

ヘッケ・クリフォード環と $D_l^{(2)}$ 型柏原結晶構造

(Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type $D_l^{(2)}$)

京都大学・数理解析研究所 土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*†

Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University

1 はじめに

これは論文 [Tsu] の解説である。いわゆる“ヘッケ環の表現論”の専門家ではなく、広い意味で表現論を研究している方々を念頭に書いた¹ので、詳細は [Tsu] を参照していただきたい。

さて“対称群のモジュラー表現論はほとんど何もわかっていない”とよく言われるが、具体的に“どのくらいわかっていないのか”を正確に把握している人は少ないのではないだろうか？もちろん何をもって“わかる”とするのかという問題があるが、とりあえず既約表現は“わかって”おかなければならないだろう。

James による対称群のモジュラー既約表現の構成について復習しよう。それによると、分割 $\lambda \vdash n$ について、 $\mathbb{Z}$ -自由加群でありかつ $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_n$ -加群である Specht 加群 S^λ と、その上の $\mathfrak{S}_n$ -不変な対称双線型形式 $\langle, \rangle_\lambda$ を構成出来る（対称群のモジュラー表現の基本的な事柄については [Jam, JK] を参照）。与えられた体 F について、これの係数拡大を $S_F^\lambda = F \otimes_{\mathbb{Z}} S^\lambda$ と書き、誘導される S_F^λ 上の $\mathfrak{S}_n$ -不変な対称双線型形式を $\langle, \rangle_{\lambda, F}$ と書く。 $D_F^\lambda = S_F^\lambda / \text{Rad}(\langle, \rangle_{\lambda, F})$ と定義すると、よく知られているように、これは絶対既約で、

$$\text{Irr}(\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n\text{-mod}) = \{S_{\mathbb{Q}}^\lambda = D_{\mathbb{Q}}^\lambda \mid \lambda \vdash n\}, \quad \text{Irr}(F_p\mathfrak{S}_n\text{-mod}) = \{D_{F_p}^\lambda \mid \lambda \vdash n \text{ は } p\text{-regular}\}$$

により、既約表現がパラメトライズされる。一方で [Dan] によれば、2008 年でも $\mathfrak{S}_{18}$ の 2-モジュラー既約表現の次元は完全にわかっていないとのことである。例えば $D_{F_2}^{(6,5,4,2,1)}$ については、

$$1757184 < \dim D_{F_2}^{(6,5,4,2,1)} < 10720710$$

ということしかわかっていないそうである。ところで、2008 年の夏に玉原で Matthew Fayers さんに [Mül] を教えてもらった。これによれば、2000 年の時点で 2-モジュラー表現については、 $\{\mathfrak{S}_n\}_{n=0}^{17}$ まで分解係数が決定されていたということになる。もちろん、既約表現についてはその次元も計算できている。まとめると、2-モジュラー既約表現の次元は 17 次の対称群までは知られているが、18 次の対称群については完全にはわかっていないと結論してもよいであろう。

2005 年ごろ Chuang-Rouquier のいわゆる $\mathfrak{sl}_2$ -categorification によって、対称群の同じ p -ウェイトの p -ブロックはすべて導来同値であることが示された [CR]。このようなモダンな技術によって、対称群に対する Broué 予想が解決される一方で、基本的な量である既約表現の次元すら満足に計算できていない、という現状は意外ではないだろうか？

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp

†The author is supported by Grant-in-Aid for JSPS Research Fellows (No. 20-5306).

¹ただし、リー環や量子群についてはまったく説明していない。それぞれ標準的な文献 [Kac, Kas] を参照していただくか、あるいはそんなものがあるのかという程度に流し読みしていただきたい。

2 Kleshchev のモジュラー分岐則

一般に既約 $\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n$ -加群 M について、その制限 $\text{Res}_{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n} M$ を“記述”できれば、帰納的に $\dim M$ が記述できる。しかし、モジュラー表現では完全可約性が一般には成立しないので、 $\text{Res}_{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n} M$ の記述も複雑になる。例えば、 $V = \text{Res}_{\mathbb{F}_2 \mathfrak{S}_7}^{\mathbb{F}_2 \mathfrak{S}_8} D_{\mathbb{F}_2}^{(5,2,1)}$ とすると、その socle series は

$$\begin{aligned} W_1 &:= \text{Soc}(V) \cong D_{\mathbb{F}_2}^{(5,2)}, \\ W_2 &:= \text{Soc}(V/W_1) \cong D_{\mathbb{F}_2}^{(5,2)} \oplus D_{\mathbb{F}_2}^{(7)}, \\ W_3 &:= \text{Soc}((V/W_1)/W_2) \cong D_{\mathbb{F}_2}^{(4,2,1)}, \\ W_4 &:= \text{Soc}(((V/W_1)/W_2)/W_3) \cong D_{\mathbb{F}_2}^{(7)}, \\ W_5 &:= \text{Soc}((((V/W_1)/W_2)/W_3)/W_4) \cong D_{\mathbb{F}_2}^{(5,2)} \end{aligned}$$

となって、組成重複度の意味では、 $V = \text{Res}_{\mathbb{F}_2 \mathfrak{S}_7}^{\mathbb{F}_2 \mathfrak{S}_8} D_{\mathbb{F}_2}^{(5,2,1)}$ は multiplicity-free にならないことがわかる。しかし、A.Kleshchev は 1994 年に次のことを証明した。

定理 2.1 ([Kle1, Kle2, Kle3, Kle4]). $p > 0$ を素数とする。

- (1) 既約 $\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n$ -加群 M について、 $\text{Soc}(\text{Res}_{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n} M)$ は multiplicity-free である ($n \geq 1$)。
- (2) λ を p -regular な分割とすると、次の $\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_{n-1}$ -加群同型が成立する。

$$\text{Soc}(\text{Res}_{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n} D_{\mathbb{F}_p}^\lambda) \cong \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{\mu \stackrel{i}{\rightarrow} \lambda} D_{\mathbb{F}_p}^\mu.$$

ここで、Kleshchev が導入した i -cogood node² の定義は行わないが、以下にクリスタルの知識を仮定した同値な定義を説明する。

さて、Lascoux-Leclerc-Thibon [LLT] は、Kleshchev の (標数 $p > 0$ における) モジュラー分岐則と量子群 $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ のクリスタル $B(\Lambda_0)$ の次のような関連に気付いた。まず Misra-Miwa [MM] にしたがって、 $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ のクリスタル $B(\Lambda_0)$ を、台集合が

$$\mathcal{P}_p \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{n \geq 0} \{\lambda \vdash n \mid \lambda \vdash n \text{ は } p\text{-regular}\}$$

となるように実現する。すなわち、 $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ -クリスタルとして

$$B(\Lambda_0) \cong (\mathcal{P}_p, \text{wt}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in I}, \{\tilde{f}_i\}_{i \in I}, \{\varepsilon_i\}_{i \in I}, \{\varphi_i\}_{i \in I})$$

と同一視する。ここで右辺の柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ などの説明はしないが、次のことは、Kleshchev の i -cogood node の定義および、Misra-Miwa の柏原作用素 $\tilde{f}_i$ の定義より直ちに従う。

系 2.2 ([LLT]). 定理 2.1 において、 $\mu \stackrel{i}{\rightarrow} \lambda$ であることと、 $\tilde{f}_i(\mu) = \lambda$ であることは同値である。

つまり、Kleshchev によるモジュラー分岐則 (定理 2.1) は、クリスタルの知識を仮定すると、次のように述べる事が出来る。なお、以下では、一般に与えられた代数の帰納系

$$A = (A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots)$$

について、 $\text{Soc}(\text{Res}_{A_{n-1}}^{A_n} M)$ のみを考えるという単純化を意図して、これに付随するモジュラー分岐グラフ $\mathbb{B}(A)$ を、次で定まる有向グラフとしている (ここで多重辺は許している)。

²前ページの右辺で $\mu \stackrel{i}{\rightarrow} \lambda$ とは、 μ に i -cogood node A が存在して (存在する場合は唯一つである)、 λ は μ に A を付け加えて得られる (p -regular な) 分割であるということの略記法である。

- 頂点集合: $\bigsqcup_{n \geq 0} \text{Irr}(A_n\text{-mod})$.
- 隣接関係: $V \in \text{Irr}(A_n\text{-mod})$ から $W \in \text{Irr}(A_{n+1}\text{-mod})$ に向かう有向辺が $\dim \text{Hom}_{A_n}(V, \text{Res}_{A_n}^{A_{n+1}} W)$ 本あり、これで規定されない頂点間には有向辺は出ていない。

定理 2.3 ([Kle1, Kle2, Kle3, Kle4]). $p > 0$ を素数とする。

- (1) 既約 $\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n$ -加群 M について、 $\text{Soc}(\text{Res}_{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n} M)$ は multiplicity-free である ($n \geq 1$)。
- (2) $\mathbb{B}(\{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n\}_{n \geq 0})$ は $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ -クリスタル $B(\Lambda_0)$ (から I -色を忘れることで定まる有向グラフ) と同型である。

ここで良く知られた、標数 0 における古典的な分岐則と比べてみるとよいであろう。

- (1) 既約 $\mathbb{Q} \mathfrak{S}_n$ -加群 M について、 $\text{Res}_{\mathbb{Q} \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathbb{Q} \mathfrak{S}_n} M$ は multiplicity-free である ($n \geq 1$)。
- (2) $\mathbb{B}(\{\mathbb{Q} \mathfrak{S}_n\}_{n \geq 0})$ は Young 束 $\mathbb{Y}$ (から定まる有向グラフ) と同型である。

今までの話をまとめると、Kleshchev によって得られた対称群のモジュラー分岐則は、標数 $p > 0$ における対称群の既約表現の制限の socle を、 p -regular partition、 i -cogood node などの組合せ論的概念を使って記述する。これは Misra-Miwa による量子群 $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ のクリスタル $B(\Lambda_0)$ の実現にも現れていたものであり、標数 $p > 0$ における対称群のモジュラー表現論と、ディンキン図形 $A_{p-1}^{(1)}$ に付随するリー理論 (Kac-Moody リー環や量子群) との関連を予見させる。実際、この関連は Drinfeld と Lusztig によって対称群とは異なる文脈で導入された A 型退化アフィン・ヘッケ環 $\mathcal{H}_n$ [Dri, Lus]、および Kleshchev によって導入された A 型退化巡回アフィン・ヘッケ環 $\mathcal{H}_n^\lambda$ を用いてかなり精密な形で述べられることが知られており、[Kle5] で注意深くまとめられたものを読むことが出来る。このことについては、ここでは次を紹介するのみに留める。

定理 2.4 ([Kle5, Theorem 9.5.1]). $\text{char } F = p > 0$ を素数とし、 λ を $A_{p-1}^{(1)}$ 型 Cartan データに付随する支配的整ウェイトとする。標数 p の代数的閉体 F 上の $\mathcal{H}_n^\lambda$ の表現論について、次が成立する。

- (1) $\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ -加群 (ここは $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ のタイプミスではない) としての同型 (これらは特に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であることに注意)

$$\bigoplus_{n \geq 0} K_0(F \mathfrak{S}_n\text{-mod})_{\mathbb{C}} \cong L(\Lambda_0)$$

が成立する (ここで $\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ -加群の構造の定義は省略する)。

- (2) 上の同型において、右辺のウェイト空間分解 $L(\Lambda_0) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} L(\Lambda_0)_\mu$ は、左辺のブロック分解に対応し、ウェイトベクトルは既約表現に対応する³⁴。

なお、ここまでの話は Kleshchev の教科書 [Kle5] が書かれた時点でわかっていたことである。2008 年に Khovanov-Lauda, Rouquier によって独立に “量子群の半分を圏論化する代数” が導入され [KL, Rou]、最近はさらに精密な対応がわかっている。このあたりのことについては、Kleshchev の最近のサーベイ [Kle6] がおすすめである。

³ $\lambda = \Lambda_0$ のとき、すなわち $\mathcal{H}_n^{\Lambda_0} \cong F \mathfrak{S}_n$ の場合のブロック分解については、いわゆる中山予想 [Nak] そのものであり、1940 年代に Brauer と Robinson によって解決されている [Bra, Rob]。

⁴ ちなみに、ブロック分解に関する Kleshchev の教科書 [Kle5] にある証明は、基本的には Grojnowski [Gro1] を踏襲したものであって、A. Cox によってその不備が指摘されている。完全な証明は Brundan [Bru1] によって与えられた。

3 ヘッケ・クリフォード環

このように、対称群の既約表現の次元を知りたい、という自然な問いは（それは未だに明らかに
はなっていないものの）、対称群の p -モジュラー分岐則と $A_{p-1}^{(1)}$ 型のリー環・量子群との関連を明
らかにした。数学では、必ずしも“実用的でない”対応であっても、一見まったく異なるオリジン
を持つ2つの数学的な対象が精密に対応している、ということは重要だとみなされるのではないだ
ろうか？

本研究では、対称群のモジュラー表現にさらに深入りするのではなく、このような「ある種の（“
ヘッケ環”と考えることのできる）代数の表現論」と「リー環から派生する数学的対象」の対応そ
のものを問題にしている。特に、

「 $A_n^{(1)}$ 型以外のクリスタルが分岐則を統制しているような、“自然な”代数の族を見つけたい」

ということが、本研究の動機であった。以下では、この“自然な”代数として Olshanski によって
定義されたヘッケ・クリフォード環 [Ols] をとると、この目的が達せられることを説明したい。

そこで、ヘッケ・クリフォード環について説明しよう。以下、標数が2ではない代数的閉体 F 上
でヘッケ・クリフォード環を定義し、その表現論を考察する（が、例によってリー環や量子群は通
常通り $\mathbb{C}$ 上で考えていることに注意）。

定義 3.1 ([Ols]). 量子パラメータ $q \in F^\times$ をとり、 $\xi = q - q^{-1}$ とおく。 $n \geq 0$ に対して、 n 次
のヘッケ・クリフォード環 $\mathcal{HC}_n(q)$ を、次の生成元と基本関係式で定義される超代数とする。

生成元： 偶生成元 $\{T_i \mid 1 \leq i < n\}$, 奇生成元 $\{C_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

基本関係式： 1. $C_i^2 = 1, C_i C_j + C_j C_i = 0 \quad (1 \leq i \neq j \leq n).$

2. $T_i^2 = \xi T_i + 1, T_i T_j = T_j T_i \quad (1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| \geq 2).$

3. $T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-2).$

4. $T_i C_i = C_{i+1} T_i, T_i C_{i+1} = C_i T_i - \xi(C_i - C_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1).$

5. $T_i C_j = C_j T_i \quad (1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n, j \neq i, i+1).$

定義関係式を見ても、どこが“自然な代数の族”なのかわからないだろう。しかし、標語的には、
これは「対称群代数の射影表現類似」の q -類似である。以下、このことを説明しよう。

3.1 対称群の標数 p における表現論と $A_{p-1}^{(1)}$ 型クリスタル

冒頭で解説したように、対称群の p -モジュラー既約表現のモジュラー分岐グラフは、量子群
 $U_v(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ に付随するクリスタル $B(\Lambda_0)$ (のクリスタル構造) と一致する。また定理 2.4 で紹介
したように、加群圏 $\{\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n\text{-mod}\}_{\geq 0}$ は、 $\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ -加群 $L(\Lambda_0)$ を圏論化する。

3.2 A 型岩堀・ヘッケ環の量子標数 e における表現論と $A_{e-1}^{(1)}$ 型クリスタル

さて、対称群の群環の q -類似として、A 型岩堀・ヘッケ環 $\mathcal{H}_n^{\text{IW}}(q)$ が知られている（もっとも定
義された動機は、代数群の表現論に由来しているのだが）。この代数には量子パラメータ $q \in F^\times$
があるが、量子標数

$$\text{char}_q F \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \geq 1 \mid 1 + \cdots + q^{k-1} = 0\} = e > 1$$

のとき、そのモジュラー分岐グラフは、量子群 $U_v(\mathfrak{g}(A_{e-1}^{(1)}))$ に付随するクリスタル $B(\Lambda_0)$ (のクリスタル構造) と一致する [Bru2]。また圏論化についても同様のことが知られている [Ari] (というよりも、歴史的にはこの論文が最初である)。

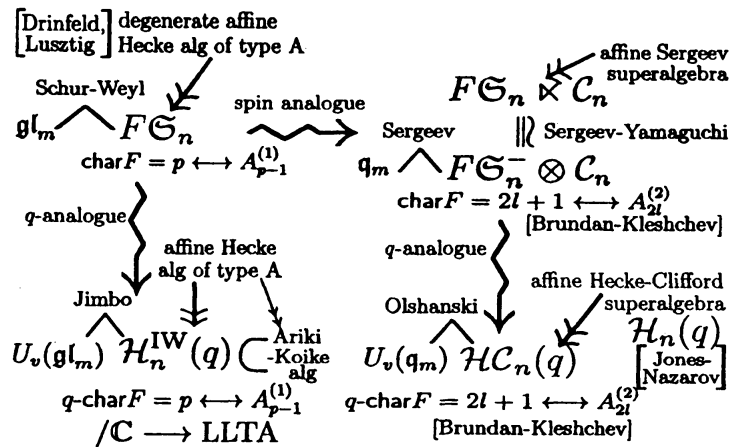
さらに興味深いことに、 $\mathbb{C}$ 上では、A 型岩堀・ヘッケの既約表現は、量子群 $U_v(\mathfrak{g}(A_{e-1}^{(1)}))$ の基本可積分加群 $L(\Lambda_0)$ の柏原・Lusztig による双対標準基底に対応することが知られている⁵。これによれば、既約 $\mathcal{H}_n^{\text{IW}}(q)$ -加群 M の次元は、 $\bigsqcup_{n \geq 0} \text{Irr}(\mathcal{H}_n^{\text{IW}}(q)\text{-mod}) \cong B(\Lambda_0)$ の同一視のもとで、対応するクリスタルの元 b をとってくると、次の公式で与えられる。

$$\dim M = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} (f_{i_n} \cdots f_{i_1} \text{ を標準基底で展開したときの、標準基底 } G(b) \text{ の係数})|_{v=1}.$$

ただし、ここで $I = \{0, 1, \dots, e-1\}$ は、アフィン Cartan 行列 $A_{e-1}^{(1)}$ の添数集合である。

これを使うと、例えば冒頭にあげた $D_{\mathbb{F}_2}^{(6,5,4,2,1)}$ の“ q -類似”にあたる $\mathcal{H}_{18}^{\text{IW}}(-1)$ の既約表現の次元が 4229940 であることが、(コンピュータを使えば) 数秒でわかる。これはかなり興味深いことである。というのも、A 型岩堀・ヘッケ環においても、Dipper-James [DJ] による“Specht 加群”があるので、対称群のモジュラー表現論程度のことしか我々が A 型岩堀・ヘッケ環について知らないとすれば、既約表現の次元を求めるには、とある組み合わせ論的なアルゴリズムで定義された対称行列のランクを求めることになる。今の場合、それは 10720710×10720710 の行列になってしまう。しかし LLTA 理論によれば、このような (現在のコンピュータの容量では) 一見できそうもない計算の答えを、量子群の計算を通じて知ることができるのである。

まとめると、「対称群の p -モジュラー表現論」と「量子標数が p の A 型岩堀・ヘッケの表現論」は、モジュラー分岐則などは同一でよく似ている。しかし、 $\mathbb{C}$ 上で量子標数が p だとすると、後者はさらに密接に $A_{p-1}^{(1)}$ 型量子群と関係しており、既約表現と双対標準基底が対応している⁶。



3.3 対称群の奇標数 p における射影表現論と $A_{p-1}^{(2)}$ 型クリスタル

F を標数が 2 でない代数的閉体として、対称群の振じれ群環 $F\mathfrak{S}_n$ を考えよう。これは奇生成元 $\{T_i \mid 1 \leq i < n\}$ で生成され、次を基本関係式にもつ超代数である ($1 \leq i \neq j < n, 1 \leq k < n-1$)。

$$T_i^2 = 1, \quad T_i T_j = -T_j T_i, \quad T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1}. \quad (3.1)$$

⁵いわゆる LLTA 理論 [LLT, Ari]。これは、現在、A 型岩堀・ヘッケ環の良一般化と考えられている $G(m, 1, n)$ ($\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$) 型巡回ヘッケ環 (通常、有木・小池代数 [AK] と呼ばれている) まで拡張されて証明されている。

⁶圏論化を通じて、対称群も A 型岩堀・ヘッケ環も、 $\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)})$ -可積分加群 $L(\Lambda_0)$ 上に、Berenstein-Kazhdan の意味での perfect basis [BeKa] を定める。A 型岩堀・ヘッケ環では、それが双対標準基底の $v=1$ での特殊化になっている、ということである。なお、 $v=1$ にする前の対応については [Kle6] でまとまったものを読まれることをおすすめする。

これは $n \geq 4$ では、線型でない $\mathfrak{S}_n$ の射影表現を考えることに対応している（射影表現については [HH] が標準的な教科書である）。

今までの話を $F\mathfrak{S}_n^-$ に移植することは自然な問いであろう。私は歴史的な経緯を正確に把握していないのだが、 $F\mathfrak{S}_n^-$ そのものを考えるのではなく、クリフォード超代数

$$C_n = \langle \{C_i\}_{i=1}^n \mid C_i^2 = 1, C_i C_j + C_j C_i = 0 \rangle$$

を（超代数として⁷）テンソル積した Sergeev 環 $\mathcal{Y}_n \stackrel{\text{def}}{=} F\mathfrak{S}_n^- \otimes C_n$ を考えるとうまくいくことが知られている⁸。実際 Sergeev は、 $\mathfrak{gl}_m$ と $\mathfrak{S}_n$ の間で成立する有名な Schur-Weyl 双対性の“射影表現類似”を queer リー超代数 $\mathfrak{q}_m$ と $\mathcal{Y}_n$ の間で確立した [Ser1]（Sergeev 双対性）。また Brundan と Kleshchev は、奇標数 p 上の代数的閉体 F 上で超代数の系列 $\{\mathcal{Y}_n\}_{n \geq 0}$ を考えると、モジュラー分岐則が $A_{p-1}^{(2)}$ 型クリスタル $B(\Lambda_0)$ で統制できること、加群圏 $\{\mathcal{Y}_n\text{-smod}\}_{n \geq 0}$ が $\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(2)})$ -加群 $L(\Lambda_0)$ を“圏論化”することを証明した⁹ [BK1]。

まとめると、対称群の群環 $F\mathfrak{S}_n$ の“射影表現類似”としては、振じれ群環 $F\mathfrak{S}_n^-$ そのものではなく、Sergeev 環 $\mathcal{Y}_n = F\mathfrak{S}_n^- \otimes C_n$ に置き換えると適切なことが多く、Schur-Weyl 型の双対性が成り立つほか、先ほど対称群の群環で述べた $A_{p-1}^{(1)}$ 型リー環・量子群との対応のいくつか、 $A_{p-1}^{(1)}$ を $A_{p-1}^{(2)}$ に置き換えた形で成立する。

3.4 ヘッケ・クリフォード環の量子標数 $2l+1$ における表現論と $A_{2l}^{(2)}$ 型クリスタル

A 型岩堀・ヘッケ環を対称群代数の q -類似とみなすなら、ヘッケ・クリフォード環 $\mathcal{HC}_n(q)$ は「 $F\mathfrak{S}_n$ の適切な“射影表現類似”と考えられる」Sergeev 環 $\mathcal{Y}_n$ の“ q -類似”とみなせる。

これは Olshanski によって（A 型岩堀・ヘッケ環 $\mathcal{H}_n^{\text{IW}}(q)$ と量子群 $U_v(\mathfrak{gl}_m)$ の間で知られている）神保双対性の q -類似を追究する際に導入された [Ols]。Olshanski は“量子群” $U_v(\mathfrak{q}_m)$ とヘッケ・クリフォード超代数 $\mathcal{HC}_n(q)$ を定義し、さらにその間に双対性を証明した（Olshanski 双対性）。

ここで定義 3.1 中では、 $F\mathfrak{S}_n^-$ の関係式 (3.1) にあった $T_i T_j = -T_j T_i$ に相当する関係式が、いつの間にか $T_i T_j = T_j T_i$ に変わっていることが不思議かもしれない。これは Sergeev・山口による、以下の超代数としての同型による [Ser2, Yam]。

$$\mathcal{Y}_n = F\mathfrak{S}_n^- \otimes C_n \cong F\mathfrak{S}_n \times C_n. \quad (3.2)$$

つまり $\mathcal{HC}_n(q)$ は、Sergeev 環 $\mathcal{Y}_n$ の $F\mathfrak{S}_n \times C_n$ の形の関係式を基にした q -類似なのである。

Brundan と Kleshchev は、量子標数

$$\text{char}_q F \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \geq 1 \mid q^{-(k-1)} + q^{-(k-3)} + \cdots + q^{k-3} + q^{k-1} = 0\} = 2l+1$$

となる代数的閉体上では、超代数の系列 $\{\mathcal{HC}_n(q)\}_{n \geq 0}$ について、上記の奇標数 $p = 2l+1$ における $\{\mathcal{Y}_n\}_{n \geq 0}$ の場合と同じ定理が成り立つことを証明した [BK1]。

⁷ A, B を超代数とすると、斉次元 $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ について

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|}(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)$$

で超代数 $A \otimes B$ の積を定義するため、これは次数付けを忘れて普通の代数として A, B をテンソル積して得られる代数とは一般には異なる。

⁸ なおここで単純超代数 C_n は、 n が偶数なら単純代数なので $F\mathfrak{S}_n^-$ と $\mathcal{Y}_n$ は森田同値になる。また n が奇数でもその差をコントロールすることができる。このあたりのことは [Kle5, BK1, BK2] にまとまっている。

⁹ ここで、やや歯切れが悪いのは $\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(2)})$ の Chevalley 生成元 e_i, f_i の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{Y}_n\text{-smod})_{\mathbb{C}}$ への作用が、 $\mathcal{Y}_n\text{-smod}$ から $\mathcal{Y}_{n \mp 1}\text{-smod}$ への完全関手から誘導される形で得られないからである。今のところ Grothendieck 群の基底である各既約超加群について、その Chevalley 生成元の作用を“加群論的に”定義できるだけなのである。

4 主定理

先ほど述べた“対称群の群環の類似物”のモジュラー分岐則の決定には、それを商として持つような無限次元の代数が役割を果たす。例えば、[OV] に対称群の通常表現の既約表現の分岐則を A 型退化アフィン・ヘッケ環を使って導出する方法が書かれている。このような考えは [Gro2, GV] 等でさらに発展させられた。

ともかく、ヘッケ・クリフォード環のモジュラー分岐則の決定には、それを商として持つ無限次元の代数であるアフィン・ヘッケ・クリフォード環 $\mathcal{H}_n(q)$ が必要である。これは射影表現版の Young 対称子を構成するために、Jones-Nazarov によって導入された¹⁰ [JN]。彼らはこの代数をアフィン Sergeev 環と呼んでいるが、ここでは Brundan-Kleshchev [BK2] にならってアフィン・ヘッケ・クリフォード環と呼ぶことにする¹¹。

定義 4.1 ([JN]). 量子パラメータ $q \in F^\times$ をとり、 $\xi = q - q^{-1}$ とおく。 $n \geq 0$ に対して、 n 次のアフィン・ヘッケ・クリフォード環 $\mathcal{H}_n(q)$ を、次の生成元と基本関係式で定義される超代数とする。

生成元： 偶生成元 $\{X_i^{\pm 1}, T_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < n\}$, 奇生成元 $\{C_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

基本関係式： 1. $X_i X_i^{-1} = X_i^{-1} X_i = 1, X_i X_j = X_j X_i \quad (1 \leq i, j \leq n).$

$$2. C_i^2 = 1, C_i C_j + C_j C_i = 0 \quad (1 \leq i \neq j \leq n).$$

$$3. T_i^2 = \xi T_i + 1, T_i T_j = T_j T_i \quad (1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| \geq 2).$$

$$4. T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-2).$$

$$5. C_i X_i^{\pm 1} = X_i^{\mp 1} C_i, C_i X_j^{\pm 1} = X_j^{\pm 1} C_i \quad (1 \leq i \neq j \leq n).$$

$$6. 1 \leq i \leq n-1 \text{ について、}$$

$$T_i C_i = C_{i+1} T_i,$$

$$T_i C_{i+1} = C_i T_i - \xi(C_i - C_{i+1}),$$

$$T_i X_i = X_{i+1} T_i + \xi(X_{i+1} + C_i C_{i+1} X_i),$$

$$T_i X_{i+1} = X_i T_i - \xi(1 - C_i C_{i+1}) X_{i+1},$$

$$T_i X_i^{-1} = X_{i+1}^{-1} T_i - \xi(X_i^{-1} + X_{i+1}^{-1} C_i C_{i+1}),$$

$$T_i X_{i+1}^{-1} = X_i^{-1} T_i - \xi X_i^{-1} (1 - C_i C_{i+1}).$$

$$7. T_i C_j = C_j T_i, T_i X_j^{\pm 1} = X_j^{\pm 1} T_i \quad (1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n, j \neq i, i+1).$$

[Tsu] の主定理は、量子標数が $2l$ の場合に、以下のようなヘッケ・クリフォード環（もっと一般にアフィン・ヘッケ・クリフォード環とその有限次元商の族）と $D_l^{(2)}$ 型リー環・量子群との対応を主張するものである。

定理 4.2 ([Tsu]). $l \geq 2$ とし、 F を代数的閉体、 $q \in F^\times$ を 1 の原始 $4l$ 乗根とする。 $D_l^{(2)}$ 型の Cartan データに付随する支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ について、 $\mathcal{H}_n(q)$ の商を

$$f_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (X_1 - 1)^{\lambda(h_1)} (X_1 + 1)^{\lambda(h_{l-1})} \prod_{k=2}^{l-2} (X_k + X_k^{-1} - 2 \frac{q^{2k+1} + q^{-(2k+1)}}{q + q^{-1}})^{\lambda(h_k)}$$

を使って $\mathcal{H}_\lambda^n(q) = \mathcal{H}_n(q) / \langle f_\lambda \rangle$ と定める（これは有限次元になる。また $\mathcal{H}_n^{\Lambda_0}(q) = \mathcal{H}C_n(q)$ であることに注意）。また充満部分圏 $\text{Rep } \mathcal{H}_n(q) (\subseteq \mathcal{H}_n(q)\text{-smod})$ を、

$$M \in \text{Obj}(\text{Rep } \mathcal{H}_n(q)) \iff \exists \lambda \in P^+, f_\lambda M = 0$$

によって定める。このとき、以下が成立する。

¹⁰ 先行研究となった射影表現版の Young 対称子の構成は Nazarov によるものである [Naz]。

¹¹ Brundan-Kleshchev [BK2] は、アフィン・ヘッケ・クリフォード環の退化版をむしろアフィン Sergeev 環と呼んでいる。これは Nazarov によって導入された [Naz]。

1. Grothendieck 群の直和 $K(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(\text{Rep } \mathcal{H}_n(q))$ は、誘導と制限によって次数付可換ホップ代数の構造を持つ。さらに、この制限双対は $\mathfrak{g}(D_l^{(2)})$ の普遍展開環の Kostant 整形式の半分 $U_{\mathbb{Z}}^+(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))$ と同型になる。
2. 既約表現の合併 $\bigsqcup_{n \geq 0} \text{Irr}(\text{Rep } \mathcal{H}_n(q))$ は $U_v(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))$ -クリスタルの構造を持ち、さらに $B(\infty)$ と同型である。
3. $K(\lambda)_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathcal{H}_n^{\lambda}\text{-smod}) \otimes \mathbb{Q}$ は可積分最高ウェイト $U_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))$ -加群の構造を持つ¹²。また自然な射

$$\bigoplus_{n \geq 0} K_0(\text{Proj } \mathcal{H}_n^{\lambda}) \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathcal{H}_n^{\lambda}\text{-smod})$$

は単射になり、その像は $L(\lambda)$ の整形式 $L(\lambda)_{\mathbb{Z}} = U_{\mathbb{Z}}^-(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))1_{\lambda}$ に一致する。さらに $\bigoplus_{n \geq 0} K_0(\text{Proj } \mathcal{H}_n^{\lambda})$ と $\bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathcal{H}_n^{\lambda}\text{-smod})$ は $K(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ 中で Shapovalov 形式に関する双対な $\mathbb{Z}$ -格子である。

4. 既約表現の合併 $\bigsqcup_{n \geq 0} \text{Irr}(\mathcal{H}_n^{\lambda}\text{-smod})$ は $U_v(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))$ -クリスタルの構造を持ち、さらに $B(\lambda)$ と同型である。

この定理は q が 1 の原始 $2l+1$ 乗根、あるいは 1 の原始 $2(2l+1)$ 乗根の場合¹³には、命題中の $D_l^{(2)}$ を $A_{2l}^{(2)}$ に置き換える¹⁴ことで、[BK1] で得られていたものである。小さなランクの環 $\mathcal{H}_2(q), \mathcal{H}_3(q), \mathcal{H}_4(q)$ の既約表現を分析する箇所が定理 4.2 を得る際の要点になる。

私の動機は [NS] にあった。そこでは、ディンキン図形に involution がある場合、その型のクリスタルの involution による固定点をとると、軌道リー代数のクリスタルを得ることができることが示されている。 $A_{e-1}^{(1)}$ 型の場合、添え数集合を $I = \{0, 1, \dots, e-1\} \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ として、 $i \mapsto -i$ という involution を考えると、その軌道リー代数は $A_{2n}^{(2)}$ 型あるいは $D_{n+1}^{(2)}$ 型になる。つまり $A_{2n}^{(2)}$ 型と $D_{n+1}^{(2)}$ 型は、クリスタルの観点からはともに $A_n^{(1)}$ 型と関係している。一方で $A_{2n}^{(2)}$ 型クリスタルは、“自然な” ヘッケ環のモジュラー分岐則を統制しているのであった¹⁵。よって、 $D_{n+1}^{(2)}$ 型についても“missing”な対応が期待できるのではないだろうか？というのがこの研究の動機であった。

同じようなクリスタルの観点からの動機をもう 1 点説明する。レベル 1 の $U_v(A_n^{(1)})$ または $U_v(A_{2n}^{(2)})$ 型クリスタル $B(\Lambda_0)$ が、分割の集合 $\mathbb{Y} = \bigsqcup_{n \geq 0} \{\lambda \vdash n\}$ の部分集合として実現できることはよく知られている [MM, Kan]。さらにそこに現れる組合せ論が、対称群のモジュラー（射影）表現のモジュラー分岐則の研究以前に、[Jam, Mor, MY] 等ですでにいくつか研究されていたのは興味深いことである。このような観点から、どのアフィン型のレベル 1 クリスタル $B(\Lambda_0)$ が $\mathbb{Y}$ の部分集合として実現できるのかを考えてみる。

この問題は、いわゆる“京都パス模型” [KMN₁², KMN₂²] あるいはその組合せ論的対応物である Kang の Young wall [Kan] と関連している。鍵になる概念は、統計力学的な動機から [KMN₁²] で導入された完全結晶である。[Kan] を読めばわかるとおり、 $B(\Lambda_0)$ が $\mathbb{Y}$ の部分集合として実現されるためには、レベル 1 の完全結晶（のクリスタルグラフ）が分岐点を持たない¹⁶ことが必要である。

¹²ここで $U_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))$ は $\mathfrak{g}(D_l^{(2)})$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g}(D_l^{(2)}))$ の $\mathbb{Q}$ -形式である。

¹³これは量子標数が $2l+1$ の場合である。

¹⁴さらに商 $\mathcal{H}_n^{\lambda}(q)$ の定義も少し修正する。

¹⁵繰り返すと、奇標数 $2n+1$ における Sergeev 環 $\{\mathcal{Y}_m\}_{m \geq 0}$ 、あるいは量子標数 $2n+1$ におけるヘッケ・クリフォード環 $\{\mathcal{HC}_m(q)\}_{m \geq 0}$ であった [BK1]。

¹⁶ $G = (V, E)$ を、 V が頂点集合、 $E \subseteq V \times V$ が隣接関係を表す有向グラフとする（すなわち、 $(v, w) \in E$ は、 v から w へ有向辺があることを意味している）。 $w \in V$ が G の分岐点であるとは、ある $u, v \in V$ が存在して、 $u \neq v, u \neq w, v \neq w, (w, u) \in E, (w, v) \in E$ となるときを言う。

[KMN₂]にあるとおり、 $A_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ 型ではそのようなレベル 1 完全結晶が存在する。逆に、そのようなレベル 1 完全結晶はそれらに限ることがいくつかの予想¹⁷を仮定すれば証明できる。

まとめると、クリスタルのいくつかの観点から、 $A_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ 型は他のアフィン型から区別することができるということである。

なお体の標数は素数なので、“量子標数で起こることは、適切な退化した代数を用いると同じ正標数でも起きる”という現象は、定理 4.2 では起こりそうもないことを注意しておく。

5 今後の課題

[BK1, Tsu] を合わせると、ヘッケ・クリフォード環とリー環・量子群の対応のパラメータは

$$q:\text{generic} \longleftrightarrow B_\infty, \quad q^2 = {}^{2l+1}\sqrt{1} \longleftrightarrow A_{2l}^{(2)}, \quad q^2 = {}^{2l}\sqrt{1} \longleftrightarrow D_l^{(2)}$$

となる。今後さらにこの対応を精密なものにするために考えられる課題を簡単にまとめておく。

5.1 LLTA 型定理

誰もが期待するのが、 $\mathbb{C}$ 上で LLTA 型の定理を証明することである。もっとも安直な予想として、対応する型の双対標準基底と既約表現の対応が期待できるが¹⁸、この予想が正しいとして量子群サイドで計算を続けると、「ある既約表現の制限中の、ある既約表現の組成重複度がマイナスになる」などの表現論的にはあり得ない結論が出てくる。したがって、このような誰もが考えるような対応ではないと推測される¹⁹。最近 [VV] によって証明が発表された [EK] の B 型アフィン・ヘッケ環の LLTA 型予想のような新しいアイデアが必要なのだろう。

またこの方向での研究においては、ヘッケ・クリフォード環で Specht 加群を構成することも 1 つの鍵ではないかと思われる。最近、退化版では最近荒川・鈴木関手の“射影表現版”が構成されたようである [HKS]。

5.2 ブロック分解やそれらの間の導来同値

ヘッケ・クリフォード環の加群圏は、適切な型のリー環の可積分最高ウェイト加群を“圏論化”するので、ウェイト空間とブロックの対応の整合性、そしてそれらの間の Scopes 型の森田同値 [Sco]、Chuang-Rouquier 型の導来同値 [CR] などが期待できる。退化版のレベル 1 の場合に相当する、対称群の表現群 $\{\hat{\mathcal{S}}_n\}_{n \geq 0}$ の森田同値は [Kes, KS, LS] 等で得られているようだ。特に [KS, LS] では $\{\hat{\mathcal{S}}_n\}_{n \geq 0}$ と $\{\hat{\mathcal{A}}_n\}_{n \geq 0}$ の間の“crossover”な森田同値が示され、[AS] では“crossover”な導来同値が予想されている²⁰。

¹⁷1 つは、任意の完全結晶が Kirillov-Reshetikhin 完全結晶の有限個のテンソル積であろうという予想である [KNO]。もう 1 つは、Kirillov-Reshetikhin 完全結晶の分岐に関する予想 [HKOTY, Conjecture 2.1] [HKOTT, Conjecture 2.1] である。

¹⁸例えばこれは [Lec] でも期待されている。

¹⁹[LT] でも、対称群の p -モジュラー射影表現と $A_{p-1}^{(2)}$ 型量子群の Fock 空間の間の予想が書かれているが、同じように“positivity”が成立しないため、少なくとも予想そのものが修正を要するだろう。

²⁰ヘッケ・クリフォード環は、標語的には「対称群代数の射影表現類似」の q -類似」だった。「交代群代数の射影表現類似」の q -類似については [Wan] に定義がある。Wang は、擬じれ群環 $F\mathfrak{S}_n^-$ の関係式 (3.1) をもとに、その“ヘッケ超代数” $\mathcal{H}_n^-(q)$ を定義し、Sergeev・山口の同型 (3.2) の q -類似 $\mathcal{HC}_n(q) \cong \mathcal{H}_n^-(q) \otimes C_n$ を構成した ($\mathcal{HC}_n(q)$ が、Sergeev 環 $\mathcal{Y}_n$ の $F\mathfrak{S}_n \ltimes C_n$ の形の関係式を基にした q -類似であったことに注意)。Wang は $\mathcal{H}_n^-(q)$ をスピン・ヘッケ環と呼んでおり、この部分環として「交代群代数の射影表現類似」の q -類似にあたる代数を導入している。

5.3 Khovanov-Lauda-Rouquier 代数との関連

対称化可能な一般化された Cartan 行列 A に付随する Khovanov-Lauda-Rouquier 代数と A 型クリスタルの関連 [LV] から、ヘッケ・クリフォード環と適切な型の Khovanov-Lauda-Rouquier 代数には森田同値等の関係が期待されている²¹。もっとも理想的な先行結果としては、Brundan と Kleshchev によって示された、有木・小池代数のブロック代数と巡回クイバーに付随した Khovanov-Lauda-Rouquier 代数の有限次元商の同型定理がある [BK3]。

6 最後に

この度、講演の機会を与えてくださった山内博先生と花木章秀先生に感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

- [Ari] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$* , J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 789–808.
- [AK] S. Ariki and K. Koike, *A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr S_n$ and construction of its irreducible representations*, Adv. Math. **106** (1994), 216–243.
- [AS] H. Arisha and M. Schaps, *Maximal strings in the crystal graph of spin representations of the symmetric and alternating groups*, Comm. Algebra **37** (2009), 3779–3795.
- [BK1] J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A_{2l}^{(2)}$ and modular branching rules for $\hat{S}_n$* , Represent. Theory **5** (2001), 317–403.
- [BK2] J. Brundan and A. Kleshchev, *Projective representations of symmetric groups via Sergeev duality*, Math. Z. **239** (2002), 27–68.
- [BK3] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), 451–484.
- [BeKa] A. Berenstein and D. Kazhdan, *Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases*, Quantum groups, 13–88, Contemp. Math., **433**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Bra] R. Brauer *On a conjecture by Nakayama*, Trans. Roy. Soc. Canada. Sect. III. **41** (1947), 11–19.
- [Bru1] J. Brundan, *Centers of degenerate cyclotomic Hecke algebras and parabolic category $\mathcal{O}$* , Represent. Theory **12** (2008), 236–259.
- [Bru2] J. Brundan, *Modular branching rules and the Mullineux map for Hecke algebras of type A*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 551–581.
- [CR] J. Chuang and R. Rouquier, *Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$ -categorification*, Ann. of Math. **167** (2008), 245–298.
- [Dan] S. Danz, *Vertices of low-dimensional simple modules for symmetric groups*, Comm. Algebra **36** (2008), 4521–4539.
- [DJ] R. Dipper and G. James, *Representations of Hecke algebras of general linear groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), 20–52.
- [Dri] V.G. Drinfeld, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 62–64.
- [EK] N. Enomoto and M. Kashiwara, *Symmetric crystals and affine Hecke algebras of type B*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82** (2006), 131–136.

²¹ [HMM] のイントロも参考になるだろう。

- [Gro1] I. Grojnowski, *Blocks of the cyclotomic Hecke algebra*, preprint, Jan 1999 (available in <http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/archive/grojnowski.html>).
- [Gro2] I. Grojnowski, *Affine $\hat{sl}_p$ controls the modular representation theory of the symmetric group and related Hecke algebras*, **math.RT/9907129**.
- [GV] I. Grojnowski and M. Vazirani, *Strong multiplicity one theorems for affine Hecke algebras of type A*, *Transform. Groups* **6** (2001), 143–155.
- [HH] P.N. Hoffman and J.F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. 1992.
- [HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, in “MathPhys Odyssey 2001-Integrable Models and Beyond In Honor of Barry M.McCoy”, edited by M. Kashiwara and T. Miwa, Birkhäuser (2002) 205–272.
- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, *Contemp. Math.*, **248** (1999), 243–291.
- [HKS] D. Hill, J. Kujawa and J. Sussan, *Degenerate Affine Hecke-Clifford Algebras and Type Q Lie Superalgebras*, **arXiv:0904.0499**.
- [HMM] D. Hill, G. Melvin and D. Mondragon, *Representations of Quiver Hecke Algebras via Lyndon Bases*, **arXiv:0912.2067**.
- [Jam] G. James, *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics 682, Springer, 1978.
- [JK] G.D. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [JN] A. Jones and M. Nazarov, *Affine Sergeev algebra and q -analogues of the Young symmetrizers for projective representations of the symmetric group*, *Proc. London Math. Soc.* **78** (1999), 481–512.
- [Kac] V. G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.
- [Kan] S-J. Kang, *Crystal bases for quantum affine algebras and combinatorics of Young walls*, *Proc. London Math. Soc.* (3) **86** (2003), 29–69.
- [Kas] M. Kashiwara, *Bases cristallines des groupes quantiques*, Cours Spécialisés **9**, Soc. Math. France, 2002.
- [Kes] R. Kessar, *Blocks and source algebras for the double covers of the symmetric and alternating groups*, *J. Algebra* **186** (1996), 872–933.
- [KL] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I.*, *Represent. Theory* **13** (2009), 309–347.
- [Kle1] A. Kleshchev, *Branching rules for modular representations of symmetric groups I*, *J. Algebra* **178** (1995), 493–511.
- [Kle2] A. Kleshchev, *Branching rules for modular representations of symmetric groups II*, *J. Reine. Angew. Math.* **459** (1995), 163–212.
- [Kle3] A. Kleshchev, *Branching rules for modular representations of symmetric groups III: some corollaries and a problem of Mullineux*, *J. London. Math. Soc.* **54** (1996), 25–38.
- [Kle4] A. Kleshchev, *Branching rules for modular representations of symmetric groups IV*, *J. Algebra* **201** (1998), 547–572.
- [Kle5] A. Kleshchev, *Linear and Projective Representations of Symmetric Groups*, Cambridge University Press, 2005.
- [Kle6] A. Kleshchev, *Representation theory of symmetric groups and related Hecke algebras*, to appear in *Bull. Amer. Math. Soc.*
- [KMN₁²] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, *Internat. J. Modern Phys. A* **7**, Suppl. 1A (1992), 449–484.
- [KMN₂²] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, *Duke Math. J.* **68** (1992), 499–607.
- [KNO] M. Kashiwara, T. Nakashima and M. Okado, *Affine geometric crystals and limit of perfect crystals*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), 3645–3686.

- [KS] R. Kessar and M. Schaps, *Crossover Morita equivalences for blocks of the covering groups of the symmetric and alternating groups*, J. Group Theory **9** (2006), 715–730.
- [Lec] B. Leclerc, *Dual canonical bases, quantum shuffles and q -characters*, Math. Z. **246** (2004), 691–732.
- [LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), 205–263.
- [LS] R. Leabovich and M. Schaps, *Crossover Morita equivalences of spin representations of the symmetric and alternating groups*, **arXiv:0910.5070**.
- [LT] B. Leclerc and J-Y. Thibon, *q -deformed Fock spaces and modular representations of spin symmetric groups*, J. Phys. A **30** (1997), 6163–6176.
- [LV] A.D. Lauda and M. Vazirani, *Crystals from categorified quantum groups*, **arXiv:0909.1810**.
- [Lus] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math Soc. **2** (1989), 599–635.
- [MM] K. Misra and T. Miwa, *Crystal base for the basic representation of $U_q(\mathfrak{sl}(n))$* , Comm. Math. Phys. **134** (1990), 79–88.
- [Mor] A.O. Morris, *The spin representation of the symmetric group*, Canad. J. Math. **17** (1965), 543–549.
- [Mül] J. Müller, *The 2-modular decomposition matrices of the symmetric groups S_{15} , S_{16} , and S_{17}* , Comm. Algebra **28** (2000), 4997–5005.
- [MY] A.O. Morris and A.K. Yaseen, *Some combinatorial results involving shifted Young diagrams*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), 23–31.
- [Nak] T. Nakayama, *On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group. I.*, Jap. J. Math. **18** (1941), 89–108.
- [Naz] M. Nazarov, *Young’s symmetrizers for projective representations of the symmetric group*, Adv. Math. **127** (1997), 190–257.
- [NS] S. Naito and D. Sagaki, *Standard Paths and Standard Monomials Fixed by a Diagram Automorphism*, J. Algebra **251** (2002), 461–474.
- [Ols] G. Olshanski, *Quantized universal enveloping superalgebra of type Q and a super-extension of the Hecke algebra*, Lett. Math. Phys. **24** (1992), 93–102.
- [OV] A. Okounkov and A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*, Selecta Math. **2** (1996), 581–605.
- [Rob] G. de B. Robinson, *On a conjecture by Nakayama*, Trans. Roy. Soc. Canada. Sect. III. **41** (1947), 20–25.
- [Rou] R. Rouquier *2-Kac-Moody algebras*, **arXiv:0812.5023**.
- [Sco] J. Scopes, *Cartan matrices and Morita equivalence for blocks of the symmetric group*, J. Algebra **142** (1991), 441–455.
- [Ser1] A.N. Sergeev, *Tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $Gl(n, m)$ and $Q(n)$* , Mat. Sb. **123** (1984), 422–430.
- [Ser2] A.N. Sergeev, *The Howe duality and the projective representations of symmetric groups*, Represent. Theory **3** (1999), 416–434.
- [Tsu] S. Tsuchioka, *Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type $D_l^{(2)}$* , to appear in Publ. RIMS.
- [VV] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and affine Hecke algebras of type B* , **arXiv:0911.5209**.
- [Wan] W. Wang, *Spin Hecke algebras of finite and affine types*, Adv. Math. **212** (2007), 723–748.
- [Yam] M. Yamaguchi, *A duality of the twisted group algebra of the symmetric group and a Lie superalgebra*, J. Algebra **222** (1999), 301–327.