

Brauer 対応とブロックコホモロジー環について

崇城大学 河合浩明 (Hiroaki Kawai)
Sojo University

1. 序論

G を有限群. k を標数 $p > 0$ の体, ブロックと関係する結果では 1 の $|G|$ 乗根を含むとする. A, B を symmetric k -algebra, $Z(A)$ を A の中心とする. X を A - B -両側加群からなる bounded complex で片側加群として ${}_A X, X_B$ は射影的とする. X の k -dual を X^* で表す. Linckelmann は [3] において以下の 3 つの概念を導入した.

(1) Hochschild コホモロジー の間の transfer associated with X と呼ばれる graded な線形写像 $t_X: HH^*(B) \rightarrow HH^*(A)$ が定義される. 定義はここでは略すが, X として $(kG)_H, {}_H(kG), x(kH)$ と取ることにより次の可換図式が成り立っている (ここで H は G の部分群, $(kG)_H$ は kG - kH -両側加群, x は G の元).

$$\begin{array}{ccccc} H^n(H, k) & \xrightarrow{\text{tr}_{H,G}} & H^n(G, k) & \xrightarrow{\text{res}_{G,H}} & H^n(H, k) & \xrightarrow{c_x} & H^n({}^x H, k) \\ \delta_H \downarrow & & \delta_G \downarrow & & \delta_H \downarrow & & \delta_{({}^x H)} \downarrow \\ HH^n(kH) & \xrightarrow{t_{(kG)_H}} & HH^n(kG) & \xrightarrow{t_{H(kG)}} & HH^n(kH) & \xrightarrow{t_{x(kH)}} & HH^n(k({}^x H)) \end{array}$$

ここで, δ_G, δ_H は群のコホモロジーから Hochschild コホモロジー への diagonal embedding ([3] 参照) であり, $\text{tr}_{H,G}, \text{res}_{G,H}, c_x$ は群のコホモロジーにおける transfer, restriction, conjugation である (inflation に対応する X は解らない).

(2) $HH^n(A)$ の元を同型 $HH^n(A) = \text{Ext}_{A \otimes A^o}^n(A, A) \cong \text{Hom}_{K(A \otimes A^o)}(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_A[n])$ のもとで対応する chain map のホモトピー類とみなす (ここで, $\mathcal{P}_A$ は $A \otimes A^o$ -加群としての A の projective resolution, $[n]$ は次数の shift). このとき, $[\zeta] \in HH^*(A), [\tau] \in HH^*(B)$ に対して, 次の図式が任意の n においてホモトピー可換となるときの $[\zeta]$ を X -stable と呼ぶ ($[\tau]$ は X^* -stable). また, X -stable な元全体は $HH^*(A)$ の部分環となり, それを $HH_X^*(A)$ と記す.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_A \otimes_A X & \xrightarrow{\simeq} & X \otimes_B \mathcal{P}_B \\ \zeta_n \otimes \text{Id}_X \downarrow & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \tau_n \\ \mathcal{P}_A[n] \otimes_A X & \xrightarrow{\simeq} & X \otimes_B \mathcal{P}_B[n], \end{array}$$

ここで、図式の上下のホモトピー同値は同型 $A \otimes_A X \cong X \otimes_B B$ の X の projective resolution $\mathcal{P}_A \otimes_A X, X \otimes_B \mathcal{P}_B$ への lift. ζ_n, τ_n は $[\zeta], [\tau]$ の次数 n の成分を表す.

(3) S を G のシロー p -部分群とする. 次のことはよく知られている.

$$H^*(G, k) \cong \{ [\zeta] \in H^*(S, k) \mid c_x \circ \text{res}_{S, Q}[\zeta] = \text{res}_{S, xQ}[\zeta] \text{ for } \forall Q \leq S, \forall x \in G : \\ {}^x Q \leq S \}$$

S をブロック b の不足群 D に, 包含関係を b -Brauer pairs の包含関係に置き換えて, b の block cohomology algebra は次のように定義される.

$$H^*(G, b) = \{ [\zeta] \in H^*(D, k) \mid c_x \circ \text{res}_{D, Q}[\zeta] = \text{res}_{D, xQ}[\zeta] \text{ for } \forall Q \leq D, \forall x \in G : \\ {}^x(Q, e_Q) \leq (D, e_D) \}$$

次に, 後の節に関係する Linckelmann による結果をまとめておく.

定理 1.1. ([3], [4]) 上の notation のもとで次が成り立つ.

(i) $t_X(1_B)$ を π_X とおく (t_X は $Z(A) \cong HH^0(A), Z(B) \cong HH^0(B)$ をとおして $Z(B)$ から $Z(A)$ への写像とみる). $\pi_X \in Z(A), \pi_{X^*} \in Z(B)$ がともに可逆のとき,

$$T_X = \pi_X^{-1} t_X : HH_{X^*}^*(B) \cong HH_X^*(A) \text{ as } k\text{-algebras.}$$

ここで, 元の対応は X -stable によって定まる元の対応によって与えられる, すなわち, (2) の notation を用いると $T_X([\tau]) = [\zeta]$.

(ii) diagonal embedding $\delta_G : H^*(G, k) \rightarrow HH^*(kG)$ のブロック版として次が成り立つ. i を block b の source idempotent ([2] 参照) とする. このとき $\pi_{kGi}, \pi_{(kGi)^*}$ は可逆となり,

$$T_{kGi} \circ \delta_D : H^*(G, b) \subseteq H^*(D, k) \rightarrow HH_{(kGi)^*}^*(kD) \rightarrow HH_{kGi}^*(kGb)$$

は中への 1 対 1 の環準同型となる.

(iii) G, H を有限群. b, c を共通の不足群 D をもつ G, H のブロックで, D の任意の部分群 Q に対し $E_G((Q, e_Q), (D, e_D)) = E_H((Q, f_Q), (D, f_D))$ とする (ここで, $E_G((Q, e_Q), (D, e_D)) = \{ \varphi_x : Q \rightarrow D \mid \varphi_x \text{ は } x\text{-共役写像 for } x \in G \text{ s.t. } {}^x(Q, e_Q) \leq (D, e_D) \}$, ゆえに b, c の Brauer 圏は同値). さらに, X が kGb, kHc の splendid 同値, または森田型の stable 同値を導くとする (ともに Linckelmann の意味; [2], [4]). このとき次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, b) & \xrightarrow{T_{kGi} \circ \delta_D} & HH_{X^*}^*(kGb) \\ \parallel & & \cong \downarrow T_X \\ H^*(H, c) & \xrightarrow{T_{kHj} \circ \delta_D} & HH_X^*(kHc) \end{array}$$

ここで, i, j は b, c の source idempotents.

2. Brauer 対応と ブロックコホモロジー

b を不足群 D をもつ G のブロック, c を $N = N_G(D)$ における b の Brauer 対応子とする. 次の結果がこの報告における以後の考察の動機づけとなった.

定理 2.1. (佐々木) $H^*(G, b) \subseteq H^*(N, c)$

そこで Brauer 対応において定理 1.1 (iii) に類似する結果が得られないかが問題になる.

問題 次の可換図式が得られるための X は何か, また条件は何か.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, b) & \xrightarrow{T_{kGi} \circ \delta_D} & HH_X^*(kGb) \\ \downarrow \iota & & \cong \downarrow T_X \\ H^*(N, c) & \xrightarrow{T_{kNj} \circ \delta_D} & HH_X^*(kNc) \end{array}$$

ここで, ι は包含写像, i, j は b, c の source idempotents.

X として $ckGb$ を取る. このとき, より一般的な Brauer 対応において次のことが成り立つ.

命題 2.2. b を不足群 D をもつ G のブロック. H を $DC_G(D) \leq H \leq N_G(D)$ となる部分群, c を $c^G = b$ となる H のブロックとする. このとき,

$$T_X: HH_X^*(kGb) \cong HH_X^*(kHc) \quad \text{as } k\text{-algebras.}$$

定理 1.1 (i) より π_X と π_{X^*} が可逆となることを示せばよい. まず, transfer t_X の一般論を用意する.

補題 2.3. (i) e を symmetric k -algebra A の central idempotent とする. k -algebra としての自然な同型 $HH^*(A) \cong HH^*(Ae) \oplus HH^*(A(1-e))$ において, $t_{Ae}: HH^*(Ae) \rightarrow HH^*(A)$ と $t_{eA}: HH^*(A) \rightarrow HH^*(Ae)$ は, この同型のもとで, それぞれ embedding と projection を与える.

(ii) H を G の部分群とする. $Z(kG) \cong HH^0(kG)$, $Z(kH) \cong HH^0(kH)$ をとおいて次数 0 における $t_{H(kG)}$, $t_{(kG)_H}$ を $Z(kG)$ と $Z(kH)$ の間の写像とみなす. このとき,

$$t_{H(kG)}(\alpha) = \eta_H(\alpha) \quad \text{for } \alpha \in Z(kG)$$

ここで $\eta_H: kG \rightarrow kH$ は $\eta_H(x) = x$ for $x \in H$, $\eta_H(x) = 0$ for $x \in G - H$. 特に, $H = C_G(Q)$, Q は p -部分群, のときは $t_{H(kG)}$ は Brauer 準同型のことである. 一方,

$$t_{(kG)_H}(\beta) = \sum_{x \in [G/H]} x\beta x^{-1} = \text{Tr}_H^G(\beta) \quad \text{for } \beta \in Z(kH).$$

となる.

補題 2.3 (ii) と同様な同一視のもと, 補題 2.3 と [3, Proposition 2.11] より,

$$\begin{aligned} \pi_X &= t_{ckGb}(b) = t_{ckH} \otimes_{kH} t_H(kG) \otimes_{kG} t_{kGb}(b) \\ &= t_{ckH} \circ t_{H(kG)} \circ t_{kGb}(b) \\ &= c\eta_H(b) \end{aligned}$$

同様にして, $\pi_{X^*} = b\text{Tr}_H^G(c)$ が得られる. ところで,

$$c^G = b \Leftrightarrow c\eta_H(b) \text{ が可逆} \quad (\text{e.g. [5, V, 補題 3.9] 参照}).$$

さらに, b と c の不足群が同じであるから [1, Corollary 2.2.3] より, $b\text{Tr}_H^G(c)$ も可逆となる. よって, 定理 1.1 (i) より命題 2.2 が証明される.

先の問題において $X = ckGb$ としたとき, 問題に対する一つの結果として次のことが示される.

定理 2.4. $X = ckGb$ とする. 次の (i), (ii) は同値.

$$(i) \quad \delta_D(H^*(G, b)) \subseteq HH_{jkGb}^*(kD) = HH_{jkGi}^*(kD).$$

$$(jkGb\text{-stable for } kD - kGb\text{-加群 } jkGb \Leftrightarrow jkGi\text{-stable for } kD - kD\text{-加群 } jkGi)$$

(ii) 次の可換図式が得られる, すなわち, $T_{kGi} \circ \delta_D(H^*(G, b)) \subseteq HH_X^*(kGb)$ と $T_X \circ T_{kGi} \circ \delta_D = T_{kNj} \circ \delta_D \circ \iota$ が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, b) & \xrightarrow{T_{kGi} \circ \delta_D} & HH_X^*(kGb) \\ \downarrow \iota & & \cong \downarrow T_X \\ H^*(N, c) & \xrightarrow{T_{kNj} \circ \delta_D} & HH_X^*(kNc) \end{array}$$

ここで, ι は包含写像, i, j は b, c の source idempotents.

証明は他所にゆずるが, (i) $\Rightarrow$ (ii) は次の可換図式が得られることによる.

$$\begin{array}{ccc} HH_{jkGb}^*(kD) & \xrightarrow{T_{kGi}} & HH_X^*(kGb) \\ \downarrow \iota & & \cong \downarrow T_X \\ HH_{jkNc}^*(kD) & \xrightarrow{T_{kNj}} & HH_X^*(kNc) \end{array}$$

次の場合に定理 2.4 (ii) の可換図式が得られる, すなわち, $\delta_D(H^*(G, b)) \subseteq HH_{jkGi}^*(kD)$ が成り立つ.

例 2.5. (i) b が主ブロック.

(ii) $E_G((Q, e_Q), (D, e_D)) = E_H((Q, f_Q), (D, f_D))$ for any $Q \leq D$ (定理 1.1 (iii) 参照). さらに, $ckGb$ の任意の直既約因子が $KHj \otimes_{kQ} ikG$ for some $Q \leq D$ の直既約因子と同型となる場合 (この条件は splendid 同値, または森田型の stable 同値における, いわゆる, Linckelmann の条件, [2] 又は [4] 参照).

3. X-stable

最後に X -stable に関する結果で [3] に記されていないことで重要と思われることを記しておく.

補題 3.1. (i) $A - A$ -両側加群としての A について, $HH_A^*(A) = HH^*(A)$.

(ii) X, Y を 1 節のような bounden complex とする. X と Y がホモトピー同値のとき, $HH_X^*(A) = HH_Y^*(A)$.

k -algebras A, B が derived 同値のとき, それらの Hochschild コホモロジー環が同型になることは Rickard によって示されているが, 同型における元の対応は知られていないと思う. block algebra の場合は以下のことが解る. A, B が indecomposable, non-simple な symmetric k -algebra とする. X が A と B の derived 同値を導くとき [4, Proposition 5.2] より π_X, π_{X^*} が可逆. そこで補題 3.1, [3, Corollary 3.8] と定理 1.1 (i) より次を得る.

系 3.2. $T_X : HH^*(B) = HH_{X^*}^*(B) \cong HH_X^*(A) = HH^*(A)$ as k -algebras, ここで元の対応は X -stable によって定まる元の対応によって与えられる.

参考文献

- [1] M. Broué: *Remarks on blocks and subgroups*, J. Algebra **51**, No. 1 (1978), 228–232.
- [2] 河合浩明: *Varieties for modules over a block of a finite group I, II*, 数理解析研究所講究録 **1251** (2002), 46–56.
- [3] M. Linckelmann: *Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups*, Algebras and Representation Theory **2** (1999), 107–135.
- [4] M. Linckelmann: *Varieties in block theory*, J. Algebra **215** (1999), 460–480.
- [5] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.