

2 次方程式に対する Gauss-Seidel 型 Durand-Kerner 法

龍谷大学 理工学部 山岸 義和 (Yamagishi Yoshikazu)

一変数多項式 $p(x)$ の次数を d とするとき、方程式 $p(x) = 0$ に対する Durand-Kerner 法は、 $d+1$ -項の漸化式として次のように定義される：

$$x_{n+d} = x_n - \frac{p(x_n)}{\prod_{j=1}^d (x_n - x_{n+j})}.$$

$\gamma_1, \dots, \gamma_d$ を $p(x) = 0$ の distinct roots とするとき、 $x_{md+j} = \gamma_j$, $1 \leq j \leq d$ は漸化式の安定な周期解であることが知られている [1]。

ここでは、 $d=2$ の場合の 3-項間の漸化式を、平面の有理写像

$$f : (x, y) \mapsto (y, x - p(x)/(x - y))$$

として考えたとき、その力学系が簡単に記述されることを報告する。

1 重根を持つ場合

てきとうな平行移動により、 $p(x) = x^2$ としてよい。この場合は、変数変換 $(x, y) = (\xi, \xi/\eta)$ により、 f は写像

$$F : (\xi, \eta) \mapsto (\xi/\eta, (1 - \eta)/\eta)$$

と共役である。ここで相空間は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ として扱うのが便利である。第二成分のモビウス変換の固定点は、二次方程式

$$\eta^2 + \eta - 1 = 0$$

の根であり、 $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2$ が不安定、 $\beta = (-1 - \sqrt{5})/2$ が安定である。 $\beta < -1 < 0 < \alpha < 1$ に注意すれば、 F の安定な固定点は $(0, \beta)$ で、その収束領域の境界は $\eta - \alpha \neq 0$ および $\xi = \infty$ である。ほかに固定点は三点あって、 $(0, \alpha)$ が不安定点、 (∞, α) , (∞, β) が鞍点である。

なお、 F は双有理写像であり、不定点 $(0, 0)$, (∞, ∞) をもつことに注意する。

2 単根の場合

てきとうな平行移動により、 $p(x) = x^2 - a^2$ としてよい。ただし a は定数。ここでも相空間を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とすると、変数変換

$$(x, y) = \left(a \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, a \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right)$$

によって f は写像

$$F : (\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi/\eta)$$

と共役である。ここで $\xi = e^\theta$, $\eta = e^\varphi$ とおくと、一次変換

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\varphi, \theta - \varphi)$$

を得る。この固有多項式

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

は、固有値 $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (-1 - \sqrt{5})/2$ をもつ。固有ベクトルはそれぞれ $(1, \alpha)$, $(1, \beta)$ である。

そこであらためて、 θ, φ を実部と虚部に分けて、 $(\xi, \eta) = (re^{i\theta}, se^{i\varphi})$, $(0 \leq r, s \leq \infty, \theta, \varphi \in \mathbb{R})$ とおく。 $s = r^\alpha$ のとき軌道はトーラス $(\xi, \eta) = (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$, $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に近づき、それ以外の場合は二周期軌道 $(0, \infty) \leftrightarrow (\infty, 0)$ に収束することがわかる。

なお、 F は双有理写像であり、不定点 $(0, 0)$, (∞, ∞) をもつが、それらの軌道は

$$(0, 0) \mapsto \xi = 0 \text{ (直線)} \mapsto \eta = 0 \text{ (直線)} \mapsto (0, \infty)$$

$$(\infty, \infty) \mapsto \xi = \infty \text{ (直線)} \mapsto \eta = \infty \text{ (直線)} \mapsto (\infty, 0)$$

と、周期軌道に落ちる。

参考文献

- [1] T. Yamamoto, S. Kanno, and L. Atanassova, Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method, in: J. Herzberger, ed., Topics in Validated Computations (North-Holland, Amsterdam, 1994) 27–53.