

アメリカン交換オプションの価格評価とその応用

北海道大学・経済学研究科 木村 俊一 (Toshikazu Kimura)[†]

北海道大学・経済学部 神力 慎太郎 (Shintaro Jinriki)[‡]

[†]Graduate School of Economics and Business Administration

[‡]Faculty of Economics

Hokkaido University

1 序論

リアルオプションとは、経営戦略等の意思決定過程において、金融資産以外の実物を原資産とするオプションのことを指す。将来のある時点で投資を行うオプションを行使または放棄するという考え方によって、投資の持つ不確実性や延期可能性といった性格を合理的に説明することができる。投資の拡大、縮小、あるいは中止や再開といった行動についてはリアルオプションを用いた分析が可能である。たとえば、Trigeorgis and Mason [13] は経営の規模を変更するオプションについて検討し、Brennan and Schwartz [3] は鉱山の開発、閉鎖、操業の停止を決定するモデルを示した。このようなリアルオプションについては Trigeorgis [12] が詳しい。

本論文で価格評価を行う交換オプション (exchange option) とは、そのリアルオプションの一種で、ある資産を放棄することで別の資産を手に入れる権利のことである。ヨーロッパン交換オプションの場合は、Margrave [9] がブラック・ショールズの公式を用いて交換オプションの価格を評価し、いくつかの応用の可能性を示した。ただし、配当がない資産を想定していることから直接応用することは難しい。アメリカン交換オプションの場合は、Bjerk Sund and Stensland [2] が 1 つの財を行使価格とみなすことで、交換オプションの価格がバニラプットオプションの特殊なケースに相当することを示したが、定量的な分析は行われていない。本論文の目的は、解析的には解かれていないアメリカン交換オプションの定量的な価格評価を数値的に行うことであり、また、その結果を投資決定理論に応用することにより最適投資計画を導く。以下では、既存の投資決定モデルの問題点を明らかにする。

投資計画の評価には、従来、正味現在価値 (NPV = Net Present Value) を適用するのが基本とされてきた。投資における収益とコストの割引現在価値の差をとり、この値が正の場合に投資を実行するのが NPV 法である。この方法を用いる際には、将来得られるであろう収益や割引率をどう推定するかという実務上の問題がある。NPV の算出に用いられる割引率の計算方法は Taggart [10] がまとめている。投資計画問題におけるもう一つの考え方は Tobin の q と呼ばれるものである。Tobin [11] は、ある資本自体の価値と、現時点におけるその資本の再取得費用の比をとり、それが 1 を超えれば投資を実行するとした。しかし、どちらの考え方も、投資はその時点でするかしないかという立場であり、将来の別の時点で実行することはできないものとしている。現実には投資を延期する可能性を含むものが多く、このような条件の投資は少ない。また、投資に関する実証分析には、正味現在価値あるいは Tobin の q の条件を満たした場合でも投資が実行されていないことが多い。こういった問題点は早くから指摘されていて、Hayes and Garvin [6] は NPV による投資基準が過小評価であることを示していた。

このような現実とのギャップを埋めるためにリアルオプションを用いた投資決定理論は、McDonald and Siegel [8] が示したモデルである。投資の不可逆性、つまり一度投資を実行すると取り戻せなくなる費用があることに注目し、この機会費用を加味した場合の最適投資基準は、正味現在価値や Tobin の q よりも厳しいものになるとした。すなわち、投資を延期した場合のオプション価値を含んだ閾値を越えない限り、投資は行われたいというものである。また、Dixit and Pindyck [5] は、これをより一般的に拡張して、オプション理論を応用し投資計画問題における不確実性や不可逆性を合理的に説明している。しかし、企業の投資機会が行使期限のないコールオプションとする考え方に基づく McDonald and Siegel [8] のモデルは、現実によくみられる投資期間が有限な場合においては有効とはいえない。そこで、本論文ではこの問題を解決するため有限満期をもつアメリカン交換オプションを投資計画問題に応用し、投資期間が有限な場合にも対応し得るモデルを示す。

2 アメリカン交換オプションの定式化

市場は完備で無裁定であると仮定する。 $V(t)$ を権利を行使することで新たに受け取れる資産の価格、 $I(t)$ を放棄する資産の価格とし、 $W_V(t)$ 、 $W_I(t)$ をフィルタ付き確率空間 $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 上の標準ウィナー過程とする。このとき、二つの資産の価格過程 $V(t)$ 、 $I(t)$ は、以下のリスク中立化された拡散過程に従うとする。

$$\frac{di(t)}{i(t)} = (r - \delta_i)dt + \sigma_i dW_i(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

とおく ($i = V, I$)。ここで $r > 0$ は安全利子率とし、 $\delta_i \geq 0$ はそれぞれの資産に対する配当比率、また、 $\sigma_i > 0$ はそれぞれのボラティリティを表し、 ρ はこれらの資産の間の相関係数とする。このとき、満期においては投資を行うことから、満期 T におけるこのオプションのペイオフは

$$(V(T) - I(T))^+ \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $(x)^+ = \max(x, 0)$ である。

満期前での行使が可能でアメリカン交換オプションの場合、オプション価格は最適停止問題の解とみなすことができ、すなわち、 t^* を停止時点とすると

$$C(V, I, t) = \sup_{t \leq t^* \leq T} \mathbb{E}[e^{-r(t^*-t)}(V(t^*) - I(t^*))^+ | \mathcal{F}_t] \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 $V(t) \equiv V \geq 0$ 、 $I(t) \equiv I \geq 0$ 、 $t \in [0, T]$ である。また、伊藤の補題、ファインマン・カッツの定理より $C(V, I, t)$ は以下の偏微分方程式を満たしている。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + \rho\sigma_V\sigma_I VI \frac{\partial^2 C}{\partial V \partial I} + \frac{1}{2}\sigma_I^2 I^2 \frac{\partial^2 C}{\partial I^2} + (r - \delta_V)V \frac{\partial C}{\partial V} + (r - \delta_I)I \frac{\partial C}{\partial I} - rC = 0 \quad (4)$$

終端条件は

$$C(V(T), I(T), T) = (V(T) - I(T))^+ \quad (5)$$

と書ける。偏微分方程式 (4) は変数変換

$$G := \frac{C}{I}, \quad q := \frac{V}{I}$$

によって階数低下させることができる。このとき q は新たに受け取れる資産と放棄する資産との価格比であり、前節であげた Tobin の q が意味するものと一致する。

偏微分方程式 (4) は

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 q^2 \frac{\partial^2 G}{\partial q^2} + (\delta_I - \delta_V)q \frac{\partial G}{\partial q} - \delta_I G = 0, \quad 0 \leq q \leq \bar{q}_t \quad (6)$$

と書き換えられる。ここで、 $(\bar{q}_t)_{t \in [0, T]}$ は満期以前の行使を有利と判断する臨界値、すなわち、最適停止境界を表し

$$\sigma^2 = \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_V\sigma_I + \sigma_I^2 \quad (7)$$

である。また、終端条件は

$$G(q, T) = (q - 1)^+ \quad (8)$$

で与えられる。

次に、時間の向きを逆に取ったオプションの価格を考える。満期 T までの残存時間 $\tau = T - t$ を用いて、 $\hat{G}(\hat{q}_\tau, \tau) \equiv G(q_{T-\tau}, T - \tau) = G(q_t, t)$ と定義する。ここで、 $\hat{q}_\tau \equiv q_{T-\tau} = q_t$ である。このとき、偏微分方程式 (6) はさらに

$$-\frac{\partial \hat{G}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \hat{q}^2 \frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial \hat{q}^2} + (\delta_I - \delta_V)\hat{q} \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{q}} - \delta_I \hat{G} = 0, \quad 0 \leq \hat{q} \leq \bar{q}_\tau \quad (9)$$

と書き直すことができる。ただし、 $(\bar{q}_\tau)_{\tau \in [0, T]}$ はオプションの最適停止境界を示している。また、終端条件は初期条件と考えることができ

$$\hat{G}(\hat{q}, 0) = (\hat{q} - 1)^+ \quad (10)$$

さらに、境界条件

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{\hat{q} \downarrow 0} \hat{G}(\hat{q}, \tau) = 0 \\ \lim_{\hat{q} \uparrow \bar{q}_\tau} \hat{G}(\hat{q}, \tau) = \bar{q}_\tau - 1 \\ \lim_{\hat{q} \uparrow \bar{q}_\tau} \frac{\partial}{\partial \hat{q}} \hat{G}(\hat{q}, \tau) = 1 \end{array} \right.$$

を満たす。

導いた偏微分方程式 (9) を常微分方程式に変換させるため、ラプラス・カールソン変換を用いる。詳しい説明は Carr [4]、Kimura [7] を参照されたい。 $\lambda > 0$ に対して

$$G^*(q, \lambda) = \mathcal{LC}[\hat{G}(q, \tau)] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \tau} \hat{G}(q, \tau) d\tau \quad (11)$$

と定義する。ラプラス・カールソン変換によって偏微分方程式 (9) は常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 q^2 \frac{d^2 G^*}{dq^2} + (\delta_I - \delta_V)q \frac{dG^*}{dq} - (\lambda + \delta_I)G^* = -\lambda(q - 1)^+, \quad 0 \leq q \leq \bar{q}^* \quad (12)$$

に変換される。さらに、境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{q \downarrow 0} G^*(q, \lambda) = 0 \\ \lim_{q \uparrow \bar{q}^*} G^*(q, \lambda) = \bar{q}^* - 1 \\ \lim_{q \uparrow \bar{q}^*} \frac{d}{dq} W^*(q, \lambda) = 1 \end{array} \right.$$

となる。ここで $\bar{q}^*(\lambda)$ は

$$\bar{q}^*(\lambda) = \mathcal{L}\mathcal{C}[\bar{q}_\tau] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \tau} \bar{q}_\tau d\tau \quad (13)$$

と定義され、オプションの最適停止境界 $(\bar{q}_\tau)_{\tau \in [0, T]}$ のラプラス・カールソン変換である。

定理 1 アメリカン交換オプション価格のラプラス・カールソン変換は

$$G^*(q, \lambda) = \begin{cases} A_1 q^{\theta_1} + A_2 q^{\theta_2}, & 0 < q \leq 1 \\ A_3 q^{\theta_1} + A_4 q^{\theta_2} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta_V} q - \frac{\lambda}{\lambda + \delta_I}, & 1 < q < \bar{q}^* \\ q - 1, & \bar{q}^* \leq q \end{cases} \quad (14)$$

で与えられる。ここで、 $\theta_1 > 1$ 、 $\theta_2 < 0$ は 2 次方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 + (\delta_I - \delta_V - \frac{1}{2} \sigma^2) \theta - (\lambda + \delta_I) = 0 \quad (15)$$

の実根である。係数 A_1, A_2, A_3, A_4 は

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \bar{q}^{*\theta_2 - \theta_1} \right) + \frac{1}{\theta_1} \frac{\lambda}{\lambda + \delta_V} \left(\frac{\delta_V}{\lambda} \bar{q}^{*1 - \theta_1} + \frac{\delta_I - \delta_V}{\lambda + \delta_I} \theta_1 \right) \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= -\gamma \frac{\theta_2}{\theta_1} \bar{q}^{*\theta_2 - \theta_1} + \frac{1}{\theta_1} \frac{\delta_V}{\lambda + \delta_V} \bar{q}^{*1 - \theta_1} \\ A_4 &= \gamma \end{aligned}$$

である。ここで

$$\gamma = \frac{1}{\theta_1 - \theta_2} \frac{\lambda}{\lambda + \delta_V} \left(1 - \frac{\delta_I - \delta_V}{\lambda + \delta_I} \theta_1 \right)$$

とした。最適停止境界のラプラス・カールソン変換 $\bar{q}^*$ は

$$\gamma \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \bar{q}^{*\theta_2} + \frac{\delta_V}{\lambda + \delta_V} \left(\frac{1}{\theta_1} - 1 \right) \bar{q}^* = \frac{\lambda}{\lambda + \delta_I} - 1 \quad (16)$$

から決定される。

定理 2 無期限満期アメリカン交換オプションの価格は

$$\lim_{\tau \uparrow \infty} \hat{G}(q, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1^\circ} \left(\frac{q}{\bar{q}_\infty} \right)^{\theta_1^\circ}, & 0 < q < \bar{q}^* \\ q - 1, & \bar{q}^* \leq q \end{cases} \quad (17)$$

ここで

$$\theta_1^\circ = \frac{\delta_V - \delta_I}{\sigma^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta_V - \delta_I}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\delta_I}{\sigma^2}}$$

であり、その最適停止境界は

$$\bar{q}_\infty = \lim_{\tau \uparrow \infty} \bar{q}_\tau = \frac{\theta_1^\circ}{\theta_1^\circ - 1} \quad (18)$$

となる。

(18) は McDonald and Siegel [8]、Dixit and Pindyck [5] のモデルで示された閾値と一致する。これは、前述のモデルが企業の投資機会を行使期限のないコール・オプションであるとみなしていたため、本節における無期限アメリカン交換オプションの結果でも同じ閾値が求められたのである。しかし、序論で述べたように現実によくみられる有限満期を持つ投資においては、定理 2 の結果が満期以前の行使を有利と判断する最適な基準とはいえない。

3 数値実験

定理 1 の結果からアメリカン交換オプションの価格評価を行うためには、数値的ラプラス逆変換が必要となる。本論文では逆変換アルゴリズムとして Gaver-Stehfest 法を採用する。逆変換作用素は非有界であることから、ラプラス逆変換の特定の方法が、いかなる場合でも有効に働くことは保証されない。よって、ラプラス逆変換の数値解法は、いずれも何らかの欠点を含んでいる。数値的逆変換のサーベイは木村 [1] を参照されたい。Gaver-Stehfest 法の長所は、実数領域で計算可能なため計算時間が短いことと、分布関数を表すときに近似精度が高いという点で、短所は、精度の高い計算が要求され逆変換後の数値が不安定になり得ることである。

図 1、2 はアメリカン交換オプションの最適停止境界を示している。まず、図 1 はボラティリティ σ に関して値を変えながら境界を描いた。 σ は (7) よりそれぞれの資産の間に対称性があるため、 σ_V, σ_I の値を入れ換えても同様の結果となる。そこで、両方の値をともに変えて動きを見たところ、 σ が小さくなるほど境界が下にシフトしているのがわかる。すなわち、不確実性が低ければ投資を有利と判断する基準も低くてよいということである。点線が表しているのは不確実性がほとんどない（ここでは $\sigma_V, \sigma_I = 0.01$ とした）ときの境界で、1 のまま動かない。これは Tobin [11] が示す考え方に一致し、不確実性のない投資に対する Tobin の q の正当性を裏付けるものである。図 2 は点線によって表わした無期限アメリカン交換オプションの臨界値と最適停止境界の乖離を示したもので、 t の増加とともに乖離が大きくなっていることがわかる。すなわち、行使期限までの時間が短いほど、最適な投資基準は McDonald and Siegel [8]、Dixit and Pindyck [5] の示した閾値 (定理 2 の結果) よりも低いところにある。これより、満期を無期限とする投資を正当化する

値は、満期が十分に長ければさほど変わらず有効であるが、行使期限が短ければ最適な投資時期を逸する可能性のある過大評価であると考えられる。このほか、 δ_I に δ_V よりも大きな数値を与えた際にジャンプがおきて、逆変換の値が不安定になるという結果も得られた。この点はラプラス・カールソン変換を用いる場合の短所であり、結果を応用する場合には注意しなければならない。

次に、図3はボラティリティ σ を変えながら、2つの資産の価格比に対するアメリカン交換オプションの価格を描いたもので、不確実性が高いほどオプションの価値も高くなるのがわかる。なお、点線は本源的価値を表わしている。図4は、2つの資産の価格比についてのオプションの価格ではなく、それぞれの資産に関する動きを見るための三次元の図を示した。図3で見たとおり、 V/I の比が大きくなる、すなわち、 V が増加し I の値が減少するに従い、オプションの価格が大きくなることが確認できる。

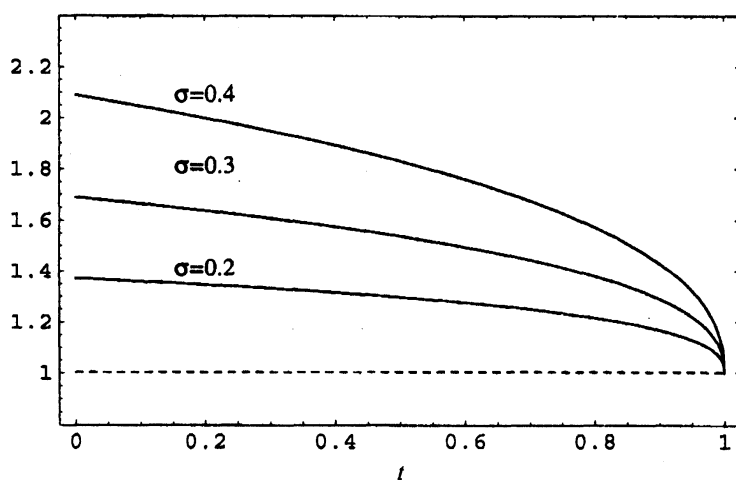


図 1: アメリカン交換オプションの最適停止境界 ($T = 1$, $\sigma_V, \sigma_I = 0.2, 0.3, 0.4$, $\rho = 0.5$, $\delta_V = 0.03$, $\delta_I = 0.01$)

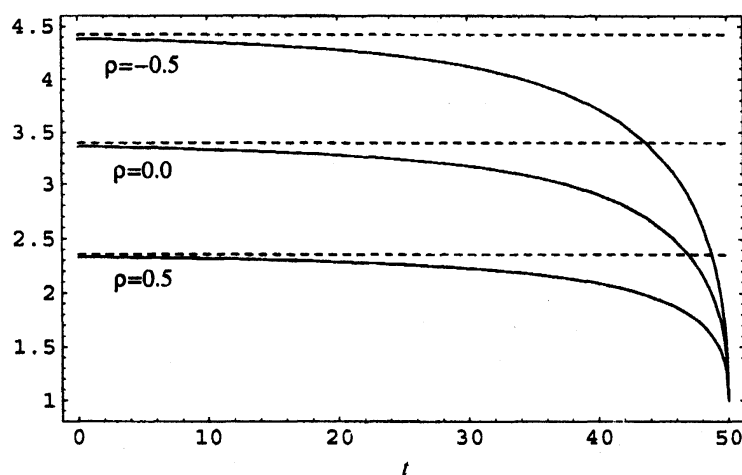


図 2: 無期限アメリカン交換オプションとの比較 ($T = 50$, $\sigma_V = 0.2$, $\sigma_I = 0.3$, $\rho = 0.5, 0, -0.5$, $\delta_V = 0.03$, $\delta_I = 0.01$)

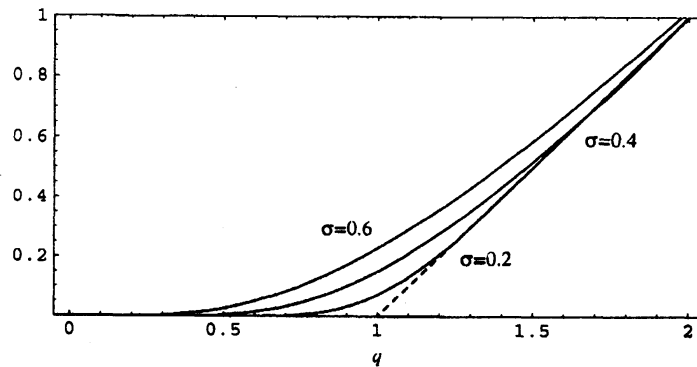


図 3: アメリカン交換オプションの価格 ($t = 0, T = 1, \sigma_V, \sigma_I = 0.2, 0.4, 0.6, \rho = 0.5, \delta_V = 0.03, \delta_I = 0.01$)

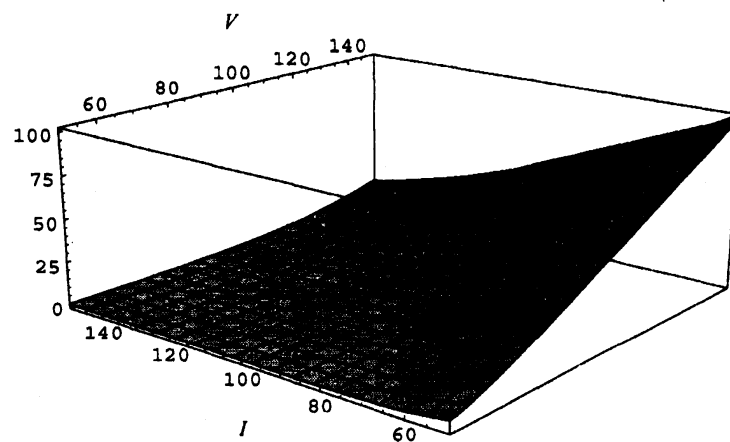


図 4: アメリカン交換オプションの価格 ($t = 0, T = 1, \sigma_V = 0.2, \sigma_I = 0.3, \rho = 0.5, \delta_V = 0.03, \delta_I = 0.01$)

4 結論

本論文では、アメリカン交換オプションを投資決定理論に応用することで、最適投資計画問題に対する定量的解法を提案した。具体的には、ラプラス・カルソン変換を用いて、アメリカン交換オプションの価格と最適停止境界の積分変換を導出し、数値的逆変換を用いて定量的な価格評価を行った。本論文で解析したアメリカン交換オプションは、投資期間が有限の場合の投資決定モデルとみなすことができる。また、Tobin の q は不確実性のない投資の判断基準として有効であること、無期限アメリカン交換オプションによる結果は McDonald and Siegel [8]、Dixit and Pindyck [5] の導出した結果と一致していることも確認した。このことから、数値計算の結果を検討すると、有限投資期間における投資計画問題において不確実性を考慮した最適な投資基準は、Tobin [11] の示した 1 よりも大きいものの、McDonald and Siegel [8]、Dixit and Pindyck [5] の導出した $q^* > 1$ の値よりも下にあることが明らかとなった。すなわち、現実の投資計画において Tobin の q による基準は過小評価であり、投資が失敗に終わる可能性が大きい。対して、 q^* を基準として投資の正当性を判断することは過大評価となり、最適な投資時期を逸することを意味している。したがって、有限な投資期間をもつ投資において不確実性を考慮する場合、アメリカン

交換オプションを用いることは有用である。ただし、その場合の問題点として数値的逆変換に不安定な部分があることを理解していなければならない。

参考文献

- [1] 木村 俊一, “数値的 Laplace 逆変換について,” *経済学研究* (北海道大学), **37**, 282-293, 1987.
- [2] Bjerk Sund, P. and G. Stensland, “American Exchange Options and Put-Call Transformation: A Note,” *Journal of Business Finance Accounting*, **20**, 761-764, 1993.
- [3] Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, “Evaluating Natural Resource Investments,” *Journal of Business*, **58**, 135-157, 1985.
- [4] Carr, P., “Randomization and the American Put,” *Review of Financial Studies*, **11**, 597-626, 1998.
- [5] Dixit, A.K. and R.S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- [6] Hayes, R. and D. Garvin, “Managing as if Tomorrow Mattered,” *Harvard Business Review*, **60**, 71-79, 1982.
- [7] Kimura, T., “Alternative Randomization for Valuing American Options,” Discussion Paper Series A, No. 2006-171, Hokkaido University, 2006.
- [8] McDonald, R. and D. Siegel, “The Value of Waiting to Invest,” *Quarterly Journal of Economics*, **101**, 707-728, 1986.
- [9] Margrave, W., “The Value of an Option to Exchange One Asset for Another,” *Journal of Finance*, **33**, 177-186, 1978.
- [10] Taggart, R.A., “Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions with Corporate and Personal Taxes,” *Financial Management*, **20**, 8-20, 1991.
- [11] Tobin, J., “A General Equilibrium Approach to Monetary Theory,” *Journal of Money, Credit and Banking*, **1**, 15-29, 1969.
- [12] Trigeorgis, L., *Real Options*, The MIT Press, 1996.
- [13] Trigeorgis, L. and S.P. Mason, “Valuing Managerial Flexibility,” *Midland Corporate Finance Journal*, **5**, 6-13, 1987.