

条件つき q -次エントロピーの導入とその応用

鹿大・理 井上政義, 藤坂博一

Renyi は確率の q 乗を用いてエントロピーを一般化した。この Renyi エントロピーの有用性はフラクタルやカオスの研究分野では著しいものがある。我々は Renyi と同様にして「条件つきエントロピー」を一般化し、それを種々の問題に応用する。

まず 2 つの排反事象系 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を考える。

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_M\}. \quad (2)$$

$\mathcal{A}$ の事象が A_j である確率を $P(j)$ とし、このとき $\mathcal{B}$ の事象が B_i である条件つき確率を $p_j(i)$ であるとする。このとき、条件つきエントロピーは次式で定義される。

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = -\sum_{ij} P(j) p_j(i) \ln p_j(i). \quad (3)$$

この条件つきエントロピーの性質と意味は以下の通りである。

$$a) \quad H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - H(\mathcal{A}) \quad (4)$$

ここで $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ は合成系のエントロピーであり、 $H(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 系のエントロピーである。上式は $\mathcal{A}$ のもつ情報を知った上での、 $\mathcal{B}$ の不確定性を表している。

$$b) \quad 0 \leq H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \leq H(\mathcal{B}) \quad (5)$$

もし、 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が独立ならば、

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H(\mathcal{B}). \quad (6)$$

このとき、 $\mathcal{A}$ の情報は $\mathcal{B}$ の不確定性を減少させない。

$$c) \quad H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = 0 \quad (7)$$

上式が成立するときは、 $\mathcal{A}$ を知れば $\mathcal{B}$ の全てがわかる。

$$d) D(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \quad (8)$$

上式の $D(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は系 $\mathcal{A}$ と系 $\mathcal{B}$ の距離を表している。

以上が従来の条件つきエントロピーのまとめである。さて、このエントロピーを一般化した q -次条件つきエントロピー H_q は次式で導入される。

$$H_q = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{ij} P(j) p_j^q(i) \quad (9)$$

パラメータ q の値を 1 に選ぶと従来の条件つきエントロピーが得られる。すなわち、

$$H_{q=1} = H(\mathcal{B}|\mathcal{A}). \quad (10)$$

また、系 $\mathcal{B}$ に含まれる事象の総数は M であるから、

$$H_{q=0} = \ln M \quad (11)$$

となる。

簡単な応用例をまず示そう。考える系は、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= (A_1 = \uparrow, A_2 = \downarrow) \\ \mathcal{B} &= (B_1 = \uparrow, B_2 = \downarrow) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

で表せるとする。この系の H_q は、

$$H_q = \frac{1}{1-q} \ln [P(1)p_1(1)^q + P(1)p_1(2)^q + P(2)p_2(1)^q + P(2)p_2(2)^q], \quad (13)$$

と求まる。ただし規格化条件より

$$\left. \begin{aligned} P(1) + P(2) &= 1, \quad p_1(1) + p_1(2) = 1, \\ p_2(1) + p_2(2) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上下が対称な場合は、 $p_1(2) = p_2(2) = \kappa$, $p_1(1) = p_2(1) = 1 - \kappa$ と表すことができるので、このとき H_q は次式の様に簡単になる。

$$H_q = \frac{1}{1-q} \ln [\kappa^q + (1-\kappa)^q]. \quad (15)$$

上式より，最大エントロピーは

$$H_{q=-\infty} = \begin{cases} \ln \frac{1}{\kappa} & ; 0 \leq \kappa < \frac{1}{2}, \\ \ln \frac{1}{1-\kappa} & ; \frac{1}{2} \leq \kappa < 1, \end{cases} \quad (16)$$

また最小エントロピーは，

$$H_{q=\infty} = \begin{cases} \ln \frac{1}{1-\kappa} & ; 0 \leq \kappa < \frac{1}{2}, \\ \ln \frac{1}{\kappa} & ; \frac{1}{2} \leq \kappa < 1, \end{cases} \quad (17)$$

で与えられる。従来の条件つきエントロピー $H(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ は

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H_{q=1} = \kappa \ln \frac{1}{\kappa} + (1-\kappa) \ln \frac{1}{1-\kappa}, \quad (18)$$

となる。また(11)式はこの例では，

$$H_{q=0} = \ln 2. \quad (19)$$

一般に，条件つき q -次エントロピー H_q は相似構造関数 λ_q と深い関係がある。この応用例の場合は次の事が見出された。

一次元マップ $f(x) = x/p; (0 \leq x \leq p)$ or $(x-p)/(1-x); (p < x < 1)$ の局所リヤプノフ指数の相似構造関数 λ_q は

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln [p^{1-q} + (1-p)^{1-q}] \quad (20)$$

と求まっている。これより，(15)式の H_q は，(20)式の λ_q と同一の数学的構造をもっていることがわかる。

条件つき q -次エントロピー H_q の具体的な応用として，我々は結合系の同調の様子を H_q を用いて調べている。

確率空間の分割数を増していくと H_q は増大する。この増大の速度より，Renyi エントロピーの場合と同様の方法で，特異点スペクトルを導入することができる。