

Landweber - Novikov 作用素について

九 大 理 菅 原 民 生

MU を complex cobordism spectrum, とする. ω を 整数 n の 分割, $S_\omega: MU^k(X) \rightarrow MU^{k+2n}(X)$ を ω に対する Landweber Novikov 作用素 とする. ここでは 次の 二つの 場合 について 考察 する: (i) $X = pt$ の 場合. $MU^*(pt) \cong \pi_*(MU)$ で, これは formal group law $F(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$ の 係数 a_{ij} で 生成 されている. そこで $S_\omega(a_{ij})$ を 求める の が 本 の 目的 である. (この 部分 は 鎌田 正良 氏 (九大) と の 共同 研究). (ii) 次の 目的 は $X = HP^n$ (n 次元 四元数 体 射影 空間) について

$$MU^*(HP^n) = \pi_*(MU)[y]/(y^{n+1})$$

となる の で $S_\omega(y)$ を 求める こと である. どちら も 詳しい 証明 を 省いた の で, 末尾 の 論文 を 参照 されたい.

§ 1 $\omega = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ を 整数 n の 分割, r_j を $k_j = j$ となる ω の 成分 の 数, $R = (r_1, r_2, \dots)$ とする. $S_\omega = S^R$ を これら に対す

る Landweber - Novikov 作用素とする。

命題 1.1 (Landweber) ξ を X 上の complex line bundle, $c_1(\xi)$ を その first Chern class とする。このとき

$$S_w(c_1(\xi)) = \begin{cases} c_1(\xi)^{k+1} & w = (k) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

CP^m 上の canonical line bundle を η_c とすると $MU^2(CP^m \times CP^m)$ において formal group law は

$$c_1(\eta_c \hat{\otimes} \eta_c) = F(X, Y) = \sum a_{ij} X^i Y^j$$

$$X = c_1(\eta_c) \times 1, \quad Y = 1 \times c_1(\eta_c)$$

で特徴づけられる。これに命題 1.1 を適用すると

$$\sum_{R_1 + R_2 + R_3 = R} S^{R_1}(a_{ij}) S^{R_2}(X^i) S^{R_3}(Y^j) = \begin{cases} (\sum a_{ij} X^i Y^j)^{k+1} & R = (0, \dots, 0, 1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$R = (r_1, r_2, \dots)$ について $|R| = \sum r_i$, $\|R\| = \sum i r_i$ とし, $Q = (q_{10}, q_{01}, q_{11}, q_{21}, q_{12}, \dots)$ について $|Q| = \sum q_{ij}$, $\|Q\| = \sum i q_{ij}$, $\|Q\| = \sum j q_{ij}$ とすると 次の定理をうる:

定理 1.2

(i) 正の整数 p, q, k について

$$S_{(k)}(a_{pq}) + (p-k) a_{p-k, q} + (q-k) a_{p, q-k} = \sum_q \binom{k+1}{q} a^q$$

ここに $\sum_Q$ は $|Q|=k+1$, $\|Q\|=p$, $|Q|=q$ を動くものとする.

(ii) 正の整数 p, q と $R \neq (0, \dots, 0, 1)$ について,

$$\sum_{R_1+R_2+R_3=R} \binom{i}{R_1} \binom{j}{R_2} S^{R_3}(a_{ij}) = 0, \quad i=p-\|R_1\|, j=q-\|R_2\|.$$

これから次の系をうる:

系 1.3 (i) $S_{(k)}(a_{p,1}) = (2k+1-p) a_{p-k,1}$

(ii) $S_{(p+q-1)}(a_{p,q}) = \binom{p+q}{p}$

系 1.4 $\sum_{r_1+r_2+r_3=r} \binom{i}{r_1} \binom{j}{r_2} S^{(r_3)}(a_{p,q}) = 0, \quad i=p-r_1, j=q-r_2$

系 1.5 $\sum_{i=0}^n \binom{p-i}{i} S^{(n-i)}(a_{p-i,1}) = 0$

§ 2 $H_{m,n}$ を $CP^m \times CP^n$ の $C^H(\eta_c \hat{\otimes} \eta_c) = C^H(\eta_c) \times 1 + 1 \times C^H(\eta_c)$ に関する dual sub-manifold とする. この § では $S_{\omega}[H_{m,n}]$ の求め方を簡単に述べる. $\pi_*(MU)$ の元について, $P_m = [CP^m]$, $A_m = a_{m,1}$ と書くことにする.

命題 2.1

$$[H_{m,n}] = \sum_R \left\{ \sum_{R_1+R_2=R} (-1)^{k_1+k_2} \binom{k_1}{R_1} \binom{k_2}{R_2} a_{ij} \right\} A^R$$

$$= 1 = A^R = A_1^{r_1} A_2^{r_2} \dots, \quad i=m-\|R_1\|, j=n-\|R_2\|, k_1=|R_1|, k_2=|R_2|.$$

これは式 $(\sum_n P_n X^n)(\sum_i A_i X^i) = 1$ と $[H_{m,n}] = \sum_{i,j} a_{ij} P_{m-i} P_{n-j}$ を組み合わせることにより得られる. 命題 2.1 に定理 1.2 を適用すると $S_w[H_{m,n}]$ はすべて原理的には求められることになる.

§3 CP^n と HP^n の cobordism ring は次の通り.

$$MU^*(CP^n) = \pi_*(MU)[x]/(x^{n+1})$$

$$MU^*(HP^n) = \pi_*(MU)[y]/(y^{n+1}).$$

fiber と $Sp(1)/U(1) \cong S^2$ とする fibre bundle $\tilde{\pi}: CP^{2n+1} \rightarrow HP^n$ について Atiyah-Hirzebruch の spectral seq. の議論から $\tilde{\pi}^*: MU^*(HP^n) \rightarrow MU^*(CP^{2n+1})$ は単射である.

ところで $MU^*(CP^{2n+1})$ の元 $x = c_1(\eta_c)$ に対する S_w の作用は命題 1.1 によってわかっているので $\tilde{\pi}^*(y)$ がわかれば $S_w(y)$ がわかることになる.

$\eta_c: C^{4n+3} \rightarrow CP^{2n+1}$, $\eta_H: S^{4n+3} \rightarrow HP^n$ とそれぞれ $U(1)$, $Sp(1)$ canonical line bundles とするとき, 次の $U(2)$ bundle map が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \eta_c \oplus \bar{\eta}_c & \longrightarrow & C\eta_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ CP^{2n+1} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & HP^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} y &= p_1(\eta_H) = -c_2(C\eta_H) \quad \text{とすると} \quad \tilde{\pi}^*(y) = -\tilde{\pi}^*(c_2(C\eta_H)) \\ &= -c_2(\tilde{\pi}^! C\eta_H) = -c_2(\eta_c \oplus \bar{\eta}_c) = -c_1(\eta_c) c_1(\bar{\eta}_c). \end{aligned}$$

よって $x = C_1(\eta_c)$, $\bar{x} = C_1(\bar{\eta}_c)$ とすると

補題 3.1 上記の Notation で $\bar{y}^*(y) = -x\bar{x}$.

そこで $\bar{x} = \sum \lambda_j x^{j+1}$ において $\eta_c \hat{\otimes} \bar{\eta}_c = 1$, すなわち

$$F(x, \bar{x}) = C_1(\eta_c \hat{\otimes} \bar{\eta}_c) = 0$$

と利用すると λ_j は次の漸化式によって求まる

補題 3.2 各整数 r について

$$\sum_{i,j,R} a_{ij} \binom{j}{R} \lambda^R = 0, \quad i+j+\|R\|=r.$$

そこで $S_\omega(y) = \sum_i d_{\omega,i} y^i$ において $d_{\omega,i} \in \pi_*(MU)$ を求めると次の定理をうる.

定理 3.3

(i) $\omega = (k_1, k_2, \dots, k_r)$, $r \geq 3$ ならば各 i について $d_{\omega,i} = 0$

$$(ii) \quad d_{(k_1, k_2), i} = \begin{cases} (-1)^{k_1} d_{(k_2 - k_1), i - k_1} & i > k_1 \\ 0 & i \leq k_1 \end{cases}$$

$$(iii) \quad d_{(k, k), i+1} = \begin{cases} (-1)^k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

(iv) $d_{(k), i}$ は次の漸化式を満たす:

$$\sum_i (-1)^i d_{(k), i+1} \sum_{\|R\|=r-2i} \binom{i}{R} \lambda^R = \begin{cases} 0 & r < k \\ 1 + (-1)^k & r = k \\ \sum_{\|R\|=r-k} \binom{k}{R_1} \lambda^{R_1} & r > k \end{cases}$$

以上で S_ω の $MU^*(HP^n)$ における作用は原理的に計算可能となった.

§4 $\pi_7(S^4) \ni \{f\}$, $X = S^4 \cup_f e^8$ を考える. cofibration $S^4 \rightarrow X \rightarrow S^8$ から exact sequence

$$0 \rightarrow MU^*(S^8) \rightarrow MU^*(X) \rightarrow MU^*(S^4) \rightarrow 0$$

が得られる. $MU^*(X)$ の 2 つの生成元を e_4, e_8 とし, $A = 2S_{(2)} + 3S_{(1,1)}$ を考える. $A(e_4) = \lambda e_8$ ($\lambda \in \pi_0(MU) \cong \mathbb{Z}$) とすると $\lambda \bmod 12$ は生成元 e_4 のとり方に依らない. 実際 e_4 を $e'_4 = e_4 + (Ma_{21} + Na_{11}^2)e_8$ ととりかえると 定理 1.2 より

$$S_{(2)}(a_{21}) = 3 \quad S_{(1,1)}(a_{21}) = -2$$

$$S_{(2)}(a_{11}^2) = 0 \quad S_{(1,1)}(a_{11}^2) = 4$$

だから $A(e'_4) = (\lambda + 12N)e_8$ となる.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}''$ $\alpha: \pi_7(S^4) \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ を $\alpha\{f\} = \lambda \bmod 12$ と定義すれば α は homomorphism になる. $X = CP^2$ の場合, 定理 3.3 によって $S_{(2)}(y) = 2y^2$, $S_{(1,1)}(y) = -y^2$ だから $A(y) = y^2$, すなわち $\alpha\{f\} = 1 \bmod 12$ となる.

文 献

M. Kamata - T. Sugawara ; A note on Landweber-
 Novikov operations on the complex cobordism ring U^* ,
 Mem. of Fac. Sci. Kyushu univ. 28 (1974) (予定)

T. Sugawara ; Landweber-Novikov operations on
 the cobordism ring of HP^n , *ibid.* (予定)