

特殊 G 多標体上の不変ベクトル場

阪市大 理 松 永 弘 道

§1. 序

n 次元のコンパクトリー群は n 個の G 不変なベクトル場をもつ。この事実から一般に G 多標体上に不変なベクトル場であって特異点のないもの、うち一次独立なものが何個存在するかという問題が生いてくる。筆者は現在迄にこの問題を解決するための一般的方法、特に位相幾何学的方法を得るに至っていないが、いくつかの例、特に Brieskorn-Hirzebruch の $O(n)$ 多標体についてこの問題を考えてみた。§2 においては後で用いる4つの基本事項と簡単な例をとりあつかい、§3 では $W^{2n-1}(d)$ 上には $O(n)$ 不変な1-ベクトル場はなくなり、不変な2-ベクトル場は存在しないことを示す。

§2. 基本性質と例

G をコンパクトリー群、 M をコンパクトな G 多標体とする

定義 M 上のベクトル場 X が G 不変であるとは M のすべての点 p と G のすべての元 g に対して

$$(dg)_p X_p = X_{gp}$$

がなりたつことをいう。

基本性質 1. G 多様体 M が特異点のない G 不変なベクトル場をもつための必要十分条件は M 上に G 不変なリーマン計量を与えられたとき, M の接ベクトルバンドルが G による不変積ベクトルバンドルを直和成分としてもつことである。

証明は G 作用のない通常の場合と同様にできる。

基本性質 2. X をリーマン多様体 M 上の定常ベクトル場とする。このとき X がキリングベクトル場であるための必要十分条件はすべての実数 t に対して $\text{Exp } tX$ が M の等距離変換であることである。「多様体入門」(松島)

基本性質 3. $\{y_t; t \in \mathbb{R}\}$ を G 多様体 M の 1-パラメーター変換群とする。このとき $g \cdot y_t = y_t \cdot g$ がすべての $g \in G$, $t \in \mathbb{R}$ に対してなりたつならば $\{y_t, t \in \mathbb{R}\}$ から得られるベクトル場は G 不変である。(証明はほとんど自明)

基本性質 4. 1-パラメーター変換群 $\{y_t; t \in \mathbb{R}\}$ に対して

適当な正数 γ があって t の絶対値 $|t| < \gamma$ のとき φ_t が自由に作用するならば $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ から得られるベクトル場 X は特異点をもたない。(証明はほとんど自明)

次にいくつかの簡単な例についてみる。

G の次元を n とする。 M を可微分多様体とするとき、 M 上の可微分な G 主バンドルの全空間 P は n 次元の一次独立な不変ベクトル場をもつことは見易い。

例 1. $(n+2)$ 次元複素空間 $\mathbb{C}^{n+2}$ の点 $(z_1, \dots, z_{n+2})$ であって方程式 $z_1^p + z_2^q + z_3^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 0$; $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{n+2}|^2 = 1$ をみたす点の全体は $(2n+1)$ 次元可微分多様体となる。これを $K_{p,q}^{2n+1}$ で表わすことにする。

n 次元直交群 $O(n)$ は包含関係 $O(n) \simeq I_2 \times O(n) \subset I_2 \times U(n) \subset U(n+2)$ を通じて $K_{p,q}^{2n+1}$ に作用する。

$S^1 \simeq U(1)$ の元 λ に対して

$$\lambda(z_1, \dots, z_{n+2}) = (\lambda^{2q} z_1, \lambda^{2p} z_2, \lambda^{pq} z_3, \dots, \lambda^{pq} z_{n+2})$$

と定めると S^1 は $K_{p,q}^{2n+1}$ の 1-パラメータ変換群となり性質 3, 4 により特異点のない $O(n)$ 不変ベクトル場を定める。 $\mathfrak{g}_n$ を $O(n)$ の恒等表現とすると $K_{p,q}^{2n+1}$ の接ベクトルバンドルの固定点全体のなす多様体 S^1 上への制限は次の様になる。

$$T(K_{P, g}^{2n+1})|S^1 = \theta^1 \oplus 2(P_n),$$

よ、 θ^1 は S^1 上の積 G ベクトルバンドル, (P_n) は $S^1 \times P_n$ である。従って $K_{P, g}^{2n+1}$ は $O(n)$ 不変な 2-ベクトル場をもたない。

例 2. $(n+1)$ 次元複素空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の点 $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ であって方程式 $z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0$, $|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 2$ をみたす点の全体は $(2n-1)$ 次元可微分多様体となる。これは Brieskorn - Hirzebruch によって研究された多様体であるが $O(n)$ は包含関係 $O(n) \simeq I_1 \times O(n) \subset I_1 \times U(n) \subset U(n+1)$ によってこの多様体 $W^{2n-1}(d)$ に作用する。

S^1 の元 $\exp 2\pi i t$ に対して

$$\begin{aligned} & (\exp 2\pi i t)(z_0, z_1, \dots, z_n) \\ &= ((\exp 2\pi i t)z_0, (\exp d\pi i t)z_1, \dots, (\exp d\pi i t)z_n) \end{aligned}$$

と定めると S^1 は $W^{2n-1}(d)$ の 1-パラメータ変換群となり例 1 と同様にして, $W^{2n-1}(d)$ 上に $O(n) \times S^1$ 不変なリーマン計量をえらぶとき特異点のない $O(n)$ 不変なキリングベクトル場が存在することが示される。

§ 3. $W^{2n-1}(d)$ 上に不変 2-ベクトル場が存在しないこと
くわしくは論文に出る予定であるので概要をのべることにする。

M を特殊 G 多様体 [1], [2] であって次の条件をみたすものとする。

(条件) M は (H) を主軌道型, (K) を特異軌道型とする 2 つの軌道型 $((H), (K))$ をもち, H, K の正規化群は次の形に分解される: $N(H) = \Gamma(H) \times H$, $N(K) = \Gamma(K) \times K$, $\Gamma(K) < \Gamma(H)$ 。

M 及びその軌道空間への標準写像を $\pi: M \rightarrow \pi(M)$ で表す。このとき次の 2 つのファイバーバンドルが得られる。

$$(1) \mathcal{F}_H: G/H \rightarrow M(H) \rightarrow \pi(M(H)),$$

$$(2) \mathcal{F}_K: G/K \rightarrow M(K) \rightarrow \pi(M(K)),$$

ここで $M(K) = \{x \in M; G_x \text{ が } K \text{ と共役}\}$, $M(H)$ も同様のものである。

M の接ベクトルバンドルをそれぞれ $M(H)$, $M(K)$ に制限するとその構造は見易くなることに注意する。

ゆえに $M(K) \subset M$ による $M(K)$ の同変管状近傍を N とする。

$M - \text{int } N = M_1$, $\pi(M_1) = M_1'$, $\pi(M(K)) = M(K)'$ とおき $\text{Vect}_K(M(K)')$ を $M(K)'$ 上の K -ベクトルバンドルとし、 $\text{Vect}_H(M_1')$ も同様のものとする。このとき次の様なオブジェクトを考える。

$$\mathcal{D} = \{ (F', E') \in \text{Vect}_K(M(K)') \times \text{Vect}_H(M_1'); \\ \alpha_H: p'^* r^* F' \rightarrow \partial E' \},$$

$\rightarrow K$ γ^* は包含 $H \subset K$ から得られるベクトルバンドルの
 準同型すなわち制限準同型である。 $p': \pi(\partial N) \xrightarrow{\cong} \pi(M(K))$
 は射影 $p: \partial N \rightarrow M(K)$ から得られるもので微分同相である。
 このとき D の 2 つの元 (F', E', α_H) と $(\bar{F}', \bar{E}', \bar{\alpha}_H)$ とが
 同値であることと次の様な可換図式が存在することであると
 定める。

$$\begin{array}{ccccc}
 F' & \longrightarrow & p'^* \gamma^* F' & \longrightarrow & \partial E' \subset E' \\
 \downarrow p_K & & \downarrow p_{H,K} & & \downarrow \varphi_H \quad \downarrow \varphi_H \\
 \bar{F}' & \longrightarrow & p'^* \gamma^* \bar{F}' & \longrightarrow & \partial \bar{E}' \subset \bar{E}'
 \end{array}$$

$\rightarrow K$ p_K は K ベクトルバンドルの同型写像, $p_{H,K}$ は
 その H ベクトルバンドルとみる制限, φ_H は H ベクトルバン
 ドルの同型である。 $\text{Vect}_G(M)$ を M 上の G ベクトルバン
 ドルの同値表のなす半群とすると次の半群としての同型が得ら
 れる。

$$\text{定理 [2]} \quad \text{Vect}_G(M) \xrightarrow{\pi^*} D / (\sim)$$

D の各元をデータと呼ぶことにすると, M 上の接ベクト
 ルバンドルのデータは

$$\{ T(\pi(M(K))) \oplus (L_K) \oplus \pi^* V, T(\pi(M(H)), 1) \oplus (L_H), \alpha_H \}$$

の形になる。ここに (L_K) は K の等変性表現による $\pi(M(K))$
 上の積バンドルで, (L_H) も同様, V はうめ: $M(K) \subset M$

の接ベクトルバンドルである。

M が $W^{2n+1}(d)$ の場合はこのデータは次の標となる。

$$\{ \theta^1 \oplus 2(p_{n-1}), 3\theta^1 \oplus 2(p_{n-2}); \alpha_{O(n-2)} \},$$

従って M の接ベクトルバンドルは $O(n)$ 不変なリーマン計量に因りて積バンドル $M(k) \times R^1$ の 2 倍を直和成分としてもつ得ない。この標にして次の定理が得られる。

定理 [2] $O(n)$ 多標体 $W^{2n+1}(d)$ 上には $O(n)$ -不変な 1-ベクトル場が存在するが、2-ベクトル場は存在しない。

引用文献

- [1] Hirzebruch - Mayer : $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten, 57, Springer Verlag 1968.
- [2] H. Matsunaga : KG -groups and invariant vector fields on special G -manifolds, to appear

追記

上の定理 [2] において $n \geq 3$ とする。 $n = d = 2$ の場合には有限大の内田氏が反例を示して下さった。 $n = 2$ の場合は $O(0)$

は意味がなく、本文中の証明は適用できない。