

DUNKL-WILLIAMS 不等式の作用素への拡張とその応用

Kichi-Suke Saito (斎藤 吉助)
Niigata university
(新潟大学)
saito@math.sc.niigata-u.ac.jp

Masaru Tominaga (富永 雅)
Hiroshima Institute of Technology
(広島工業大学)
m.tominaga.3n@it-hiroshima.ac.jp

1. はじめに

1964 年, [1] において C.F. Dunkl と K.S. Williams は次の不等式を表した: ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (y \neq 0)$ に対して

$$(1.1) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

また最近, J. Pečarić と R. Rajić は, Dunkl-Williams 不等式 (1.1) の精密化を与えた: ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (y \neq 0)$ に対して

$$(1.2) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\sqrt{2\|x - y\|^2 + 2(\|x\| - \|y\|)^2}}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}.$$

更に, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の環 $B(\mathcal{H})$ の元 A の絶対値を $|A|$ としたとき, 不等式 (1.2) は彼ら自身により作用素へと一般化され, その等号条件についても吟味された [9, Theorem 2.1]:

Theorem A. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ は, それらの絶対値 $|A|, |B|$ に逆元が存在し, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすものとする. このとき

$$(1.3) \quad |A||A|^{-1} - B|B|^{-1}|^2 \leq |A|^{-1}(p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2)|A|^{-1}.$$

不等式 (1.3) の等号が成り立つための必要十分条件は

$$(1.4) \quad p(A - B)|A|^{-1} = qB(|A|^{-1} - |B|^{-1}).$$

本稿では, §2 において Dunkl-Williams 不等式 とそれに纏わる結果を紹介する. また, §3 では, $|A|\mathcal{H}$ の閉包 $[|A|\mathcal{H}]$ への直交射影 $P_{[|A|\mathcal{H}]}$ に対して $U^*U = P_{[|A|\mathcal{H}]}$ を満たす極分解 $A = U|A|$ を用いて, 不等式 (1.3) を一般化する. 結果として Theorem A は $|A|$ と $|B|$ の逆元の存在を仮定することなく拡張される. 更に, §4 では, 等号条件 (1.4) について調べ, 前と同様, 逆元の存在を仮定することなく等号条件について考察する. 得られた結果は [9] の一般化となる. なお, §3, §4 は [10] の概要の紹介となっている.

2. DUNKL-WILLIAMS INEQUALITIES と その関連事項

本節では、はじめに 1964 年に C.F. Dunkl と K.S. Williams により導かれた次の興味深い不等式と、その証明について紹介する：

Theorem B. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(1.1) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

Proof. 次のノルムの計算を行う：

$$\begin{aligned} \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &\leq \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| + \|x\| \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \|x-y\| + \frac{\|(\|y\| - \|x\|)y\|}{\|y\|} \\ &\leq \|x-y\| + \left| \|y\| - \|x\| \right| \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

同様にして次を得る：

$$\|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\|x-y\|.$$

よって、不等式 (1.1) が得られる. □

特に、 $\mathcal{X}$ が内積空間の場合、より精密な不等式が得られる：

Theorem C. 内積空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(2.1) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

Proof. 次のノルム・内積の計算を行う：

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|x\| \|y\|} \{2\|x\| \|y\| - 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle\} \\ &= \frac{1}{\|x\| \|y\|} \{2\|x\| \|y\| - (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2)\} \\ &= \frac{\|x-y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2}{\|x\| \|y\|}. \end{aligned}$$

このことより

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 - \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2} \right)^2 \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ = \frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{4\|x\| \|y\|} \{(\|x\| + \|y\|)^2 - \|x-y\|^2\} \geq 0. \end{aligned}$$

よって、不等式 (2.1) が得られる. □

続いて同じく 1964 年に W. Kirk と M. Smiley は, 内積空間への特徴付けを行った [5]:

Theorem D: ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(2.2) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\| + \|y\|}$$

となる必要十分条件は $\mathcal{X}$ が内積空間になることである.

また, E.R. Lorch は, $\mathcal{X}$ が内積空間である必要十分条件は, $\|x\| = \|y\|$ を満たす $x, y \in \mathcal{X}$ に対して不等式 $\|\alpha x + \alpha^{-1}y\| \geq \|x + y\|$ が任意の正数 α で成り立つことであると示した.

更に, [3] では, 不等式 (1.1) や (2.1) にそれぞれ現れるある種の評価値「4」, 「2」に着目し, 次の the Dunkl-Williams constant を導入した:

$$DW(\mathcal{X}) := \sup\{dw(x, y) : x, y \in \mathcal{X}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq y\},$$

where $dw(x, y) = \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x-y\|} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$. この Dunkl-Williams constant $DW(\mathcal{X})$ には次のような興味深い性質がある:

- ① $2 \leq DW(\mathcal{X}) \leq 4$.
- ② $DW(\mathcal{X}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{X}$: 内積空間.
- ③ $DW(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) = DW(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) = 4$.
- ④ $DW(\mathcal{X}) < 4 \Leftrightarrow \mathcal{X}$ は uniformly nonsquare である: If there exists $\delta > 0$ such that for any pair $x, y \in B_{\mathcal{X}} (= \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\})$,
 $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq \delta$.

次に (1.1) の精密化を考える. 最近, 三角不等式に関わる次の研究を行った [4] (cf. [6]):

Theorem E. バナッハ空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$\begin{aligned} & \|x+y\| + \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \\ & \leq \|x\| + \|y\| \\ & \leq \|x+y\| + \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \max\{\|x\|, \|y\|\}. \end{aligned}$$

Theorem E の第 2 不等式において y を $-y$ で置き換えることにより, 不等式 (1.1) をよりよく評価した次の定理を得ることが出来る:

Theorem F. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(2.3) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\|x-y\| + |\|x\| - \|y\||}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}.$$

更に, (1.1) の逆不等式を与える:

Theorem G. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(2.4) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \frac{\|x - y\| - |\|x\| - \|y\||}{\min\{\|x\|, \|y\|\}}.$$

次に, 不等式 (2.3) から導かれる結果を紹介する. Massera-Schaffer 不等式が $\|x - y\| + |\|x\| - \|y\|| \leq 2\|x - y\|$ から得られる [7]:

Theorem H. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(2.5) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x - y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}.$$

また, 任意の $x, y \in \mathcal{X}$ に対して

$$\|x - y\| + |\|x\| - \|y\|| \leq \sqrt{2} \sqrt{\|x - y\|^2 + (\|x\| - \|y\|)^2} \leq 2\|x - y\|$$

となるので [9] において考えられている次の結果を得ることが出来る:

Theorem I. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$(2.6) \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\sqrt{2} \sqrt{\|x - y\|^2 + (\|x\| - \|y\|)^2}}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}.$$

3. DUNKL-WILLIAMS OPERATOR INEQUALITY (1.3) の一般化

次の定理は, 不等式 (1.3) の一般化である:

Theorem 3.1. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき

$$(3.1) \quad |(U - V)|A||^2 \leq p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2.$$

不等式 (3.1) の等号が成り立つための必要十分条件は

$$(3.2) \quad p(A - B) = qV(|B| - |A|) \quad \text{and} \quad U^*U = V^*V.$$

上記の Theorem 3.1 を証明するために, 次の 2 つの補題を用意する:

Lemma 3.2. ([2, Corollary 1]) 作用素 A, B と, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす実数 $p, q > 1$ をとる. このとき

$$(3.3) \quad |A - B|^2 \leq p|A|^2 + q|B|^2.$$

不等式 (3.3) の等号が成り立つための必要十分条件は $pA = -qB$.

不等式 (3.3) は, Bohr inequality [8, p.312] の作用素への拡張である.

Lemma 3.3. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q \in \mathbb{R}$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. また, $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$ と仮定する. このとき

$$p|A - B|^2 \leq q(|A|^2 - |B|^2).$$

特に, $p > 1$ ならば, $|A| \geq |B|$, $U^*U \geq V^*V$ である. 更に, $U^*U = V^*V$ ならば $p|A - B|^2 = q(|A|^2 - |B|^2)$ である.

Proof. 等号 $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$ より

$$|p(A - qB)|^2 = |-qV|A||^2 = q^2|A|V^*V|A| \leq q^2|A|^2.$$

一方,

$$|p(A - qB)|^2 = p^2\{(1 - q)|A|^2 + (q^2 - q)|B|^2 + q(|A - B|^2)\}.$$

なので $p|A - B|^2 \leq q(|A|^2 - |B|^2)$ を得る. □

次に, これら 2 つの補題を用いて Theorem 3.1 の証明を行う:

Proof of Theorem 3.1. 等式 $|(U - V)|A||^2 = |A - B - V(|A| - |B|)|^2$ が成り立つから, Lemma 3.2 を作用素 $A - B$ と $V(|A| - |B|)$ とに適用することより,

$$(3.4) \quad |(U - V)|A||^2 \leq p|A - B|^2 + q|V(|A| - |B|)|^2$$

$$(3.5) \quad \leq p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2.$$

Lemma 3.2 より, 不等式 (3.4) の等式が成立する必要十分条件は $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$. また, 不等式 (3.5) の等号が成り立つための必要十分条件は $V^*V|A| = |A|$. よって $U^*U \leq V^*V$. 一方, 条件 $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$ より, $U^*U \geq V^*V$ であることが Lemma 3.3 を用いて得られる.

逆に, 条件 $U^*U = V^*V$ より $V^*V(|A| - |B|) = |A| - |B|$ が得られるので, 不等式 (3.4) と (3.5) の等号が成り立つ. □

Corollary 3.4. Theorem A は, Theorem 3.1 から導かれる.

Proof. 3 つの関係式 $U = A|A|^{-1}$, $V = B|B|^{-1}$, $U^*U = V^*V = I$ から

$$\begin{aligned} |A|A|^{-1} - B|B|^{-1}|^2 &= |A|^{-1}|(U - V)|A||^2|A|^{-1} \\ &\leq |A|^{-1}(p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2)|A|^{-1} \quad (\text{by (3.1)}). \end{aligned}$$

不等式 (1.3) の等号が成り立つための必要十分条件は

$$p(A - B)|A|^{-1} = qV(|B| - |A|)|A|^{-1} = qB(|A|^{-1} - |B|^{-1}).$$

ゆえに, Theorem A が導かれる. □

4. THEOREM 3.1 の等号条件について

本節では, Theorem 3.1 における等号成立 (3.2) について精査する. はじめに, Theorem 3.1 の等号条件に関わる次の結果について述べる:

Proposition 4.1. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. また $U^*U = V^*V$ とする. このとき, 次は同値である:

- (i) $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$.
- (ii) $|A| = |B| + \frac{p}{q}|A - B|$, $A - B = -V|A - B|$.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) のみを証明する. $p^2|A - B|^2 = q^2(|B| - |A|)^2$ なので $q(|A| - |B|) = p|A - B|$ となる. 更に, $A - B = \frac{q}{p}V(|B| - |A|) = -V|A - B|$ が得られる. $\square$

Theorem 3.1 と Proposition 4.1 の等号条件により, 次の系が導かれる:

Corollary 4.2. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき

$$\|(U - V)|A|\|^2 = p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2$$

ならば

$$|A| = |B| + \frac{p}{q}|A - B|, \quad A - B = -V|A - B|.$$

次に, 不等式 (3.1) における等号の特徴付けを行う. その準備として次の 2 つの補題を用意し, その証明を与える:

Lemma 4.3. ([9, Lemma 2.9]) 正作用素 $S, T \in B(\mathcal{H})$ が, ある $t \in \mathbb{R}$ に対して $ST + TS = tS^2$ を満足するとき, 次は同値である:

- (i) $t < 0 \Rightarrow S = 0$.
- (ii) $t \geq 0 \Rightarrow ST = TS = \frac{1}{2}tS^2$.

Proof. 作用素 $S^2T (= S(tS^2 - TS))$ は自己共役である. だから, S^2 と T は可換なので, S と T は可換である. $t < 0$ のとき $2ST = tS^2 \leq 0$ なので, $S = 0$ となる. 一方, $t \geq 0$ のとき $2ST = tS^2$ が導かれる. $\square$

Lemma 4.4. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき

$$(4.1) \quad \|(U - V)|A|\|^2 = p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2.$$

ならば

$$(4.2) \quad |B||A - B| + |A - B||B| = (2 - p)|A - B|^2.$$

Proof. Corollary 4.2 により等式 (4.1) から $C(= A - B) = -V|C|$ が導かれるので $B^*C = -|B|V^*V|C| = -|B||C|$ が得られる. ゆえに

$$|C + B|^2 = |C|^2 - |C||B| - |B||C| + |B|^2.$$

一方, Corollary 4.2 より

$$|C + B|^2 = (|B| + \frac{p}{q}|C|)^2.$$

上記 2 つの等式により

$$(\frac{p^2}{q^2} - 1)|C|^2 + (\frac{p}{q} + 1)|B||C| + (\frac{p}{q} + 1)|C||B| = 0$$

が導かれる. $\square$

上記 2 つの補題を用いて, 不等式 (3.1) の等号条件についてその特徴付けを与える. ここでは, Lemma 4.3 に従い, 実数 p で条件分けし, Theorem 4.5 では $p \geq 2$, Theorem 4.6 では $1 < p < 2$ の場合について述べる.

Theorem 4.5. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. また $p \geq 2$ とする. このとき, 次は同値である:

- (i) $|(U - V)|A||^2 = p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2.$
- (ii) $A = B.$

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) のみを証明する. $p > 2$ のとき, Lemma 4.4 と Lemma 4.3 より $C(= A - B) = 0$ は明らか. $p = 2$ のとき Lemma 4.3 より $|C||B| = 0$ なので $|C|V^*V = 0$. Corollary 4.2 から $C = -V|C|$ なので $|C|^2 = |C|V^*V|C| = 0$ を得る. $\square$

Theorem 4.6. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし, 実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. また, $1 < p < 2$ とする. このとき, 次は同値である:

- (i) $|(U - V)|A||^2 = p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2.$
- (ii) $\begin{cases} A = B(I - \frac{2}{2-p}W^*W) \\ |A| = |B|(I + \frac{2p}{(2-p)q}W^*W) \end{cases}.$

ただし, $A - B$ の極分解を $A - B = W|A - B|$ とする.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) $C = A - B$ とおく. 条件 (i) より

$$C = -V|C|, \quad |B||C| + |C||B| = (2 - p)|C|^2.$$

このとき, Lemma 4.3 より

$$|B||C| = |C||B| = \frac{1}{2}(2 - p)|C|^2.$$

だから, $A|C| = \frac{p}{p-2}B|C|$ が得られる. ここで, $W^*W\mathcal{H} = [|C|\mathcal{H}]$ より

$$AW^*W = \frac{p}{p-2}BW^*W.$$

一方, $(I - W^*W)\mathcal{H} = \text{Ker}C$, から, $A(I - W^*W) = B(I - W^*W)$ が導かれる. よって

$$A = AW^*W + A(I - W^*W) = B(I - \frac{2}{2-p}W^*W).$$

更に,

$$(4.3) \quad -V|C| = A - B = -\frac{2}{2-p}V|B|W^*W.$$

ここで, Theorem 3.1 より条件 (i) は $U^*U = V^*V$ を与えるので, $V^*V \geq W^*W$ となる. ゆえに, 等式 (4.3) より $|C| = \frac{2}{2-p}|B|W^*W$ となる. よって Corollary 4.2 より

$$|A| = |B| + \frac{p}{q}|C| = |B|(I + \frac{2p}{(2-p)q}W^*W).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) 等式

$$qV(|B| - |A|) = -\frac{2p}{(2-p)}V|B|W^*W = p(A - B)$$

が導かれる. 更に, 作用素 $I + \frac{2p}{(2-p)q}W^*W$ は可逆なので $[|A|\mathcal{H}] = [|B|\mathcal{H}]$ となる. ゆえに $U^*U = V^*V$. だから, Theorem 3.1 より条件 (i) が導かれる. $\square$

REFERENCES

- [1] C.F. Dunkl and K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly **71**(1964), 53–54.
- [2] O. Hirzallah, *Non-commutative operator Bohr inequality*, J. Math. Anal. Appl. **282**(2003), 578–583.
- [3] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and E.M. Mazcuñán-Navarro, *The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure*, J. Math. Anal. Appl. **342**(2008), 298–310.
- [4] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces*, Math. Inequal. Appl. **10**(2007), 451–460.
- [5] W. Kirk and M. Smiley, *Another characterization of inner product spaces*, Amer. Math. Monthly **71**(1964), 890–891.
- [6] L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly **113**(2006), 256–260.
- [7] J.L. Massera and J.J. Schaffer, *Linear differential equations and functional analysis, I*, Ann. Math. **67**(1958), 517–573.
- [8] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [9] J. Pečarić and R. Rajić, *Inequalities of the Dunkl-Williams type for absolute value operators*, to appear in J. Math. Inequal.
- [10] K. -S. Saito and M. Tominaga, *The Dunkl-Williams type inequality for absolute value operators*, to appear in Linear Algebra Appl.