自己同型による群の表現

2.1 基礎的定義

$\tau: \mathcal{A}$ の自己同型による G の表現 $g \in G \longrightarrow \tau_g \in \text{Aut } \mathcal{A}$

τ が 強連続 とは $\lim_{g \rightarrow 1} \|\tau_g A - A\| = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

τ が 一様連続 とは $\lim_{g \rightarrow 1} \sup_{\|A\| \leq 1} \|\tau_g A - A\| = 0$

以下強連続を単に連続という。

共変表現 とは, ヒルベルト空間 H 上の $\mathcal{A}$ の表現 π , G のユニタリ表現 U の組で, 次式をみたすもの。

$$U(g) \pi(A) U(g)^{-1} = \pi(\tau_g A)$$

以下 $U(g)$ は連続とする.

G : σ の 状態全体

$H_\varphi, \Omega_\varphi, \pi_\varphi$: $\varphi \in G$ に対し $\varphi(A) = (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A) \Omega_\varphi)$

できるヒルベルト空間 H_φ , σ の H_φ 上表現 π_φ , 巡回ベクトル $\Omega_\varphi \in H_\varphi$ の組.

G_0 : 不変状態全体. すなわち $\varphi \in G$, $\varphi(\tau_g A) = \varphi(A)$.

U_φ : $\varphi \in G_0$ に対し, $U_\varphi(g) \pi_\varphi(A) \Omega_\varphi = \pi_\varphi(\tau_g A) \Omega_\varphi$

できる G のユニタリ表現. τ が連続なら U_φ も連続.

τ が 漸近可換 とは $\lim_{g \rightarrow \infty} \|\tau_g A, B\| = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma)$

τ が 弱漸近可換 とは $\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi([\tau_g A, B]) = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \varphi \in G)$

H 上の表現 π が 漸近可換 とは

$$\lim_{g \rightarrow \infty} (\Psi, \pi([\tau_g A, B]) \Psi) = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \Psi \in H)$$

$\varphi \in G$ が 漸近可換 とは H_φ 上 π_φ が漸近可換なこと.

τ が η 可換 とは, G の右または左不変平均 η に対し,

$$\eta \{ \varphi([\tau_g A, B]) \} = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \varphi \in G)$$

H 上の表現 π が η 可換 とは,

$$\eta \{ (\Psi, \pi([\tau_g A, B]) \Psi) \} = 0 \quad (\forall A, B \in \sigma, \forall \Psi \in H)$$

$\varphi \in G$ が η 可換 とは, H_φ 上 π_φ が η 可換なこと.

τ が M 可換 とは, 任意の $A, B \in \sigma$, $\varphi \in G$ に対し,

$$f(g) \equiv |\varphi([\tau_g A, B])| \in \mathcal{E}, \quad M(f) = 0.$$

H 上の表現 π が M 可換 とは, 任意の $A, B \in \mathcal{A}$, $\Psi \in H$ に対して

$$f(g) \equiv |(\Psi, \pi([z_g A, B] \Psi))| \in \mathcal{E}, \quad M(f) = 0$$

$\varphi \in G$ が M 可換 とは, H_φ 上 π_φ が M 可換なこと,

漸近可換, τ 可換, M 可換の定義で $\varphi \in G_0$, $\Psi \in E^0 H$ 等の条件をつける場合もある。

τ が表現 π で 大きい とは, $\mathcal{A}$ の任意の自己共轭元 A に対し,

$$K(A) \equiv \overline{\text{conv}} \{ \pi(z_g A); g \in G \}, \quad K(A) \cap \pi(\mathcal{A})' \neq \phi$$

ここに, $\overline{\text{conv}} \{ \dots \}$ は $\{ \dots \}$ の凸包の弱閉包。

τ が $\varphi \in G$ で 大きい とは, π_φ で大きいこと。

τ が 大きい とは任意の $\varphi \in G_0$ で大きいこと。

共変表現 (π, U) が G 可換 とは, $E^0 \pi(\mathcal{A}) E^0$ が可換なこと。

ここに E^0 は $U(G)$ 不変ベクトル全体への射影

$\varphi \in G_0$ が G 可換 とは, (π_φ, U_φ) が G 可換なこと。

τ が G 可換とは, 任意の $\varphi \in G_0$ が G 可換のこと。

2.2 相互関係

定理 8 (1) τ が H 上表現 π で大きいための必要十分条件は, 任意の $\Psi_j \in H$, $n < \infty$, $B_j \in \mathcal{A}$ ($j = 1 \cdots n$), $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\inf_{A' \in K(A)} \max_j |(\Psi_j, \pi([A', B_j]) \Psi_j)| = 0$$

(2) H 上共変表現 (π, U) が G 可換であるための必要十分条件は, 任意の $\Psi \in E^0 H$, $A, B \in \mathcal{K}$ に対して

$$\inf_{A' \in \mathcal{K}(A)} |(\Psi, \pi([A', B])\Psi)| = 0$$

$$\left(\inf_{\eta} |(\Psi, \pi([A, \eta B])\Psi)| = 0 \text{ なら十分} \right)$$

定理 9

(1) G が非コンパクト, φ が漸近可換 $\Rightarrow$ τ は φ で大きい. $\nearrow \varphi$ は M 可換,

(2) G が柔順, φ が M 可換 $\Rightarrow \varphi$ は η 可換 (η 任意)

(3) φ が M 可換 $\Rightarrow$
 φ が η 可換 $\Rightarrow$ φ は G 可換.
 φ で τ が大きい $\nearrow$

2.3 性質

$\mathcal{R}$: 共変表現 (π, U) で, $\mathcal{R} \equiv (\pi(\mathcal{K}) \cup U(G))''$,

$\varphi \in \mathcal{G}_0$ に対しては, $\mathcal{R} \equiv (\pi_\varphi(\mathcal{K}) \cup U_\varphi(G))''$.

$\mathcal{Z}$: $\mathcal{R}$ の中心,

$\mathcal{C}$: $\overline{\pi(\mathcal{K})}$ の中心 ($-$ は弱閉包)

$\mathcal{C}_0: \mathcal{C} \cap U(G)'$

定理 10 τ が共変表現 (π, U) で大きく, $\mathcal{C}_0$ が忠実な G 不変正規状態があるとする。(特に τ が $\varphi \in \mathcal{G}_0$ で大きければこの

条件がみたされる。) このとき $\overline{\pi(\sigma)}$ から $\mathcal{C}_0$ への写像 γ で、次の性質をもつものが一意的に存在する。

- (1) γ は線形, 正, 正規 (normal)
- (2) $\gamma(U(g)AU(g)^{-1}) = \gamma(A)$
- (3) $\gamma(A \cdot B) = \gamma(A)B \quad (B \in \mathcal{C}_0), \quad \gamma(1) = 1$
- (4) $\overline{\pi(\sigma)}$ の任意の正規 G 不変状態 P に対し
- (5)
$$P = (P|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \gamma$$

$$\gamma(A)E^0 = E^0 A E^0$$

定理 11 (1) 共変表現 (π, U) が $\mathcal{H}$ 可換のためには

$$m_{\pi}(A) \equiv \tilde{\pi}\{U(g)AU(g)^{-1}\} \in \mathcal{C} \quad (\forall A \in \pi(\sigma))$$

が必要十分。このとき, $m_{\pi}(A) \in \mathcal{C}_0$ である。また $E^0 m_{\pi}(A) = E^0 A E^0$ 。

(2) τ が $\mathcal{H}$ 可換であるためには,

$$m_{\pi}(A) \equiv \tilde{\pi}\{\tau_g A\} \in \sigma^{**} \text{ の中心 } (\forall A \in \sigma)$$

が必要十分である。

定理 12 $\varphi \in G_0$ が M 可換なら, 任意の $f \in \overline{V}(G)$, $\Psi_1, \Psi_2 \in H_{\varphi}$, $A \in \sigma$ に対して

$$F(g) \equiv f(g)(\Psi_1, \pi_{\varphi}(\tau_g A)\Psi_2) \in \mathcal{E}$$

このとき σ から $\mathcal{E}$ への写像 M_f を

$$(\Psi_1, M_f(A)\Psi_2) = M(F)$$

で定義すると, $f \mapsto M_f$ は線形, 正 ($f \geq 0, A \geq 0 \Rightarrow M_f(A) \geq 0$),
有界 ($\|M_f(A)\| \leq \|f\| \|A\|$), で次式とみたす.

$$M_f = M_{f_1} \quad \text{ただし } f = f_1 + f_2 \text{ は定理 1 (c) の分解,}$$

$$M_f(\tau_g^{-1} A) = M_{L_g f}(A)$$

$$U_\varphi(g) M_f(A) U_\varphi(g)^{-1} = M_{R_g f}(A)$$

$$M_{f^*}(A) = M_f(A^*)^*$$

$$M_f(A) B E^0 = B M(f U_\varphi) \pi_\varphi(A) E^0$$

$$M_1(A) \in \mathcal{C}_0, \quad E^0 M_1(A) = E^0 A E^0$$

注意 γ, M_1, m_η が共通に定義される場合はたがいに等しい.

定理 13 任意の共変表現 (π, U) で

$$E^0 (E^0 \pi(\alpha) E^0)' = E^0 (E^0 \pi(\alpha)' E^0)'' = R' E^0$$

もし, $E^0 H$ が $\pi(\alpha)$ につき巡回的なら

$$A \in R' \iff A E^0 \in R' E^0$$

は R' と $R' E^0$ の同型対応を与える。

定理 14 $E^0 H$ が $\pi(\alpha)$ につき巡回的で 共変表現が G 可換なら,

定理 13 の $R' E^0$ は $E^0 H$ で極大可換で (すなわち

$R' E^0 = (E^0 \pi(\alpha) E^0)'' E^0$), さらに R' は可換である。

定理15 $\varphi \in G_0$ が, M 可換, τ 可換, または, τ が φ で大きい, のいずれかが成立すれば, $R' = \mathbb{C}$ である。

2.4 共変環

C^* 環 $\mathcal{O}$ と G の $\text{Aut } \mathcal{O}$ による連続表現 τ が与えられたとき, 共変 C^* 環 $\mathcal{O}^G$ とは, 次の $*$ 環に C^* ノルムを入れて完備化したものである:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{O}^G : \quad & g \in G \longrightarrow X(g) \in \mathcal{O}, \\ & \int \|X(g)\| d\mu(g) < \infty \quad (\mu: \text{左側不変測度}) \\ (X * Y)(g) = & \int X(s) \tau_s Y(s^{-1}g) d\mu(s) \\ X^*(g) = & \tau_g X(g^{-1})^* (d\mu(g^{-1}) / d\mu(g)) \end{aligned}$$

定理16 0 表現を含まない共変表現 (π, U) と共変 C^* 環 $\mathcal{O}^G$ の 0 表現を含まない表現の間に, 次式により一対一対応が存在する。このとき $\hat{\pi}(\mathcal{O}^G)' = R$ である。

$$\hat{\pi}(X)\Psi = \int \pi(X(g))U(g)\Psi d\mu(g) \quad (\forall \Psi \in H)$$

§3 エルゴード状態と分解定理

3.1 エルゴード状態

定理17 $\varphi \in G_0$ が G 可換なら, φ に対する次の条件は, たいがい同値である。

(1) φ は G_0 の 端点 ($\pm 1 = -1$ の状態).

(2) ある H_φ で既約 ($\Leftrightarrow$ 双因子分解可能).

(3) $\dim E^\varphi H_\varphi = 1$ (すなわち, $\Omega_\varphi(g)\Xi = \Xi, \forall g \in G \Rightarrow \Xi = c\Omega_\varphi$).

注意 (3) $\rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1) は G 可換の仮定なしに成立. 前項の定理を使って, いろいろの条件のもとで, R をいろいろな書き変えと, 上記と等価な違った形の条件がいろいろ得られる. それは一々書かないことにする.

定理18 φ が G_0 で大さければ, φ に対する次の条件は, 上記条件と同等である.

$$(4) (\Omega_\varphi, \gamma(A)\pi_\varphi(B)\Omega_\varphi) = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

$$(4') \gamma(A) = \varphi(A) \cdot 1 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

定理19 $\varphi \in G_0$ が M 可換なら, 次の条件は (1) と同等.

$$(5) M\{\varphi(A^* \tau_g A) - |\varphi(A)|^2\} = 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

$$(5') M\{\varphi(A \tau_g B)\} = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

$$(5'') M_1(\pi_\varphi(\tau_g A)) = \varphi(A) \cdot 1 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

定理20 $\varphi \in G_0$ が $\mathcal{N}$ 可換なら, 次の条件も (1) と同等.

$$(6) (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A^*) \pi_\varphi(A) \Omega_\varphi) = |\varphi(A)|^2 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

$$(6') \mathcal{N}\{\varphi(A \tau_g B)\} = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$$

$$(6)' \quad \mu_n(A) = \varphi(A) \cdot 1 \quad (\forall A \in \mathcal{O})$$

注意 (4), (5)', (6)' の条件は, 弱クラスター性といわれる。

これが漸近可換で, $\pi(\mathcal{O})'$ がファクターならば, 次の強クラスター性が成立する。

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(A \tau_g B) &= \varphi(A) \varphi(B) & (\forall A, B \in \mathcal{O}) \\ w\text{-}\lim_{g \rightarrow \infty} \pi_\varphi(\tau_g A) &= \varphi(A) \cdot 1 & (\forall A \in \mathcal{O}) \end{aligned}$$

3.2 分解定理

G_0 (弱*コンパクト) の上の測度全体に

$\mu_1 \leq \mu_2 \iff \mu_1(f) \leq \mu_2(f)$, f は任意の連続凸関数により順序を入れる。実測度 δ_φ ($\delta_\varphi(f) = f(\varphi)$) に対し

$$\delta_\varphi \leq \mu \implies \varphi(A) = \int \chi(A) d\mu(\chi)$$

もし測度 μ が G_0 の端点集合の中に台を持てば, 上記は φ の端点状態 (エルゴード状態) への積分分解になる。そこでそのような分解が存在し一意のかが問題となる。

$$\mu \text{ の台} \subset \text{端点集合} \implies \mu \text{ は極大 } (\mu \leq \mu' \implies \mu' = \mu)$$

そこで, $\delta_\varphi \leq \mu$ をみたす極大な μ が存在し一意のかが問題にする。

任意の $\varphi \in G_0$ に対し, $\delta_\varphi \leq \mu$ なる極大な μ が一意のとき, G_0 は単体であるという。たとえば, さらに G_0 の境界が閉じていけば, μ の台は端点集合に含まれる。

定理 22

- (1) $1 \in \mathcal{O}$ だが G 可換なら G_0 は単体である。
 (2) τ が大きくて, G_0 キ ϕ なら, G_0 は単体である。

定理 23

- (1) $\mathcal{O}$ が可分, $\varphi \in G_0$ が G 可換なら, $E^\circ \pi_\varphi(\mathcal{O}) E^\circ$ で生成される可分可換 C^* 環に関する状態 φ の端点分解 $\varphi = \int x d\mu(x)$ により, $\varphi \in G_0$ における端点分解

$$\varphi(A) = \int x (E^\circ A E^\circ) d\mu(x)$$

が与えられる。

- (2) $1 \in \mathcal{O}$, τ が G 可換, $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathcal{O}$ が可附番個の C^* 環で, $\bigcup \mathcal{O}_\alpha$ が $\mathcal{O}$ で稠密, $\mathcal{I}_\alpha$ が $\mathcal{O}_\alpha$ の可分両側イデアル, F_α は $\varphi \in G$ のうち $\varphi|_{\mathcal{I}_\alpha}$ がノルム 1 のものの全体, $F = \bigcap F_\alpha$, $F^\circ = F \cap G_0$ とする。このとき積分分解

$$\varphi(A) = \int x(A) d\mu(x)$$

において, μ の台は G_0 の端点と F の共通部分に含まれる。

[第 2 段はこの形で具体的な応用例がある。]

注意 $\delta_\varphi \leq \mu$ をみたす極大測度 μ は

$$\mu(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n) = (\Omega_\varphi, E^\circ \pi_\varphi(A_1) E^\circ \cdots E^\circ \pi_\varphi(A_n) E^\circ \Omega_\varphi)$$

で決定される。ただし $\hat{A}$ は G_0 上の関数 $\hat{A}(\psi) \equiv \psi(A)$ であり, $\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n$ は n 個の関数 $\hat{A}_j(\psi)$ の積である。

定理24 G_0 が単体で、その端点集合が閉じているためには、ある可換 C^* 環 B と、 G_0 から B への写像 ζ で次の性質をみたすものの存在が必要十分である。 ζ は線形、正、 $\tau(G)$ 不変、 $\zeta(1)=1$ 、 $\zeta(\sigma)$ はノルムで σ の中で稠密、 $\psi \in G(B)$ から $\psi \circ \zeta \in G_0$ への写像が G_0 の上への写像である。ただし、 $G(B)$ は B の状態全体。このとき B は同型対応を除いて一意的。

注意 G として σ のユニタリ作用素全体、 τ として内部自己同型をとると、 τ は小さくて、 G_0 は規格化されたトレース全体になる。このときの分解はファクタートレースへの分解である。

3.3 部分群に関する分解と弱 mixing 性

定理25 $\varphi \in G_0$ が M 可換 α とし、 φ に対する次の条件は同値である。

$$(1) \dim E^F = 1 \quad (E^F \text{ は §1.2 に定義}).$$

$$(2) M \{ |\varphi(A^* \tau_g A) - |\varphi(A)|^2| \} = 0 \quad (\forall A \in \sigma).$$

$$(3) M \{ |(\varpi_1, \pi_\varphi(\tau_g A) \varpi_2) - \varphi(A)(\varpi_1, \varpi_2)| \} = 0 \quad (\forall A \in \sigma, \varpi_1, \varpi_2 \in H).$$

このような状態を 弱 mixing 状態 という。

定理26 $\varphi \in G_0$ が M 可換でエルゴード状態とする、

$$M_{ab}^\varphi(A) \equiv M_{f^*}(A), \quad f(g) = (a, U^\varphi(g)b)$$

$$a, b \in H^\sigma, \quad A \in \mathcal{A}$$

とおくと,

$$U_\varphi(g) M_{a,b}^\sigma(A) U_\varphi(g)^{-1} = M_{a',b}^\sigma(A), \quad a' = U^\sigma(g)a$$

$$M_{a,b}^\sigma(A) \Omega_\varphi \subset H^\sigma \otimes H'^\sigma$$

定理 27 T が弱漸近可換, G が非コンパクト, (π, U) が共変表現, N は U に含まれるすべての有限次元表現 U^σ に対し $U^\sigma(g) = 1$ となる g の作る G の部分群, $\mathcal{G} = G/N$ がコンパクトまたは連結とする. このとき $E^\pi(A) E^F(A \in \mathcal{A})$ は可換である.

定義 T が弱漸近可換, $\varphi \in \mathcal{G}_0$ がエルゴード状態, (π_φ, U_φ) に関する前定理の $N, \mathcal{G}$ を $N_\varphi, \mathcal{G}_\varphi$ と書く.

- (1) φ が E_I 状態とは, 定理 25 の条件がみたされているとき. すなわち $N_\varphi = G$ のとき.
- (2) φ が E_{II} 状態とは $N_\varphi \neq G$ で, $\mathcal{G}_\varphi$ がコンパクトのとき.
- (3) φ が E_{III} 状態とは $\mathcal{G}_\varphi$ が非コンパクトのとき.

定理 28 位相群 G の閉不変部分群 H に対し G/H がコンパクトで G 不変測度 dg をしつものとする. $\int_{G/H} dg = 1$ とする. さらに T が連続で, $\varphi \in \mathcal{G}_0$ がエルゴード状態とする. そのとき $\mathcal{A}$ の H 不変状態全体 $\mathcal{G}_0^H$ の端点集合の中に台をもつ測度 μ で $\mu \geq \delta_\varphi$ となるものが存在する. さらに $\mathcal{G}_0^H$ の端点 $\tilde{\varphi}_H$ が

存在して,

$$\mu(\psi) = \int_{G/H} dg \psi(\tau_g^* \tilde{\varphi}_H) \quad (\forall \psi \in C(G_o^H))$$

特に,

$$\varphi(A) = \int_{G/H} dg \tilde{\varphi}_H(\tau_g^{-1} A) \quad (\forall A \in \sigma)$$

τ が漸近可換ならこの分解は一意的で, $\tilde{\varphi}_H$ は τ_g^* での変換を除いて一意的に定まる。

φ が E_I 状態なら, $\tilde{\varphi}_H = \varphi$, φ が E_{II} 状態のとき, $H = N_\varphi$ にとれば, $\tilde{\varphi}_H$ は N_φ について E_I 状態であり, 任意の H については

$$\tilde{\varphi}_H(A) = \int_{H/(H \cap N_\varphi)} dg \tilde{\varphi}_{N_\varphi}(\tau_g^{-1} A)$$

定理 29 (スペクトルの性質)

(1) τ が M 可換で $\varphi \in G_o$ がエルゴード状態のとき, $U^\sigma, U^{\sigma'}$ が U_φ に含まれていれば $U^\sigma \otimes U^{\sigma'}$ は U と disjoint ではない。また U^σ も U に含まれる。(示は σ に複素共転な表現)

(2) 定理 28 の場合, φ が E_{II} 状態なら E^F における G の表現は $\mathcal{H}_\varphi$ の正則表現である。

注意 $E^F H_\varphi = \{\psi \in H_\varphi, U_g \psi = \psi \quad (\forall g \in N_\varphi)\}$ (φ は E_{II} 状態)

3.4 概同期状態

$\mathcal{B}$: バーナッハ空間

$\mathcal{G}$: B の *isometry* の作るある群

$AP(B)$: 概周期元の全体, すなわち $x \in B$ で $\{gx, g \in \mathcal{G}\}$

がノルム位相で条件的コンパクトなもの全体,

(i.e. $\overline{\mathcal{G}x}$ が B でコンパクト,) B の G 不変閉部分空間

$B = H$ (ヒルベルト空間)

$$\Psi \in AP(H) \iff (\Psi, U(g)\Psi) \in AP(\mathcal{G}) (\equiv AP(\mathcal{C}(\mathcal{G})))$$

$$\iff (\Psi, U(g)\Psi) \in AP(\mathcal{G})$$

$$\iff \Psi \in E^F H$$

$B = \mathcal{U}^*$, $\mathcal{G} = \tau(G)^*$ のとき $\mathcal{G} \cap AP(\mathcal{U}^*)$ の元を 概周期状態 という。

定理30 G が局所コンパクト可換群, τ が弱漸近可換, φ を概周期状態とすると, $\mathcal{G}$ 上の測度のうち $\mu' = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{\varphi_i}$, $N > \infty$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$, $\sum \alpha_i \varphi_i = \varphi$, φ_i は概周期的, のような μ' で弱*位相で近似できる測度には, 一意的に極大測度 μ_φ が存在する。

§4 その他

定理31 $\varphi \in \mathcal{G}_0$ が大きくて, $K \equiv \pi_\varphi(\mathcal{U})$ がファクターとする。このとき次のいずれかが成立する。

- (1) R は III 型 $\iff R'$ が有限型でない。
- (2) R が有限型 $\iff \varphi$ がトレースを与える。
 (このとき *coupling* は 1)
- (3) R が I_∞ または II_∞ 型 $\iff R'$ が有限型で φ はトレースでない。

$G = R$ の場合, ある解析関数 $F_{AB}(Z)$ で $\varphi(A\tau_t B) = F(t)$,
 $\varphi((\tau_t B), A) = F(t + i\beta)$ (β は定数) となるものが, 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し存在するような $\varphi \in G_0$ は, KMS 条件 をみたすという。このような φ についていくつかの事実が知られている。また $U_\varphi(t) = e^{iHt}$ と書いたときの H が下に有界のような表現は, 上記の $\beta \rightarrow \infty$ の極限とも考えられ, それについても特殊な性質が知られている。 $\beta = 0$ ならトレース状態である。

文 献

S. Doplicher, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math.

Phys. 3 (1966), 1-28.

D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 133-150.

D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966),
151-180.

D. Ruelle and D. W. Robinson, Ann. Inst. H. Poincaré,
"Extremal Invariant States".

O. E. Lanford and D. Ruelle, J. M. P. 8 (1967), 1460-1463.

E. Størmer, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.

S. Doplicher, R. V. Kadison, D. Kastler and D. W. Robinson,
Commun. Math. Phys. 6 (1967), 101-120.

S. Doplicher and D. Kastler, Commun. Math. Phys. 7 (1968),
1-20.

D. Ruelle, Almost periodic states on C*-algebras.

E. Størmer, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 194-204.

N. M. Hugenholtz, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 189-193.