

コホモロジー類が消滅する

2次元の複素多様体について

九 大 理 梶 原 肇二

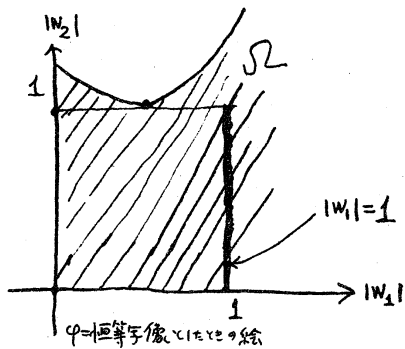
§ 1. 序

複素 Lie 群 L に対して, σ_L を L に値をもつ正則写像の芽全体で作る群の層とする。Kajiwara [7] はある可換な複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \sigma_L) = 0$ をみたす $\mathbb{C}^2$ の領域 Ω は正則領域であることを示した。本講演の主な目的は 2次元の Stein 多様体 S の領域 Ω が必ずしも可換でないある複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \sigma_L) = 0$ をみたせば Ω は Stein 多様体であることを示すことにある。これは講演者と風間氏との共同研究 Kajiwara-Kazama [8] の紹介である。

証明の主要な武器は Lie 群 L とその Lie 環 $\mathfrak{L}$ の随伴表現にある。Thullen [12] の領域 $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 1\} - \{(0, 0)\}$ にて様々のコホモロジー集合が消滅しないことを示した後 Ω が擬凸であることを示す。すると Docquier-Grauert [4] により Ω は Stein 多様体となる。

§2. 擬凸領域

本質的でないが, Douglis-Grauert [4] の結果を消化し易いように修正しよう。



$$D = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n; |w_1| \leq 1, |w_i| < 1 \ (i=2, \dots, n)\}$$

$$\partial D = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n; |w_1| = 1, |w_i| < 1 \ (i=2, \dots, n)\}$$

と置く。

つぎの条件をみたす $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ 上への双正則写像 φ は $\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω の境界写像とよばれる:

(1) $\varphi(D)$ は Ω の部分集合であるが, 相対コンパクトな部分集合でない。

(2) $\varphi(\partial D)$ は Ω の相対コンパクトな部分集合である。

$\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω は境界写像をもたないとき, p-凸 とよばれる。

Ω を $\mathbb{C}^n$ の開集合, v を $\mathbb{C}^n$ の単位ベクトルとしよう。 $z \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$E(v, z) = \{z + tv \in \mathbb{C}^n; t \in \mathbb{C}\}$$

と置く。 $d(v, x)$ を Ω の点 x と複素平面 $E(v, x)$ における $E(v, x) \cap \Omega$ の境界との距離としよう。 また $d(x)$ を Ω の点 x と $\mathbb{C}^n$ における Ω の境界との距離としよう。 勿論

$$d(x) = \inf_v d(v, x)$$

が成立している。

補題 1. $\mathbb{C}^n$ の p -凸領域 Ω に対して, $-\log d(x)$ は Ω で多重劣調和である。

証明. $-\log d(v, x)$ が各 v に対して Ω で多重劣調和であることを示せば十分である。ある v に対して

$$\Delta(x) = -\log d(v, x)$$

が Ω で多重劣調和でないとしよう。 v とは異なるある単位ベクトル e と $\mathbb{C}^n$ のある点 z に対して $\Delta(z+te)$ は開集合

$$G = \{t \in \mathbb{C}; z+te \in \Omega\}$$

にて劣調和でない。 Hörmander による劣調和関数の特徴付け ([6] の定理 1.6.3) を用いると G 内のある閉円板

$$K = \{t \in \mathbb{C}; |t-t_0| \leq r\}$$

と t_0 のある多項式 $p(t)$ に対して, ∂K では

$$\operatorname{Re} p(t) > \Delta(z+te)$$

が K では

$$\operatorname{Re} p(t) \geq \lambda(z+te)$$

が K の 1 点 $t^{(0)}$ では

$$\operatorname{Re} p(t^{(0)}) = \lambda(z+t^{(0)}e)$$

が成立する。 e は零ベクトルではないから $x \in \mathbb{C}^n$ の多項式 $f(x)$ があって

$$p(t) = f(z+te)$$

が成立する。

$$f(x) = \exp(-g(x))$$

は決して零としない値をとる整関数である。正数 c, d と $e, v_1, v_2, \dots, v_n$ が 1 次独立であるようなベクトル $v_1, \dots, v_n$ に対して

$$\varphi_{c,d}(w) = z + (nw_1 + t)e + cf(z + (nw_1 + t)e)w_2 + dw_3v_3 + \dots + dw_nv_n$$

は $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像である。あとは Degenier-Grauert [4] の 112 頁に於ける議論の真似すると適当な c, d に対して $\varphi_{c,d}$ は Ω の境界写像となることを示すことができる。これは Ω の p -凸性に反して矛盾である。故に $-\log d(t)$ は Ω で多重劣調和である。

Ω を複素多様体 M の開集合とする。 $\partial\Omega$ の点 z に対して、 z の開近傍 U から $\mathbb{C}^n$ の多重円板 V の上への双正則写像 ψ で $\psi(U \cap \Omega)$ が $\mathbb{C}^n$ の開集合として p -凸であるようなものがあるとき、 Ω は点 z で p^* -凸であると云う。補題 1 と Oka [11] によれば、このとき $\psi(U \cap \Omega)$ は $\mathbb{C}^n$ の正則開集合となる。 Ω はその各境界点で p^* -凸のとき単に p^* -凸と云う。 M が Stein 多様体ならば、 M の p^* -凸開集合は上に述べたように Cartan 擬凸、即ち Douglis-Grauert [4] の意味で p -凸である。よって Douglis-Grauert [4] による Stein 多様体である。要約すると

補題 2. Stein 多様体の p^* -凸領域は Stein 多様体である。

§ 3. Thullen の領域の不減コホモロジー集合

補題 3. D を連結複素多様体 X の空でない開部分集合、 L を複素 Lie 群、 a と b とを $a < b$ をみたす正数とする。

$$U = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times D; |z| < b\} \cup \{(z, x) \in \mathbb{C} \times X; a < |z| < b\}$$

から L の中への正則写像は

$$V = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times X; |z| < a\}$$

から L の中への正則写像へ接続される。

証明 V は U の正則拡大であるから、講究録、この巻の

吉田守[13]に発表されている結果を用いて連結集合に関する常套手段で示すことができる。

後述の補題4, 5, 6, 9, 10は背理法で証明し, そこに出てくる U, V は

$$U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, 0 < |z_2| < 1\}$$

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; 0 < |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

をあらわすが, いちいち断わらなリことにする。

補題4. 複素数 $\lambda \neq 0$ に対して, $U \cap V$ で

$$\frac{\lambda}{z_1 z_2} = f(z_1, z_2) - g(z_1, z_2)$$

をみたす U で正則な関数 f と V で正則な関数 g はない。

証明. 両辺の Laurent 展開の $\frac{1}{z_1 z_2}$ の係数を調べれば $\lambda = 0$ となり矛盾である。

補題5. $\mathcal{L}$ を可換複素 Lie 群, $\exp: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ の Lie 環 $\mathbb{C}^m$ から $\mathcal{L}$ の中への指数写像, X を $\mathbb{C}^m$ の零でないベクトルとする。 $W = U \cap V$ で

$$\exp\left(\frac{X}{z_1 z_2}\right) = f g^{-1}$$

をみたす U から $\mathcal{L}$ の中への正則写像 f と V から $\mathcal{L}$ の中への正

則写像 γ はなり。

証明. L は可換であると考えよう。

$$U^\# = \{(z_1, u_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, \operatorname{Re} u_2 < 0\},$$

$$V^\# = \{(u_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} u_1 < 0, |z_2| < 1\},$$

$$W^\# = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} u_1 < 0, \operatorname{Re} u_2 < 0\}$$

は、それぞれ、 U, V, W の普遍被覆多様体である。 $U^\#, V^\#$ の単連結性より、それぞれ $U^\#, V^\#$ で

$$f(z_1, e^{u_2}) = \exp F(z_1, u_2),$$

$$g(e^{u_1}, z_2) = \exp G(u_1, z_2)$$

が成立するような $F \in H^0(U^\#, \mathcal{O}^m)$, $G \in H^0(V^\#, \mathcal{O}^m)$ がある。勿論 $\mathcal{O}$ は正則関数の芽全体の作る層である。 $W^\#$ も連結であるから、 $W^\#$ で

$$\frac{X}{e^{u_1+u_2}} = F(e^{u_1}, u_2) - G(u_1, e^{u_2}) + c$$

が成立するような $\exp$ の核に属するベクトル c がある。これより $F(e^{u_1}, u_2)$, $G(u_1, e^{u_2})$ は、それぞれ、変数 u_2 と u_1 に関して周

期 $2\pi i$ をもつ。したがって $(z_1, z_2) \in U$ または $\in V$ に対して, それぞれ, $z_2 = e^{u_2}$ $z_1 = e^{u_1}$ をみたす u_2, u_1 を用いて

$$H(z_1, z_2) = F(z_1, u_2) + b, \quad K(z_1, z_2) = G(u_1, z_2)$$

とすると, $H \in H^0(U, \mathcal{O}^m)$ と $K \in H^0(V, \mathcal{O}^m)$ はうまく定義されている。

$U \cap V \neq \emptyset$

$$\frac{X}{z_1 z_2} = H(z_1, z_2) - K(z_1, z_2)$$

が成立するから補題4に反し矛盾である。

補題6. B を零でない固有値をもつ (n, n) 行列とする。

$U \cap V \neq \emptyset$

$$\exp\left(\frac{B}{z_1 z_2}\right) = F G^{-1}$$

をみたす $F \in H^0(U, \mathcal{O}_{GL(n, \mathbb{C})})$ と $G \in H^0(V, \mathcal{O}_{GL(n, \mathbb{C})})$ はない。

証明. B の固有値を $\lambda_1 (\neq 0), \lambda_2, \dots, \lambda_m$ としよう。行列式が 0 でない (n, n) 行列 P で $\Lambda = P B P^{-1}$ が上三角行列

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

となるようなものがある。これより $U \cap V \neq \emptyset$

$$(PF)(PG)^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(\frac{\lambda_1}{z_1 z_2}) & & & \\ & \exp(\frac{\lambda_2}{z_1 z_2}) & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(\frac{\lambda_n}{z_1 z_2}) \end{bmatrix}$$

さえる。 f と g とを, それぞれ, $(PF)^{-1}$ と $(PG)^{-1}$ の第 1 列とすれば, $U \cap V$ で

$$\exp(\frac{\lambda_1}{z_1 z_2}) f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2)$$

が成立する。行列式が 0 でない行列の各列は零ベクトルではないので, ある j に対して f の第 j 成分 $f_j(z_1, z_2)$ はある点で零でないようにとれる。このとき f_j と g_j とは恒等的に零ではない。Thullen [12] より $U \cup V$ ですべての乗法的 Cousin 分布は解をもつから, $U \cup V$ の乗法的 Cousin 分布 $\{(U, f_j), (V, g_j)\}$ は解 h をもつ。即ち $U \cup V$ の正則関数 h に対して $h' = \frac{f_j}{h}$ と $h'' = \frac{g_j}{h}$ は, それぞれ, U と V で値零をとらない正則関数である。乗法群 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に値をもつような正則関数の芽全体の作る層を $\mathcal{O}^*$ とすれば, $h' \in H^0(U, \mathcal{O}^*)$ と $h'' \in H^0(V, \mathcal{O}^*)$ は $U \cap V$ で

$$\exp(\frac{\lambda_1}{z_1 z_2}) h'(z_1, z_2) = h''(z_1, z_2)$$

をみたすので $L = \mathbb{C}^*$ のとき補題5に反し、矛盾である。

上の方法では B の固有値がすべて零のとき補題6は証明できない。この場合は少しややこしくなるが、以下に述べたようにどうにか切り抜けられる。

補題7. $H(x, y)$ を閉正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ で連続な関数とする。

$$H_{00}(x, y) = H(x, y)$$

$$H_{p+1q}(x, y) = \int_0^x H_{pq}(\lambda, y) d\lambda \quad (p, q \geq 0)$$

$$H_{pq+1}(x, y) = \int_0^y H_{pq}(x, t) dt \quad (p, q \geq 0)$$

で $[0, 1] \times [0, 1]$ で連続関数列 $\{H_{pq}(x, y); p, q \geq 0\}$ を定義する。各 $p, q \geq 1$ に対して

$$H_{pq}(1, 1) = 0$$

が成立するならば、 $H(x, y)$ は $[0, 1] \times [0, 1]$ で恒等的に零である。

証明. 微積分学の有名な演習問題より $[0, 1] \times [0, 1]$ で各 $p, q \geq 1$ に対して

$$H_{pq}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{(x-\lambda)^{p-1} (y-t)^{q-1}}{(p-1)! (q-1)!} H(\lambda, t) d\lambda dt$$

をえよ。各 $p, q \geq 1$ に対して $H_{pq}(1, 1) = 0$ であるから

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-\lambda)^{p-1} (1-t)^{q-1} H(\lambda, t) d\lambda dt = 0$$

をえら。 $L^2([0,1] \times [0,1])$ で $\{(1-\lambda)^{p-1} (1-t)^{q-1}; p, q \geq 1\}$ の張る部分空間は稠密であるから、 $H(\lambda, t)$ は $[0,1] \times [0,1]$ で恒等的に零である。

補題 8. $\{a_{ij}; i, j \geq 0\}$ を正数列 M, R に対して

$$|a_{ij}| \leq M R^{i+j} \quad (i, j \geq 0)$$

をみたす数列とする。各 $p, q \geq 1$ に対して

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{a_{ij}}{(p+i)!(q+j)!} = 0$$

が成立すれば、各 $i, j \geq 0$ に対して $a_{ij} = 0$ をえら。

証明. 次式で定義される整関数列 $\{H_{pq}(z_1, z_2); p, q \geq 0\}$ は次々に積分したものに成っている。

$$H_{pq}(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{a_{ij}}{(p+i)!(q+j)!} z_1^{p+i} z_2^{q+j}$$

仮定より各 $p, q \geq 1$ に対して $H_{pq}(1, 1) = 0$ が成立しているから、補題 7 と一致の定理より $H(z_1, z_2)$ は恒等的に零である。

補題 9. 複素数 $\lambda \neq 0$ に対して、 $U \cap V$ で

$$h(z_1, z_2) \exp\left(\frac{\lambda}{z_1} + \frac{\lambda}{z_2}\right) = f(z_1, z_2) - g(z_1, z_2)$$

をみたす $U \cup V$ で正則な恒等的に零でない関数 h , U で正則な関数 f , V で正則な関数 g はない。

証明. h は $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ で正則になるから, その Taylor 展開

$$h(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j$$

を上式に代入し, 上式の両辺を Laurent 展開し $\frac{1}{z_1^p z_2^q}$ の係数を調べると, 各 $p, q \geq 1$ に対し

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{a_{ij} i^p j^q}{(p+i)!(q+j)!} = 0$$

をえる。補題 8 より h は恒等的に零となり矛盾である。

補題 10. B を零行列でない (m, m) 行列で, その固有値はすべて零であるとする。 $U \cap V$ で

$$\exp(h(z_1, z_2) \exp(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}) B) = F G^{-1}$$

をみたすような $U \cup V$ で正則な恒等的に零でない正則関数 h , $F \in H^0(U, \mathcal{O}_{GL(m, \mathbb{C})})$, $G \in H^0(V, \mathcal{O}_{GL(m, \mathbb{C})})$ はない。

証明. $U \cap V$ で

$$h(z_1, z_2) = h(z_1, z_2) \exp(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2})$$

とおく。行列式が零でない (m, m) 行列 P を適当にとり $\Lambda = P B P^{-1}$

を Jordan の標準形

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

に直レ、対角線の一つ上の斜線の要素 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m-1}$ のみが
零でない可能性をもつようにレ、しかも $\rho_1 = 1$ で各 ρ_i は 0 ま
たは 1 であるようにできる。この Λ の性質を用いて、直接整
級数展開を計算して

$$\exp(t\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 & t\rho_1 & \frac{t^2 \rho_1 \rho_2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1} \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t\rho_2 & \cdots & \frac{t^{m-2} \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_{m-1}}{(m-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\rho_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

という上三角行列をえぬが、我々が必要なのは第 1 列と第 2
列だけである。 $U \cap V$ で

$$h(k\lambda) = (PF \times PG)^{-1}$$

が成立してゐる。 $(PF)^{-1}$ と $(PG)^{-1}$ の (i,j) 成分を、それぞれ、 f_{ij} と g_{ij} とおくと、これらは U と V で正則な関数である。 U の定式で $(PF)^{-1}$ なる行列の第 1 列は零ベクトルでないから、ある i に対してその第 i 成分は零でない。即ち f_{i1} は恒等的に零ではない。 $U \cap V$ で

$$f_{p1} = g_{p1}, \quad f_{p1}k + f_{p2} = g_{p2}$$

をえる。これより

$$h = \begin{cases} f_{p1}, & U \text{ では} \\ g_{p1}, & V \text{ では} \end{cases}$$

これを定義すると、 h は $U \cup V$ でうまく定義された恒等的に零ではない正則関数であり、 $g_{p2} \in H^0(V, \mathcal{O})$, $f_{p2} \in H^0(U, \mathcal{O})$ に対して $U \cap V$ で

$$h^2 = g_{p2} - f_{p2}$$

が成立し、補題 9 に反し矛盾である。

§ 4. Stein 多様体の領域

B を零行列でない (m, m) 行列とする。複素多様体 M は次の系

件をみたすとき B -正規という:

M の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ と任意の $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ に対して, $\{g_i\} \in C^0(\mathcal{U}, GL(m, \mathbb{C}))$ があって $\{g_i f_{ij} B\} \in Z^1(\mathcal{U}_{GL(m, \mathbb{C})})$ が $\{g_i\}$ のコバウンダリーである。

補題 11. 次の条件 (1), (2), (3) のどれか一つをみたす 2次元の Stein 多様体 S の領域 Ω は p^* -凸である:

- (1) 零行列でない (m, m) 行列 B に対して, Ω は B -正規である。
- (2) ある可換複素 Lie 群に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ が成立する。
- (3) Ω でのすべての加法的 Cousin 分布は解をもつ。

証明. 背理法による。 Ω がそのような境界点 x_0 で p^* -凸でないとしよう。 x_0 での局所座標は S での大域的な正則関数 f_1, f_2 であたえられる。即ち (f_1, f_2) はある正数 A に対して

$$\{x \in S; |f_1(x)| < 3A, |f_2(x)| < 3A\}$$

の x_0 を含む連結成分 U' で座標系をなす。写像 Ψ を

$$\Psi(x) = (z_1, z_2) = (f_1(x), f_2(x))$$

で定義すると, Ψ は U' を多重円板

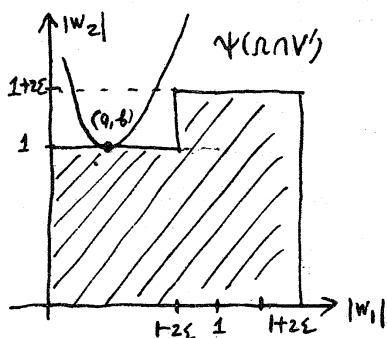
$$U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 3A, |z_2| < 3A\}$$

の上に双正則にうつす。

$$V' = \{x \in U'; |f_1(x)| < A, |f_2(x)| < A\}$$

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < A, |z_2| < A\}$$

とす。 Ω はその境界点 x_0 で p^* -凸でないから、 $\mathbb{C}^2$ の開集合 $\Psi(\Omega \cap V')$ は $\mathbb{C}^2$ の p -凸領域ではない。定義より次の条件を満たす $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の上への双正則写像 φ があつた:



φ = 恒等写像 ときどきの絵
実際は $\square$ が少し異なるが本
質的には同じなのを表現させて

(a)

$$D = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; |w_1| < 1+2\epsilon, |w_2| < 1\}$$

$$\cup \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; 1-2\epsilon < |w_1| < 1+2\epsilon, |w_2| < 1+2\epsilon\}$$

に対して $\varphi(D) \subset \Psi(\Omega \cap V')$ が成立する。

ただし $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ 。

(b)

$$E = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; |w_1| < 1+2\epsilon, |w_2| < 1+2\epsilon\}$$

に対して $\varphi(E) \subset V$ が成立する。

(c)

$$z^0 = (a, b) \in \partial(\Psi(\Omega \cap V')), |a| \leq 1-2\epsilon, |b| = 1$$

をみたす $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ があつた。

φ は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の上への双正則写像であるから、

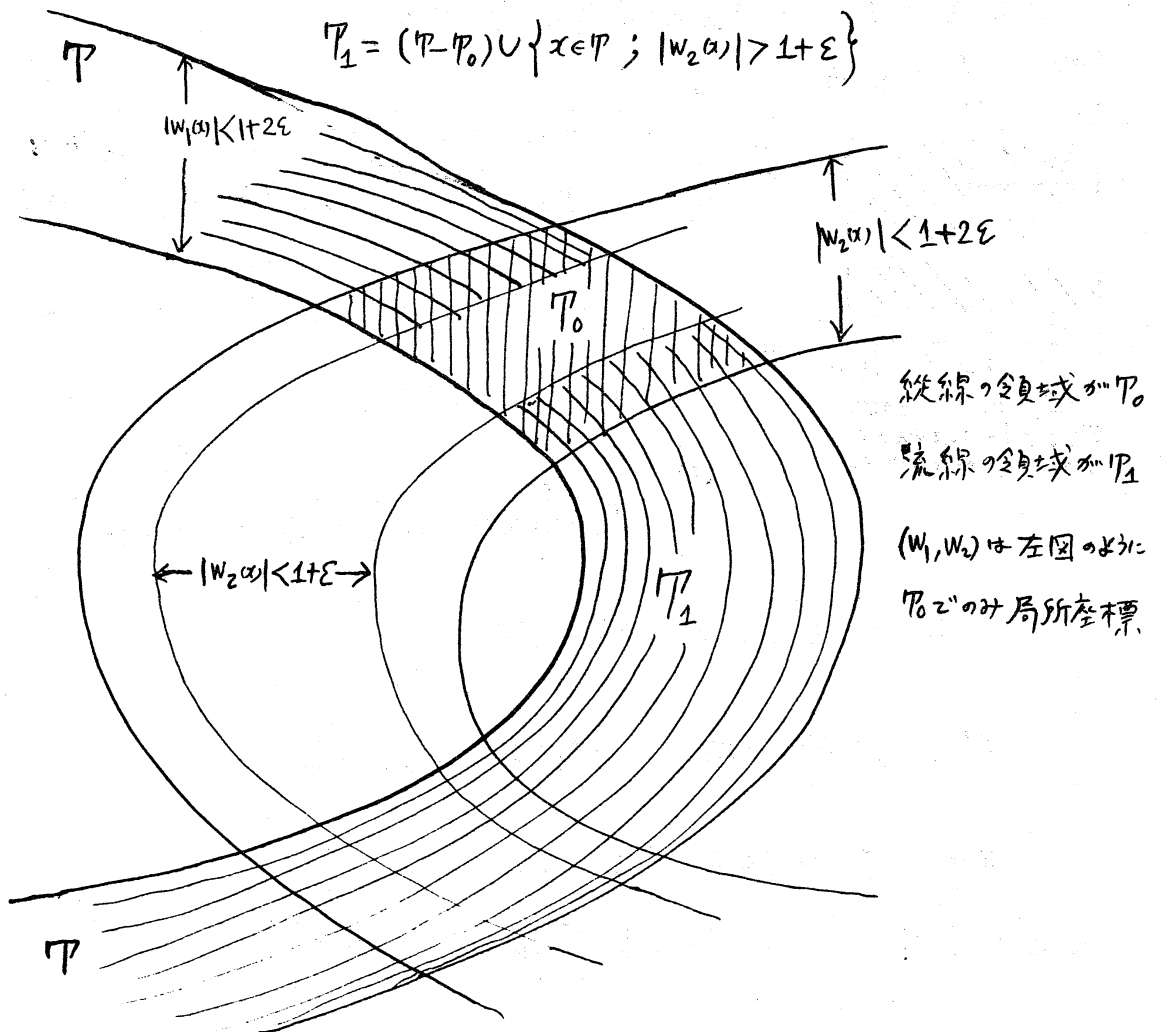
$$(w_1(x), w_2(x)) = \varphi^{-1}(f_1(x), f_2(x))$$

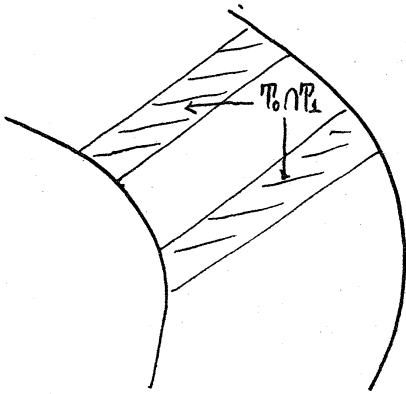
で S 上の正則関数 $w_1(x)$ と $w_2(x)$ を定義する。次のようにおこう。

$$\mathcal{V} = \{x \in S; |w_1(x)| < 1 + 2\varepsilon\},$$

$$\mathcal{V}_0 = \{x \in V'; |w_1(x)| < 1 + 2\varepsilon, |w_2(x)| < 1 + 2\varepsilon\},$$

$$\mathcal{V}_1 = (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0) \cup \{x \in \mathcal{V}; |w_2(x)| > 1 + \varepsilon\}$$





$$u(x) = \frac{1}{w_2(x) - b}$$

は $P_0 \cap P_1$ で正則である。 $\mathcal{U} = \{P_0, P_1\}$ は $\mathcal{P}$ で開被覆で u は $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ の元をあたえる。 $\mathcal{P}$ は Stein 多様体であるから $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ が成立

している。したがって $P_0 \cap P_1$ で

$$u(x) = p(x) - h(x)$$

をみたすような $h \in H^0(P_0, \mathcal{O})$ と $p \in H^0(P_1, \mathcal{O})$ がある。

$$v(x) = \begin{cases} p(x), & x \in P_1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{w_2(x) - b} + h(x), & x \in P_0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で v を定義すると、 v は $\mathcal{P}$ でうまく定義された有理型関数となる。

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \cap P_0; w_2(x) \neq b\} \cup (\Omega \cap (\mathcal{P} - P_0))$$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; w_1(x) \neq a\}$$

とすべく, $\mathcal{R} = \{\Omega_0 \cap \Omega_1\}$ は Ω の開被覆である。

$$D_0 = \{(w_1, w_2) \in D; w_2 \neq 0\}, D_1 = \{(w_1, w_2) \in D; w_1 \neq a\}$$

$$E_0 = \{(w_1, w_2) \in E; w_2 \neq 0\}, E_1 = \{(w_1, w_2) \in E; w_1 \neq a\}$$

とすべく。

(1) の 1. 零でない固有値をもつ行列 B に対して, Ω が B -正規のとき。

$$k(x) = \frac{\sqrt{x}}{w_1(x) - a}$$

は $\Omega_0 \cap \Omega_1$ で正則な $\mathbb{P}$ で有理型な $\mathbb{C}$ 関数である。したがって k は $Z^1(\mathcal{R}, 0)$ の元をあたえる。仮定より Ω は B -正規であるから, $\Omega_0 \cap \Omega_1$ で

$$\exp(k(x)B) = G_0 G_1^{-1}$$

をみたすような $G_0 \in H^0(\Omega_0, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ と $G_1 \in H^0(\Omega_1, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ があ
る。それぞれ D_0 と D_1 で

$$g_0(w_1, w_2) = G_0 \circ (\gamma|V')^{-1} \circ \varphi$$

$$g_1(w_1, w_2) = \exp\left(\frac{k \circ (\gamma|V') \circ \varphi}{w_1 - a} B\right) (G_1 \circ (\gamma|V')^{-1} \circ \varphi)$$

とかくと, $g_0 \in H^0(D_0, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ と $g_1 \in H^0(D_1, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ は $D_0 \cap D_1$ で

$$\exp\left(\frac{B}{(w_1-a)(w_2-b)}\right) = g_0 g_1^{-1}$$

をみたす。

$$g_0(w_1, w_2) = \exp\left(\frac{B}{(w_1-a)(w_2-b)}\right) g_1(w_1, w_2)$$

が左辺と右辺の定義域の合併で g_0 は正則であるから, g_0 は

$$\begin{aligned} & \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; |w_1| < 1+2\varepsilon, |w_2| < 1\} \\ & \cup \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; 1 < |w_1| < 1+2\varepsilon, |w_2| < 1+2\varepsilon, w_2 \neq b\} \end{aligned}$$

で正則である。したがって、補題3より g_0 は $H^0(E_0, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ の元へ接続される。同様にして g_1 も $H^0(E_1, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ の元へ接続される。E は点 (a, b) の近傍で $E_0 \cup E_1 = E - \{(a, b)\}$ であるから、これは補題6に反し矛盾である。

(4)の2。固有値がすべて零である行列 B に対して Ω が B -正規のとき。

$$h(u) = \exp\left(\frac{1}{w(u)-a} + v(u)\right)$$

に対して、(4)の1と同様の議論をすれば、補題10に反する矛盾に達する。

(2) 可換複素 Lie 群 L に対し $H^1(\Omega, \sigma_L) = 0$ のとき。

指数写像 $\exp: \mathbb{C}^m \rightarrow L$ と $\mathbb{C}^m$ の零でないベクトル X に対し (1) の 1 で定義した $g(x)$ を用いて

$$\exp(g(x)X) = G_0 G_1^{-1}$$

なる $G_0 \in H^0(\Omega_0, \sigma_L)$ と $G_1 \in H^0(\Omega_1, \sigma_L)$ を考える。あとは (1) の 1 と同様の議論をすると補題 5 に反する矛盾に達する。

(3) Ω ですべて 2 つ加法的 Cousin 分布が解をもつとき。

(4) の 1 の g に対し 2 つ加法的 Cousin 分布 $\{(\Omega_0, g_0(x)), (\Omega_1, 0)\}$ の解 $G_1(x)$ は Ω で有理型で、 Ω_1 では正則で、 Ω_0 では $G(x) = g(x) - G_1(x)$ が正則である。あとは (1) の 1 と同様の議論をくり返すと補題 4 に反する矛盾に達する。

§5. 主定理

M を複素多様体、 L を複素 Lie 群とする。 $H^1(M, \sigma_L)$ が単純な元しか含まぬとき、いりかえれば、 M 上の L を構造群とするすべての解析的主ファイバー・バンドルが解析的に単純なとき、 $H^1(M, \sigma_L) = 0$ とかく。

補題 12. X を連結複素多様体、 L を複素 Lie 群、 L_1 を L の単位元を含む連結成分のなす複素 Lie 群とする。 $H^1(X, \sigma_L) = 0$ ならば $H^1(X, \sigma_{L_1}) = 0$ である。

証明. Ω の連結性を用いて常套手段で証明できる。

定理. Ω を 2 次元の Stein 多様体の領域, L を複素 Lie 群とする。 $H^1(\Omega, \sigma_L) = 0$ ならば, Ω は Stein 多様体である。

証明. 補題 12 より L は連結であると仮定してよい。また補題 2 より Ω が p^* -凸であることを示せばよい。 L が可換なときは補題 11 の (2) より Ω は p^* -凸であるから, L は可換でないとしてよい。 L の次元を m とし, $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ と $\mathcal{L}$ とを, それぞれ, $GL(m, \mathbb{C})$ と L の Lie 環とする。また $\exp: \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ と $\exp: \mathcal{L} \rightarrow L$ を指数写像, $\text{ad}: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$, $\text{Ad}: L \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ を随伴表現とする。任意の $t \in \mathbb{C}$ と $X \in \mathcal{L}$ に対し

$$\text{Ad} \exp(tX) = \exp(t \text{ad} X)$$

が成立してゐる。 L は可換でないから, $B = \text{ad} X$ が零行列でないような $X \in \mathcal{L}$ がある。 $\mathcal{U}$ を Ω の開被覆, $\{f_{ij}\}$ を $Z^1(\mathcal{U}, \sigma)$ の元とする。 $H^1(\Omega, \sigma_L) = 0$ であるから, $\{\exp(f_{ij} X)\} \in Z^1(\mathcal{U}, \sigma_L)$ は $C^0(\mathcal{U}, \sigma_L)$ の元 $\{F_{ij}\}$ のコバウンダリである。すると $Z^1(\mathcal{U}, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ の元 $\{\exp(f_{ij} B)\}$ は $C^0(\mathcal{U}, \sigma_{GL(m, \mathbb{C})})$ の元 $\{\text{Ad} F_{ij}\}$ のコバウンダリである。よって Ω は B -正規となり, 補題 11 の (1) より Ω は p^* -凸である。

系 1. Ω を 2 次元 Stein 多様体の領域とする。 Ω でのすべての加法的 Cousin 分布が解をもつための必要十分条件は Ω が

Stein 多様体であることを示す。

系 2. Ω を 2 次元の Stein 多様体の領域とし, L を連結可換複素 Lie 群, Γ を L の基本群とする。 $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) = 0$ が成立するための必要十分条件は Ω が $H^2(\Omega, \mathcal{O}_L) = 0$ を満たす Stein 多様体であることを示す。

証明 完全列

$$\cdots \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O}^m) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) \rightarrow H^2(\Omega, \Gamma) \rightarrow H^2(\Omega, \mathcal{O}^m) \rightarrow \cdots$$

と定理を眺めればよい。

複素 Lie 群 L に値をもつ連続写像の芽全体の作る層を $\mathcal{O}_L$ とかくと, 定理と Grauert [5] による図の原理の肯定的解答より

系 3. Ω を 2 次元の Stein 多様体の領域, L を複素 Lie 群とする。 $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) = 0$ が成立するための必要十分条件は Ω が $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) = 0$ を満たす Stein 多様体であることを示す。

16 頁の D は位相的に 1 点に縮めることができる $\mathbb{C}^2$ の領域であるから $H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$ が任意の複素 Lie 群 L に対して成立する。もしも $H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$ となれば, 定理より D は正則領域となり矛盾である。したがって任意の複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) \neq 0$ が成立する。よって標準写像 $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)$ は単射であり, 図の原理は成立しない。Grauert [5] にある空間が Stein であるという条件は除くことができない。

引用文献

1. H. Behnke und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zur vorgegebenen Null- und Pollstellenflächen, Jber. Deut. Math. Verein. 47(1937), 177-192.
2. H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France 59(1931), 46-69.
3. H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, C. R. Paris 199(1934), 1284-1287.
4. F. Docquier und H. Grauert, Levisches Problem und Runge'scher Satz für Teilgebiets Steinscher Mannigfaltigkeit, Math. Ann. 140(1960), 94-123.
5. H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann. 68(1958), 263-273.
6. L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, D. Van Nostrand Company, 1966.
7. J. Kajiwar, Some extension of Cartan-Behnke-Stein's theorem, Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 2(1966), 133-156.
8. J. Kajiwar and H. Kazama, Two dimensional complex manifolds with vanishing cohomology sets (to appear).

9. K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables II ; Domain d'holomorphie, J. Sci. Hiroshima Univ. 7(1937), 115-130.
10. K. Oka, ——— III ; Deuxième problème de Cousin, J. Sci. Hiroshima Univ. 19(1938), 7-19.
11. K. Oka, ——— IX ; Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. Math. 23(1953), 97-155.
12. P. Thullen, Sur les deuxieme probleme de Cousin, C. R. Paris 200(1935), 720-721.
13. 青田 守, 正則写像の接続について, 数理解析研究所講究録, Cousin の問題 (1972).