

p-adic unit ball について

栗原 章

R を complete discrete valuation ring として、その剰余体が有限体 $\mathbb{F}_q$ であるものとする。Mumford [1] は複素上半平面 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ の R 上の類似物 X_I を構成した(後で詳しく述べる)。更に Čerednik [2], [3] は $\mathcal{H}$ と X_I の数論的關係を伊原理論の立場から明確にした。以下で我々の問題とするところは一般に有界対称領域 D に対して、 D の R 上の類似物を構成しようと試みることである。結果として D が l 次元 unit ball $\{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{C}^l; |x_1|^2 + \dots + |x_l|^2 < 1\}$ であるときは D の R 上の満足すべき類似物 X_I が構成できることを示す。そのためには道具として 岩堀-松本, Bruhat-Tits による R の商体 K 上の半単純代数群の理論と Mumford による Geometric Invariant Theory, Torus Embedding を用いる。

本文は筆者の得た結果であるが、それとは独立に Mustafin [5] は Mumford [1] が用いた join による

方法で我々の X_I と同一と思われる物を構成している。(cf. also Drinfel'd [4])

1° $\mathcal{F}_g = \{z \in \mathbb{C}; I_m(z) > 0\}$ の R 上の類似物 X_I (Mumford [1])

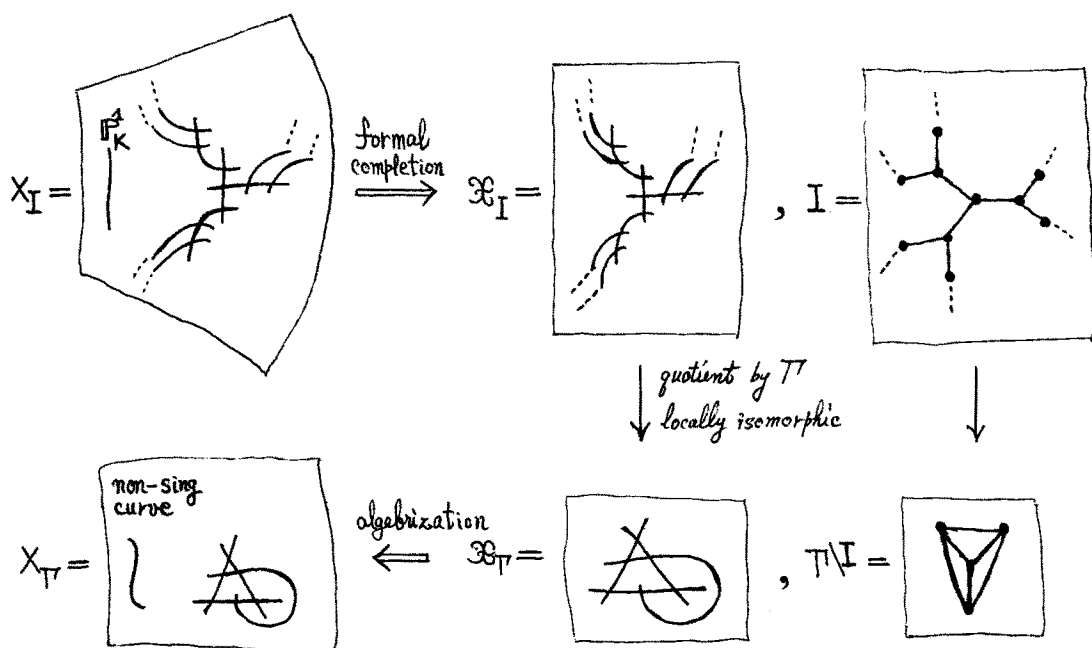
Mumford は我々の R より一般の係数環によって構成しているが、我々の R に対しては記述が簡単になるので以下それを復習する。(図参照)

$\mathbb{P}_R^1 = \text{Proj } R[X, Y]$ を考える。 $X^{(n)}$ ($n \geq 0$) を次の様に定義する。即ち、 $X^{(0)} = \mathbb{P}_R^1$ であり、 $X^{(n-1)}$ の special fibre $X_0^{(n-1)}$ の double point であり $\mathbb{F}_q$ -valued points をすべて blow up したものを $X^{(n)}$ とする。 $U^{(n)} = X^{(n)} - \{\text{double pt であり } \mathbb{F}_q\text{-valued pts}\}$ とおくと、 $U^{(0)} \subset_{\text{open}} U^{(1)} \subset_{\text{open}} U^{(2)} \subset \dots$ であり、これらをはり合わせて $X_I = \bigcup_{n \geq 0} U^{(n)}$ とおく。明らかに $X_{I, \eta} = \mathbb{P}_K^1$ ($\eta = \text{generic pt of Spec}(R)$)、また $X_{I, 0}$ の各成分は $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$ でありその $g+1$ 個の $\mathbb{F}_q$ -valued points で他の成分と交わっている。群 $\text{PGL}_2(K) = \text{Aut}(\mathbb{P}_K^1/K)$ の元は X_I の rational automorphism をひき起こすが、実際それは X_I 上刻る所定義され、従って $\text{PGL}_2(K) = \text{Aut}(X_I/R)$ となる (R 上の scheme の R 上の自己同型群が K 上の代数群!)。次の様な無限個の simplices からなる 1 次元単体複体 I を考える。即ち (I の 0 次元 simplex の集

合) = ($X_{I,0}$ の成分の集合) とし, 0次元 simplices v_1, v_2 ($v_1 \neq v_2$) がある (unique な) 1次元 simplex に含まれるのは対応する $X_{I,0}$ の成分 E_1, E_2 が交わるするときとする。
 $\mathrm{PGL}_2(K)$ は I に作用する。

さて torsion-free discrete subgroup $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ で $\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(K)$ が compact となるものを考える。そのとき以下の手順で R 上の curve X_Γ が構成される(その意味で X_I は $\mathcal{C}$ の類似物なので) である。 $\mathcal{X}_I$ を X_I の special fibre $X_{I,0}$ に沿った formal completion とする。然らば Γ の $\mathcal{X}_I$ への作用は Zariski topology に因して不連続的であり R -formal scheme category で quotient $\mathcal{X}_\Gamma = \Gamma \backslash \mathcal{X}_I$ が存在する。 $\mathcal{X}_\Gamma$ は $\mathrm{spf}(R)$ 上 proper であり dualizing sheaf $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\Gamma/R}$ は $\mathcal{X}_{\Gamma,0} = \mathcal{X}_\Gamma \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 上 ample である。従って GAGA により R 上の projective scheme X_Γ が唯一存在し $\mathcal{X}_\Gamma$ は X_Γ の $X_{\Gamma,0}$ に沿った formal completion となる。 $X_{\Gamma,1}$ は genus ≥ 2 の non-singular curve となる。一方, 有限単体複体 $\Gamma \backslash I$ を考えると, $X_{\Gamma,0}$ の成分及びその交わり方は上記の如き意味で $\Gamma \backslash I$ で記述される。

$g=2$ で絵を書くと例えば次の様になる。



さて,以上の構成を一般化することを念頭に置いて torus embedding の立場から見直してみる。

I の simplex σ に対して $X_{\sigma}^{imm} = X_I - (\sigma \text{ に含まれない } I \text{ の vertices に対応するすべての成分) とおく。然らば } X_I = \bigcup_{\sigma} X_{\sigma}^{imm} = \bigcup_{\dim(\sigma)=1} X_{\sigma}^{imm}.$

一方, $PGL_2(K)$ は I の 1 次元 simplex の集合に transitive に作用する。 $g \in PGL_2(K)$ に対して $X_{g\sigma}^{imm}$ は X_{σ}^{imm} の copy であるから, 一つの 1 次元 simplex σ に対して X_{σ}^{imm} を作ればよい。

π を R の素元として, $P_R^1 = \text{Proj } R[X, Y]$ の $\pi = Y = 0$ を center とする blown-up B を考えると $B = \text{Proj } R[\pi X^2, XY, Y^2]$ であるが B は次の様に言うことができる。 $T = \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \in SL_2$ を考える。

$X^*(T)$, $X_*(T)$ を T の character 全体のなす加群, multiplicative one-parameter subgroup 全体のなす加群とする。 $\varepsilon \in X^*(T)$, $\lambda \in X_*(T)$ を $\varepsilon: \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \rightarrow t$, $\lambda: t \rightarrow \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix}$ とすれば $X^*(T) = \mathbb{Z}\varepsilon$, $X_*(T) = \mathbb{Z}\lambda$. $X_*(T)_{\mathbb{R}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は次のように affine Weyl chamber に分割されて 1 次元単体複体となる。

$$X_*(T)_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & \frac{1}{2}\lambda & \lambda & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

simplex $\sigma = [0, \frac{1}{2}\lambda]$ に対して torus embedding T_{σ} が定義されるが今の場合 $T_{\sigma} = \text{Spec } R[t, t^{-2}]$ である。 T は SL_2 の自然な $\mathbb{P}^1$ の作用により $\mathbb{P}^1$ に作用する。

そのとき $B = T \setminus (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^1)^{ss}$ である。但し semi stability は $\mathcal{O}_{T_{\sigma}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ に關して考えるものとする。ここで blowing-up を使わずに torus embedding を用いて X_I が構成されたことになる。我々はこの立場で一般的な構成をすることになる。

Remark D を既約有界対称領域とし Y をその compact dual とする。そのとき, 複素単純 Lie 群 G とその maximal parabolic subgroup があって $Y = G/P$ と書ける。 D が l 次元 unit ball なら $Y = \mathbb{P}^l(\mathbb{C}) = SL_{l+1}(\mathbb{C}) / \begin{bmatrix} * & * \\ & 0 \end{bmatrix}$ 。また一般に Y は projective で $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$ である。

2° 一般的構成

data $(R, G, X, \mathcal{O}_X(1), \rho, \phi)$ から出発する。ここで R は前と同じ, G は R 上の split simple simply connected group scheme, X は R 上の projectiveかつ flat な integral scheme $\mathcal{O}_X(1)$ は X 上の ample sheaf, $\rho: G \times_R X \rightarrow X$ は G の X への作用, $\phi: \rho^* \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} p_X^* \mathcal{O}_X(1)$ は G の $\mathcal{O}_X(1)$ への作用とする。但し $p_X: G \times_R X \rightarrow X$ は projection。これらに対して次の如き $(X_I, \mathcal{O}_{X_I}(d), \rho_I, \phi_I)$ を構成する。
 X_I は R 上の locally of finite type scheme で flat かつ $X_{I,\eta} = X_\eta$, $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ は X_I 上の invertible sheaf であって $\mathcal{O}_{X_I}(d)|_{X_{I,\eta}} = \mathcal{O}_X(d)|_{X_\eta}$, ここで d は構成の途中で unique に定まる正整数, ρ_I は抽象群 $G(K)$ の X_I への作用で $X_{I,\eta} = X_\eta$ 上では ρ から induce される $G(K)$ の X_η への作用と一致するもの, ϕ_I は $G(K)$ の $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ への作用であって $X_{I,\eta}$ 上では ϕ から induce される $G(K)$ の $\mathcal{O}_X(d)|_{X_\eta}$ への作用と一致するものである。

$G = \mathrm{SL}_2$, $X = \mathbb{P}_R^1$, $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ のときは 1° のものと一致する。このときは $d=2$ であって $\mathcal{O}_{X_I}(-2)$ は dualizing sheaf $\omega_{X_I/R}$ と $\mathrm{SL}_2(K)$ -equivariant に isomorphic である。

X_I の構成は Toroidal Embeddings I, pp202-209 がヒントとなっている。以下その要領を述べる。

T を G の maximal split torus とし, $X_*(T)$ を T の multiplicative one-parameter subgroup 全体のなす加群とする。
 $X_*(T)_{\mathbb{R}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は affine Weyl chamber λ の分割により単体複体となり, $G(K)$ の Bruhat-Tits building I の sub-complex と見なされる。 $X_*(T)_{\mathbb{R}}$ の simplex σ を一つ fix する。然らば torus embedding $T_{\eta} \hookrightarrow T_{\sigma}$ が定義され, T は $T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X$ に自然に作用する。 T は $\mathcal{O}_{T_{\sigma}} \otimes \mathcal{O}_X(1)$ にも作用し, この作用に関する $T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X$ の semi-stable pts [resp. stable pts] 全体のなす $T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X$ の open subscheme を $(T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{ss}$ [resp. $(T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^s$] と書き $X_{\sigma}^{comp} = T \backslash (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{ss}$ [resp. $X_{\sigma}^{geom} = T \backslash (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^s$] とおく。 X_{σ}^{comp} は $\mathbb{R}$ 上 projective であり $X_{\sigma, \eta}^{comp} = X_{\sigma, \eta}^{geom} = X_{\eta}$ である。適当な正整数 d に対して $\mathcal{O}_{T_{\sigma}} \otimes \mathcal{O}_X(d)$ は X_{σ}^{comp} に descends $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{comp}}(d)$ を持つ。次に σ を一般に I の simplex とする。 $G(K)$ は I に作用しているが, ある $g \in G(K)$ があって $g\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$ となる。 X_{σ}^{comp} 及び $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{comp}}(d)$ を $X_{g\sigma}^{comp}$, $\mathcal{O}_{X_{g\sigma}^{comp}}(d)$ の g でひねった copy とする。然らば X_{σ}^{comp} , $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{comp}}(d)$ は "well-defined" であることが分かる。

$G = \mathrm{SL}_2$, $X = \mathbb{P}^1$ のときは $\dim(\sigma) = 0$ なら $X_\sigma^{\mathrm{comp}} \cong \mathbb{P}_R^1$, $\dim(\sigma) = 1$ なら $X_\sigma^{\mathrm{comp}} \cong \mathrm{Proj} R[\pi X^2, XY, Y^2]$ となることは前に述べた。

さて一般の data に戻って、我々の idea は I の simplex σ に対して X_σ^{comp} の open subscheme X_σ^{imm} を適当にとってそれらをはり合わせて $X_I = \bigcup_{\sigma \in I} X_\sigma^{\mathrm{imm}}$ を得ようというものであった。それは次のようにする。まず次のことが分かる。一般に I の simplex σ に対して $H_\sigma = \{g \in G(K); g\sigma = \sigma\}$ とおく。

(1) simplex $\sigma \subset X_*(T)_R$ 及び $h \in H_\sigma$ をとる。そのとき $\rho_\sigma(h)$:

$T_\sigma \times_R X \longrightarrow T_\sigma \times_R X$ であって $(T_\sigma \times_R X)_\eta = T_\eta \times_K X_\eta$ で $(\tau, x) \longmapsto (\tau, \tau h \tau^{-1} \cdot x)$ となるものが唯一存在する。 ρ_σ は H_σ の $T_\sigma \times_R X$ への作用を表える。 $T(R) \subset H_\sigma$ である。

(2) N を T の normalizer とする。 $N(K)$ の $I \wedge$ の作用は $X_*(T)_R$ を不変にする。simplex $\sigma \subset X_*(T)_R$ と $(n_1, n_2) \in T(K) \cdot N(R)$ (半直積) をとる。 $n = n_1 n_2 \in N(K)$ とおく。

そのとき、 $\rho(n_1, n_2): T_\sigma \times_R X \longrightarrow T_{n\sigma} \times_R X$ であって generic fibre で $(\tau, x) \longmapsto (n_2 \tau n_2^{-1} n_1^{-1}, n_2 \cdot x)$ となるものが唯一存在する。

さて次の (a) ~ (d) を満たす system $\{(T_\sigma \times_R X)^{\mathrm{aff}}; \sigma \subset X_*(T)_R\}$ を考える。

(a) 各 $\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ について

$$T_{\eta} \times_{\mathbb{R}} X_{\eta} \subset (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}} \subset_{\text{open}} (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^s$$

(b) 各 $\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ について, $(T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}}$ は T -invariantかつ $\rho_{\sigma}(T(\mathbb{R}))$ -invariant.

(c) 各 $\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ 及び $(n_1, n_2) \in T(K) \cdot N(\mathbb{R})$ について $n = n_1 n_2 \in N(K)$ とおくととき, $\rho(n_1, n_2)((T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}}) = (T_{n\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}}$.

(d) 各 $\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ とその face τ について, $T_{\tau} \subset_{\text{open}} T_{\sigma}$ であるが, $(T_{\tau} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}} = (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}} \cap (T_{\tau} \times_{\mathbb{R}} X)$.

一方 (a)~(d) を満たす system の中で最大のものが唯一存在することが分かる。そこで,

(e) $\{(T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}}; \sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}\}$ は (a)~(d) のもとで最大とする。

(a), (b) により $\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ について $X_{\sigma}^{\text{off}} = T \setminus (T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{off}}$ とおくと X_{σ}^{off} は universal geometric quotient であり $X_{\sigma}^{\text{off}} \subset_{\text{open}} X_{\sigma}^{\text{geom}}$ となる。 H_{σ} の $T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X$ への作用は T の $T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X$ への作用と可換であり, 従って H_{σ} は $(T_{\sigma} \times_{\mathbb{R}} X)^{\text{ss}}$ に作用しその作用は X_{σ}^{comp} に descends する。そこで $X_{\sigma}^{\text{imm}} = \bigcap_{h \in H_{\sigma}} h \cdot X_{\sigma}^{\text{off}}$ とおくと $X_{\sigma}^{\text{imm}} \subset_{\text{open}} X_{\sigma}^{\text{comp}}$ であり X_{σ}^{imm} は H_{σ} で不変である。

$\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ に対して X_{σ}^{imm} が定義されたが 一般の

$\sigma \in I$ に対しては $g \in G(K)$ で $g\sigma \in X_*(T)_{\mathbb{R}}$ となるものをとり X_{σ}^{imm} を g でひねった $X_{g\sigma}^{\text{imm}}$ の copy として定義する。

然らば $\sigma \in I$ によって $X_{\sigma, \eta}^{\text{imm}} = X_{\eta}$ であり, σ が τ の face であるならば自然に $X_{\sigma}^{\text{imm}} \subset_{\text{open}} X_{\tau}^{\text{imm}}$ となる。そこで $X_I = \bigcup_{\sigma \in I} X_{\sigma}^{\text{imm}}$ を $\sigma \cap \tau = \emptyset$ なら $X_{\sigma}^{\text{imm}} \cap X_{\tau}^{\text{imm}} = X_{\eta}$, $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ なら $X_{\sigma}^{\text{imm}} \cap X_{\tau}^{\text{imm}} = X_{\sigma \cap \tau}^{\text{imm}}$ として定義する。 X_{σ}^{comp} 上の invertible sheaf $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{\text{comp}}}(d)$ から X_I 上の invertible sheaf $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ が作られ $G(K)$ は X_I 及び $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ に自然に作用することが分かる。

$\mathfrak{X}_I$ 及び $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ を X_I 及び $\mathcal{O}_{X_I}(d)$ の special fibre に沿った formal completion とする。然らば $G(K)$ は $\mathfrak{X}_I$ 及び $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ に作用する。いま torsion-free discrete subgroup $\Gamma \subset G(K)$ で $\Gamma \backslash G(K)$ が compact となるものを考えると Γ の $\mathfrak{X}_I$ への作用は Zariski topology に関して不連続的であり R -formal scheme category 上の quotient $\mathfrak{X}_{\Gamma} = \Gamma \backslash \mathfrak{X}_I$ がとれまた $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ は $\mathfrak{X}_{\Gamma}$ へ descent を持つ。即ち $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\Gamma}}(d) = \Gamma \backslash \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ 。 $\mathfrak{X}_{\Gamma}$ は R 上の of finite type である。

Remark (i) $G = \text{SL}_2$, $X = \mathbb{P}^1$ の場合, $d=2$ であって, $\mathfrak{X}_{\Gamma}$ は $\text{Spf}(R)$ 上 proper であり, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\Gamma}}(-2)$ は $\mathfrak{X}_{\Gamma,0} = \mathfrak{X}_{\Gamma} \times_R \mathbb{F}_2$ 上で ample であった。従って algebrization が出来た。

(ii) 一般に $\mathcal{X}_T$ は $\mathrm{Spf}(R)$ 上 proper とは限らない。例えば $G = \mathrm{SL}_2$ とし G の m 次対称表現を考え、それにより $X = \mathbb{P}^m$ に作用させる。そのとき、 $\mathcal{X}_T$ が R 上 proper となるのは $m = \text{odd}$ のときである。

$m \geq 3$, $m = \text{odd}$ のときに $\mathcal{X}_T$ が algebraizable かどうかは知らない。

(iii) $G = \mathrm{SL}_{l+1}$, $X = \mathbb{P}^l$ のときは後に述べる様に $d = l+1$ であって $\mathcal{X}_T$ は R 上 proper であり $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}(-(l+1))$ は $\mathcal{X}_{T,0}$ 上 ample である。しかし、一般の G と $X = G/P$ (P は特に maximal parabolic subgroup) については $\mathcal{X}_T$ は proper ではない様に思われる。しかし例えば $G = \mathrm{Sp}_2$, $X = \mathrm{Sp}_2 / \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ のときは $d = 2$ であって $\mathcal{X}_T$ は R 上 proper ではないが $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}(-2)$ は $\mathcal{X}_{T,0}$ 上 ample である。

3° p-adic unit ball

2° の data を $G = \mathrm{SL}_{l+1}$, $X = \mathbb{P}_R^l$, $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(1)$ と特殊化する。作用は自然なものを考える。然らば $d = l+1$ であり $\mathcal{X}_T$ は $\mathrm{Spf}(R)$ 上 proper であり $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}(-(l+1))$ は $\mathcal{X}_{T,0}$ 上 ample である。従って EGA III の GAGA により $\mathcal{X}_T$, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}(-(l+1))$ は algebraize されて X_T , $\mathcal{O}_{X_T}(-(l+1))$ となる。 X は $\mathcal{O}_X(\text{positive})$ が ample であつたが X_T は $\mathcal{O}_{X_T}(\text{negative})$

が ample となるところが興味深い。 X_π は R 上 locally a complete intersection であるが dualizing sheaf $\mathcal{O}_{X_\pi/R}$ に γ として $\mathcal{O}_{X_\pi/R} \cong \mathcal{O}_{X_\pi}(-(\ell+1))$ である。 $X_{\pi,\eta}$ は smooth であり、 X_π は regular scheme である。 $X_{\pi,0}$ は ℓ 次元有限単体複体 $\pi \backslash I$ で記述される。 即ち $X_{\pi,0}$ の成分 E と $\pi \backslash I$ の vertex U は bijective であって、成分 $E_1, \dots, E_m$ と対応する vertices $U_1, \dots, U_m$ について $E_1 \cap \dots \cap E_m \neq \emptyset \iff U_1, \dots, U_m$ はある simplex に含まれる。 次の表示が出来る。

$$\begin{aligned} X_\pi &= \text{Proj} \bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(X_\pi, \mathcal{O}_{X_\pi}(-\nu(\ell+1))) \\ &= \text{Proj} \bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(\mathfrak{X}_\pi, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\pi}(-\nu(\ell+1))) \\ &= \text{Proj} \bigoplus_{\nu \geq 0} \left[H^0(\mathfrak{X}_I, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(-\nu(\ell+1))) \right]^{\pi\text{-inv}} \end{aligned}$$

従って rank 有限の R -free module $H^0(\mathfrak{X}_I, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(-\nu(\ell+1)))^{\pi\text{-inv}}$ の元を保型形式と考えることが自然である。

筆者は次のことを証明しようとしている。 μ を $SL_{\ell+1}(K)$ の invariant measure として open compact subgroup $SL_{\ell+1}(R)$ に対して $\mu(SL_{\ell+1}(R)) = (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^\ell)$ となるものとする。 $\ell = \text{odd}$ なら負の measure である。

(Conj.) $X_{\pi,\eta}$ は $\mathbb{P}^\ell$ と proportional であって その proportional constant は $\mu(\pi \backslash SL_{\ell+1}(K))$ である。

即ち $i_1, \dots, i_k$ を positive integer として $i_1 + \dots + i_k = \ell$ なるものと

すなわち Chern number の間に

$$c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} [X_{T,\eta}] = \mu(T \backslash \mathrm{SL}_{\mathrm{dH}}(K)) \cdot c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} [P^l]$$

なる関係がある。

$l=1$ では容易。 $l=2$ のときは Mumford; An algebraic surface with K ample, $(K^2)=9$, $P_g=Q=0$, to appear, による。 $l=3$ のときも同様の方法で計算することが出来る。

以下では (conj) が成立つものとして話を進める。特に $l=1,2,3$ では

正 1 の。然らば Hirzebruch と同様に

$$\mathrm{rank}_R H^0(\mathcal{O}_I, \mathcal{O}_I(-\nu(l+1)))^{T\text{-inv}} = \binom{(l+1)\nu-1}{l} (-1)^l \mu(T \backslash \mathrm{SL}_{\mathrm{dH}}(K)).$$

for $\nu \geq 2$ when $\mathrm{ch}(K)=0$

for $\nu \gg 0$ when $\mathrm{ch}(K) \neq 0$.

また Yau の結果により次の (i)~(iii) は同値である。 $\mathbb{C}$ 上の non-singular projective variety V に対して, $n=\dim(V)$ とすると,

(i) V の universal covering は unit ball である。

(ii) V の canonical class は ample である V と P^n は proportional である。

(iii) V の canonical class は ample である $C_1^{n-2} C_2[V]: C_1^n[V] = C_1^{n-2} C_2[P^n]: C_1^n[P^n]$.

従って $\mathrm{ch}(K)=0$ のとき $X_{T,\eta}$ を任意に $\mathbb{C}$ 上の variety に specialize すれば、それを $\hat{X}_{T,\eta}$ と書くとき $\hat{X}_{T,\eta}$ の universal covering は 3次元 unit ball となる。

References

- [1] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compositio Math.*, 24 (1972), 129-174.
- [2] I.V. Čerednik, Towers of algebraic curves uniformized by discrete subgroups of $PGL_2(k_w) \times E$, *Mat. Sbor.*, 99 (141) (1976), 211-248.
- [3] ———, Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of $PGL_2(k_w)$ with compact quotients, *Mat. Sbor.*, 100 (142) (1976), 59-88.
- [4] V.G. Drinfel'd, Coverings of p -adic symmetric regions, *Funct. Anal. Appl.*, Vol. 10, No. 2 (1976), 109-115.
- [5] G.A. Mustafin, Non-archimedean uniformizations, *Mat. Sbor.* 105 (147) (1978), 207-238.

И. П.