

$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ の周期解
の存在について.

埼玉 理工 佐藤 祐吉

§1 序

微分方程式

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (\dot{x} = \frac{dx}{dt})$$

の周期解の存在について考える。ここで $f(x, y)$ と $g(x)$ は、次の条件を満足するものとする。

I) $g(x)$ は リプシッツ条件を満たし、

$$g(x) < 0 \quad \alpha < x < 0$$

$$g(x) > 0 \quad x > 0 \quad \text{又は} \quad \alpha > x$$

となる定数 $\alpha < 0$ が存在する。更に、 $x = \alpha$, 0 で微分可能で、 $g'(\alpha) < 0$, $g'(0) \geq 0$.

II) $f(x, y)$ は リプシッツ条件を満たし

$$f(x, y) \geq -M_0 \quad \text{for all } (x, y)$$

$$f(x, y) > 0 \quad x < \beta_2 \quad \text{又は} \quad \beta_1 < x$$

ここで β_1, β_2, M_0 は定数で、 $\beta_2 < \beta_1, M_0 > 0$.

(1) と同値な方程式

$$\dot{x} = y$$

$$(2) \quad \dot{y} = -f(x, y)y - g(x)$$

と考える。(2) の危点 $(0, 0)$ と $(\alpha, 0)$ のみである。更に $f(0, 0) > 0$ 又は $f(0, 0) < 0$ に従って $(0, 0)$ は安定、又は、不安定な危点であり、その index は、 $+1$ である。

$(\alpha, 0)$ は saddle pt. であるので、index は -1 である。

よって周期解が存在し得るならば、それは $(0, 0)$ のみと内部に含まなければならない。

半平面: $\{ \alpha \leq x, -\infty < y < +\infty \}$ で $f(x, y) \geq 0$ ならば、(1) の周期解が存在しないことは容易にわかる。 $f(x, y) < 0$ の場合でも (1) の周期解が存在しない十分条件が得られる。即ち

$$\int_0^x g(x) dx \equiv G(x)$$

と置いて、

定理 1. 次の (i), (ii) をみたす定数 $r_1 > 0$, $r_2 < \alpha$ が存在するとし、(1) は周期解を特になし。

$$(i) \quad f(x, y) < 0 \quad r_2 < x < r_1$$

$$(ii) \quad G(r_1) \geq G(r_2) \quad \text{又は}$$

$$G(x_1) = G(x_2), \quad \alpha < x_1 < 0, \quad r_1 < x_2 \quad \text{ならば}$$

$$\frac{g(x_1)}{f(x_1, y)} < \frac{g(x_2)}{f(x_2, y)}$$

定理 2 (i) $\beta_2 \leq \alpha < \beta_1 < 0$

(ii) $G(x_1) = G(x_2)$, $\alpha \leq x_1 < \beta_1$, $0 < x_2 \leq \beta_2$ かつ

$$x_1 + x_2 > 2\beta_1$$

(iii) $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

と かつ $0 < \theta$ が 存在する。

(iv) 次に α より連続関数 $\chi(y)$ が存在する。

$$\alpha < \chi(y) \leq \beta_1, \quad \chi(y_1) + \chi(y_2) \leq 2\chi\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

$$\mathcal{D} = \{(x, y); \alpha < x < \chi(y)\}, \quad \mathcal{D}_+ = \{(x, y); \chi(y) < x\}$$

$$f(x, y) < 0 \quad (x, y) \in \mathcal{D}$$

$$f(x, y) > 0 \quad (x, y) \in \mathcal{D}_+.$$

このとき (i) の周期解は存在しない。

ここでこの証明は省略致します。

§ 2. 存在定理

定理 3 (i) $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$, (ii) $f(0, 0) < 0$

(iii) 次に不等式を満たす数 x_1, ω が存在する。

$$\alpha < x_1 < \beta_2, \quad \omega > 1$$

$$(3) \quad 2\omega(1 + 1/\omega)M \leq \int_{x_1}^{\beta_2} f(x, u(x)) dx$$

$$(4) \quad \omega^2 \{G(\alpha) - G(x_1)\} \geq G(\alpha) - G(\beta_1).$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) > M + y_0.$$

このとき (I) は少なくとも 1 つ周期解を持つ。ここで

$u(x) \leq 0$ は任意の単調減少連続函数。

$$y_0 = \sqrt{2} \{G(\alpha) - G(\beta_2)\}^{\frac{1}{2}}, \quad M = M_0(\beta_1 - \beta_2) + G(\beta_2)/y_0.$$

$$Q = y_0/M$$

証明. 我々は方程式 (2) のリャプノフ函数

$$(5) \quad \lambda(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x)$$

を考える. (2) の解に $y \neq 0$ と仮定して微分すると

$$(6) \quad \dot{\lambda}(x, y) = -y^2 f(x, y)$$

となる.

$f(0, 0) < 0$ であるから, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して,

$\lambda(x, y) = \varepsilon$ となる閉曲線は原点を内部に含む。又, (6) より,

閉曲線内の原点以外の点を通る軌道は t が増加するとき閉曲線の外に出る。

次に点 $(\alpha, 0)$ は saddle pt. であるので, 4 つの separatrix がある。そのうちで, t が増加するとき, 領域 $\Omega = \{x > \alpha, y > 0\}$ に入る separatrix を考え, それを $\Gamma; (x(t), y(t))$ で表わす。

(6) より Γ は半直線 $x = \beta_2, y > 0$ との交点を $P_2 = (\beta_2, y_1)$ とすると, $y_1 < y_0$ である。

Γ が半直線 $x = \beta_1, y > 0$ と交わる場合を考える。 Γ は半直線との交点を $P_2(\beta_2, y_2)$ で表わす。

$$(17) \quad y_2 < y_0 + M$$

と得る。実際

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} -f(x, y) - g(x)/y_0 & \beta_2 \leq x \leq 0 \\ -f(x, y) & 0 < x \leq \beta_1 \end{cases}$$

とある。微分方程式

$$(18) \quad \frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y)$$

で初期条件 $Y(\beta_2) = y_0$ を満足する解 $Y(x)$ と

$$\frac{dy}{dx} = -f(x, y) - \frac{g(x)}{y}$$

で初期値 $\tilde{y}(\beta_2) = y_1$ を取る解 $\tilde{y}(x)$ を比較すると

$$0 < \tilde{y}(x) \leq Y(x) \quad \beta_2 \leq x \leq \beta_1$$

となる。(18)を β_2 から β_1 まで積分する。

$$Y(\beta_1) - Y(\beta_2) = - \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x, Y(x)) - \int_{\beta_2}^0 \frac{g(x)}{y_0} dx,$$

II) ε, M の定義より

$$Y(\beta_1) - y_0 \leq M.$$

となる。

$$\lambda = -y^2 f(x, y) < 0 \quad \text{for } \beta_1 < x$$

であるから、 T_+ は 曲線 $\lambda(x, y) = y_0 + M$, $\beta_1 < x$, とは

交わらないので、必ず、半直線 $x = \beta_1$, $y < 0$ と交わる。

γ の交点を $P_3 = (\beta_1, y_3)$ とすると, (17) より

$$|y_3| < y_0 + M.$$

Γ_1 が半直線 $x = x_1, y < 0$ と交わることを仮定する. 点 $P_4 = (\beta_2, y_4), P_5 = (x_1, y_5)$ はそれぞれ Γ_1 と $x = \beta_2, y < 0$ と $x = x_1, y < 0$ との交点とする.

P_1 から P_2 までと同様な論法で

$$(19) \quad |y_4| < y_0 + 2M$$

を得る.

$d\lambda/dx = -y f(x, y)$ を P_4 から P_5 まで積分する.

$$\begin{aligned} \lambda(P_5) - \lambda(P_4) &= - \int_{\beta_2}^{x_1} y f(x, y) dx \\ &= - \int_{x_1}^{\beta_2} |y| f(x, y) dx. \end{aligned}$$

若し $\widehat{P_4 P_5}$ 上で 常に $|y| \geq \frac{1}{w} y_0$ であると (3) より

$$\begin{aligned} \lambda(P_5) - \lambda(P_4) &< - \frac{1}{w} y_0 \int_{x_1}^{\beta_2} f(x, y) dx \\ &\leq - 2 y_0 M (1 + 1/\theta) \end{aligned}$$

(19) より

$$\begin{aligned} \lambda(P_5) &< \frac{1}{2} (y_0 + 2M)^2 + G(\beta_2) - 2 y_0 M (1 + 1/\theta) \\ &= \frac{1}{2} y_0^2 + G(\beta_2) + 2M(y_0 + M) - 2 y_0 M (1 + 1/\theta) \\ &= G(\alpha) \end{aligned}$$

$\Gamma_+ \cap P_3$ 上で $|y| < \frac{1}{w} y_0$ なる場合があるときは, $y < 0$,
 $\alpha < x < \beta_2$ で $\dot{y}(t) > 0$ であるから, $|y_0| < \frac{1}{w} y_0$ であ
 る. (1) によって, (4) より

$$\begin{aligned}\lambda(P_0) &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} y_0 \right)^2 + G(x_1) \\ &\leq G(\alpha)\end{aligned}$$

$\lambda(x, y)$ は Γ_+ に $y = 0$ で $\beta_2 > x$ では減少であるから, Γ_+
 は α と x_1 の間で x 軸と交わらねばならぬ.

Γ_+ が $x = x_1$ と交わらぬ場合は, x_1 と 0 との間で交わる.
 最後に $x = \beta_1$ と交わらぬ場合は, $P_3 = (\beta_1, 0)$ として
 同様な議論をすればよい.

いずれの場合でも Poincaré - Bendixson の定理「少な
 くとも 1 つ閉軌道が存在する」の条件を満足する領域を定め
 ることが出来る.

§3. 周期解の一意性について.

ここでは周期解の一意性に対する十分条件を与える. 即ち

定理 4 $f(x, y)$, $g(x)$ は連続微分可能と仮定する. 更に

(i) $\chi_1(y) > \chi_2(y)$ - 両連続関数で, $0 < \delta_1 \leq \chi_1(y) \leq \beta_1$

$$\chi_1(y_1) + \chi_1(y_2) \geq 2\chi_1\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right), \quad \chi_1(y) = \chi_1(-y).$$

更に $G(\chi_1(y)) = G(\chi_2(y))$

$$(ii) \quad \mathcal{D} = \{(x, y); \chi_2(y) < x < \chi_1(y)\}$$

$$f(x, y) < 0 \quad (x, y) \in \mathcal{D}$$

$$f(x, y) > 0 \quad (x, y) \notin \bar{\mathcal{D}} \quad \text{closure of } \mathcal{D}$$

$$(iii) \quad y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \geq 0 \quad \{(x, y); \alpha < x, |y| \leq y_0 + 2M\}$$

このとき, (I) は高々 1 つの定数でない周期解を持つ。

証明. やはり (I) の代りに (2) を考える. (2) の任意の開軌道を Γ とする. $\Gamma \notin \mathcal{D}$ であり, α . Γ が直線 $x = \alpha$ と交わらないことは *trivial* である.

今, $\Gamma \subset \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_+$ と仮定して矛盾を導き出す. ここで

$$\mathcal{D}_+ = \{(x, y); x \geq \chi_1(y)\}$$

$$\mathcal{D}_- = \{(x, y); \alpha < x \leq \chi_2(y)\}$$

とおく.

$\Gamma \in \chi_1(y)$ との交点を $A = (x_a, y_a)$ ($y_a > 0$), $B = (x_b, y_b)$ とする. $\lambda(x, y)$ は Γ にそって $\mathcal{D}$ 内では単調増加 (t; 増加) であり, $\mathcal{D}_+$ では単調減少である.

$\mathcal{D}$ 内にある Γ に対応して (λ, y) 平面上の曲線 $y = y_1(\lambda)$ $\mathcal{D}_2$ 内にある Γ を (λ, y) 平面上に移し $y_2(\lambda)$ で表わす.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{d y_1(\lambda)}{d \lambda} = \frac{1}{y_1(\lambda)} + \frac{y_1(\lambda)}{y_1(\lambda)^2 f(x, y_2)} = -\infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda(p)} \frac{dy_I}{d\lambda} = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda(A)} \frac{dy_{II}}{d\lambda} = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda(B)} \frac{dy_{II}}{d\lambda} = +\infty$$

である。又

$$y_I(\lambda(A)) = y_{II}(\lambda(A))$$

であるから、 λ が $\lambda(A)$ (または $\lambda(B)$) の十分近くでは

$$y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda) \quad (\text{または } y_I(\lambda) < y_{II}(\lambda))$$

となる。 $y_I(\lambda)$, $y_{II}(\lambda)$ は連続であるから、 $\lambda(B) < \lambda < \lambda(A)$

で必ず $y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda)$ となる。今

$$\lambda_1 = \max \{ \lambda; y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda), \lambda < \lambda(A) \}$$

とあり、 λ_1 に対応する Γ 上の点 (x_1, y_1) (x_2, y_2) がある

から $\lambda_1 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$, $(x_1, y_1) \in \mathcal{D}$ である。

$$y_1 = y_I(\lambda_1) = y_2 \text{ より}$$

$$G(x_1) = G(x_2) \quad \alpha < x_1 < x_1(y_1) < x_2$$

である。一方 $G(x)$ は $\alpha \leq x$ で単調増加函数であるので

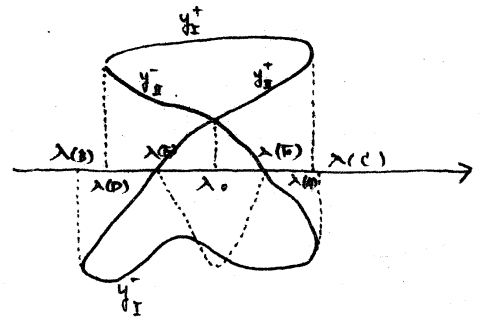
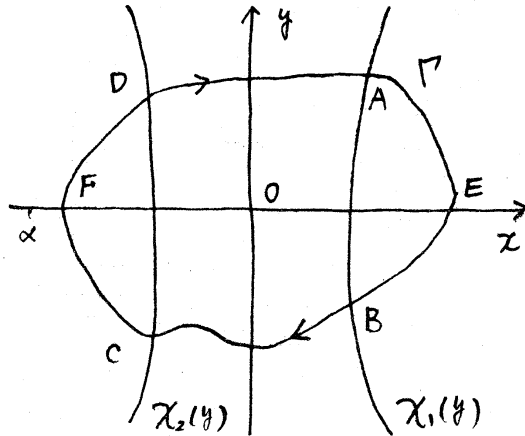
$$G(x_1) < G(x_1(y_1)) < G(x_2)$$

となり矛盾である。

$\Gamma \cap \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_-$ であることも同様に示される。

故に Γ は曲線 $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ と必ず交わりねばならぬ。更に条件(i)より $\chi_1(y)$ とは 2 点 $A = (\chi_1(\eta_+), \eta_+)$ ($\eta_+ > 0$), $B = (\chi_1(\eta_-), \eta_-)$ ($\eta_- < 0$) で交わり、 $\chi_2(y)$ とは $C = (\chi_2(\eta_-), \eta_-)$ ($\eta_- < 0$) $D = (\chi_2(\eta_+), \eta_+)$ ($\eta_+ > 0$) で交わる。

Γ 上 α AB, BC, CD, DA に対応する λ, y 面上の曲線 γ として
 $y_0^+(\lambda), y_I^-(\lambda), y_{II}^-(\lambda), y_I^+(\lambda)$ とする.



前と同様な論法で $\lambda = \lambda(A), \lambda(B)$ を除いて $y_{II}^+(\lambda)$ は $y_I^+(\lambda), y_I^-(\lambda)$ とは交わらぬ。 y_{II}^- は $\lambda = \lambda(C), \lambda(D)$ を除いて y_I^+, y_I^- と交わらぬ。故に $y_{II}^+(\lambda)$ と $y_{II}^-(\lambda)$ は交わらなければならぬ。
 (実は一處で) y の交点を λ_0 とする。

図のようにならば Γ と λ 軸との交点を E, F とする。

今 $\lambda(F) = \lambda(E) = \lambda_0$ の場合は不等式

$$(10) \quad \begin{cases} |y_{II}^+(\lambda)| \leq y_I^+(\lambda) & \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda(A) \\ |y_{II}^-(\lambda)| \leq y_I^-(\lambda) & \lambda(D) \leq \lambda \leq \lambda_0 \end{cases}$$

と

$$(11) \quad \begin{cases} |y_{II}^+(\lambda)| \leq |y_I^-(\lambda)| & \lambda(B) \leq \lambda \leq \lambda_0 \\ |y_{II}^-(\lambda)| \leq |y_I^+(\lambda)| & \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda(C) \end{cases}$$

が成り立つ。

$\lambda(E) \neq \lambda(F)$ の場合でも (10), (11) が成り立つことを示す。

す。一般性を失うことなく、 $\lambda(E) < \lambda(F)$ と仮定する。

(I) から $y_{II}^+(\lambda_0) = y_0^-(\lambda_0) > 0$ である。よって不等式

(10) は成り立つ。

(11) が成り立たないことを仮定して矛盾を導き出す。

$y_I^-(\lambda)$ は $y_0^+(\lambda)$, $y_{II}^-(\lambda)$ と交わらないので (11) が成り立たないのは次のような λ_1 が存在することである。

$$(12) \quad 0 < |y_I^-(\lambda_1)| < y_{II}^+(\lambda_1) \quad \lambda(E) < \lambda_1 < \lambda_0$$

または

$$(12)' \quad 0 < |y_I^-(\lambda_1)| < y_0^-(\lambda_1) \quad \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda(F).$$

(12) の場合を考える。 $y_0^+(\lambda(E)) = 0 < |y_I^-(\lambda(E))|$ であるから

$$y_{II}^+(\lambda_0) = |y_I^-(\lambda_0)| \quad \lambda(E) < \lambda_0 < \lambda_1 \quad \text{なる実数 } \lambda_0 \text{ が存在する。}$$

λ_0 に対応する Γ 上の点を $(x_1, y_1) \in \mathcal{Q}$, $(x_2, y_2) \in \mathcal{Q}_+$ とする。 $|y_1| = y_{II}^+(\lambda_0) = y_2$ と

$$\lambda_0 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$$

より

$$G(x_1) = G(x_2) \quad x_0(y_1) < x_1 < x_1(y_1), \quad x_1(y_2) < x_2$$

条件(ii)より $G(x_1) < G(x_1(y_1)) = G(x_1(-y_1)) < G(x_2)$ である。

は上の等式に矛盾である。

(12)' の場合も全く同様である。故にいずれの場合でも不等式は成り立つ。

閉軌道 Γ ; $(x(t), y(t))$ の周期を T とすれば

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\{ f(x(t), y(t)) + y(t) \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \right\} dt \\
& \geq \int_0^T f(x(t), y(t)) dt = \left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right) (f(x, y)) \frac{dt}{d\lambda} d\lambda \\
& = - \left\{ \int_a^b \frac{d\lambda}{y_0^+(\lambda)^2} + \int_b^c \frac{d\lambda}{y_1^-(\lambda)^2} + \int_c^d \frac{d\lambda}{y_0^-(\lambda)^2} + \int_d^a \frac{d\lambda}{y_1^+(\lambda)^2} \right\} \\
& = \left(\int_b^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^a \right) \left(\frac{1}{y_1^+} \right)^2 d\lambda + \left(\int_d^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^c \right) \left(\frac{1}{y_0^-} \right)^2 d\lambda \\
& \quad - \left(\int_d^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^a \right) \left(\frac{1}{y_1^-} \right)^2 d\lambda - \left(\int_b^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^c \right) \left(\frac{1}{y_0^+} \right)^2 d\lambda \\
& > 0
\end{aligned}$$

ここで $a = \lambda(A), \dots, d = \lambda(D)$ であり, 最後の不等式は (10) (11) による.

Poincaré の判定法によつて Γ は漸近軌道安定である.
 Γ は任意であつたので 閉軌道が存在すればただ一つしかないことになる.