

アーベル多様体上のベクトル束のゴサイクルの 正規化について

名大 理 梅村 浩

§ 1. 代数幾何学におけるベクトル束

我々の研究の対象は、アーベル多様体上のベクトル束であるが、まず一般の^{代数}多様体上のベクトル束の研究の現状を見ておこう。

階数 1 の場合は、直線束であり、古典的な *linear system* の理論と同等である。階数 2 以上のベクトル束を、代数幾何の^{立場から}初めて研究したのは、A. Weil (*Généralisation des fonctions abéliennes*, J. Math. pures et appl. t. 17 (1938) 47-87) である。A. Weil が扱ったのは、非可換な類体論とも言うべきものである。即ち、曲線上の直線束を分類するのが Jacobi 多様体であり、Jacobi 多様体の理論は一変数代数函数体のアーベル拡大の理論 = 類体論である。もし群と乗法群 $\mathbb{G}_m$ から非可換な群 GL_r に一般化すると、つまり直線束の代りにベクトル束を考察すれば、非可換な

Jacobi 多様体と呼ぶべきものが定義され、非可換な類体論のようなものが構成できるであろう。A. Weil のこの論文は意欲的な作品であり、「En tout cas, le champ est assez vaste qui s'offre là aux investigations des chercheurs de bonne volonté」という文章で終わっている。その後40年以上経った現在 A. Weil のアイディアは正しかったのだろうか。答えは、Yes と No とも言える。この様な方法で、非可換な類体論をつくるという考えは完全に失敗したと言ってよいと思われる。しかし、後述のべるように、曲線上のベクトル束の分類をさえる多様体（現代的に言えば *stable bundle* の *moduli*）が、例えば Krichever の仕事等に関係して大切なことが解、また（本講究録の伊達氏の報告参照）。

現在、代数幾何学で行われているベクトル束の研究は、一般論としては、次に限られると思われる： 1° 分類， 2° Ample ベクトル束の理論， 3° G を半単純代数群， P をその放物型部分群とし， G/P 上の *homogeneous* ベクトル束の理論， Borel-Weil の定理に尽きると言える， 4° Grothendieck による，*scheme* 上の Brauer 群の理論。

分類について詳しく見てみよう。Grothendieck は $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束を分類した (1957)。我々のテーマに大りに

関係あるのであるが, Atiyah は楕円曲線 (=1次元のアーベル多様体) 上のベクトル束を分類した (1957). 種数が2以上の代数曲線 (=コンパクト リーマン曲) 上のベクトル束の分類は, *stable* ベクトル束の *moduli* の研究となる. つまり, 種数が2以上の代数曲線 C , 整数 $r > 0$, d を固定するとき, $\mathcal{E}(C; r, d) = \{C \text{ 上のベクトル束 } E \mid E \text{ は } stable, E \text{ の階数} = r, E \text{ の次数} = d\}$ に代数多様体の構造 (*stable* ベクトル束の *moduli*) が入る. かつ, $r=1, d=0$ なら, $\mathcal{E}(C; 1, 0)$ は C の *Jacobi* 多様体に他ならず, 一般の $\mathcal{E}(C; r, d)$ は *Jacobi* 多様体の拡張になっている. 多様体 $\mathcal{E}(C; r, d)$ について, 詳しく研究が為されている.

以上, 曲線上のベクトル束の分類について述べたが, 高次元の多様体上にも, *H-stable* という概念が導入され, 曲線の場合と同様に, ベクトル束の *moduli* が存在することが証明されているが, *moduli* 多様体の詳しい性質は研究されていらない. Krichever の仕事を, 多変数に拡張しようとするれば, この *moduli* 多様体の研究が必要となるであろう.

§2 アーベル多様体上のベクトル束.

アーベル多様体上のベクトル束には, 可換的性格の強りとのとそうでなりとのがある. Atiyah は1次元アーベル多様

体上のベクトル束を分類したが、1次元のアーベル多様体上のベクトル束は可換的性質が強りのである。松島-森本[2] [3]は、holomorphic connection を持つベクトル束を研究した。定理(松島, 森本). A をアーベル多様体, E を A 上のベクトル束とすると、次は同値である。

- (1) E は holomorphic connection を持つ。
- (2) E は基本群の表現から得られる。
- (3) $x \in A$ の任意の点とすると、 E は $T_x^* E$ と同型である。

ここで T_x は A から A への多様体の同型であり、 $a \in T_x$ を $a+x$ へ写す。

値は、この条件を満たす^たベクトル束を分類してやる。この条件を満たす bundle は、基本群 $(\cong \mathbb{Z}^{2g}, g = \dim A,)$ の表現で得られるので、可換性の強いベクトル束であると言える。

$\varphi: A' \rightarrow A$ をアーベル多様体の isogeny (つまり, φ surjective, $\text{Ker } \varphi$ 有限) とする。 $L' \in A'$ 上の直線束とする, direct image $\varphi_* L'$ は A 上のベクトル束となる。この様にして得られるベクトル束を、^{直線束の} isogeny による direct image となるベクトル束と呼ぶことにする。

定理(小田, 森川). A を 2次元のアーベル多様体, E を A 上のベクトル束で, $H^0(A, \text{End } E) = \mathbb{C}$, つまり E は自明になり自己準同型を持たないとする. 次は同値である.

- (1) E は ^{直線束の}isogeny による direct image となる.
- (2) ベクトル束 $\text{End } E$ の 2 Chern 類は 0 である.

この型のベクトル束は, 直線束と isogeny の組合せであり, 可換的であるといえる. 楕円曲線上には, この2つの型, 基本群の表現で得られるもの, 直線束の isogeny による direct image となるもの, しか本質的に存在しない. Atiyah が楕円曲線上のベクトル束を分類するのに成功したのは, この理由による. 2次元以上のアーベル多様体上では, 様子が全く異なるのである. それと関係して, 次の事柄を思い出しておく: G を半単純代数群, P を放物型部分群とすると, G/P 上の階数 n の低りベクトル束は少ないと思われる. これは反対にアーベル多様体上には沢山のベクトル束が存在する. 列举してみよう. 最初の2つは上に述べたものである.

- (1) 基本群の表現で得られるベクトル束.
- (2) 直線束の isogeny による direct image.
- (3) L をアーベル多様体 A 上の直線束で, $H^1(A, L^{-1}) \neq 0$ とする.
 $\mathcal{O}_A$ を A 上の自明な直線束として, extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

で定まるベクトル束 E . 条件 $H^1(A, L^{-1}) = 0$ は, 自明となり extension が存在するための条件である.

(E) A を g 次元アーベル多様体, L を A 上の ample 直線束, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ を L の section ($n \geq g+1$) で同時に消えないと仮定する. E を次の商 bundle として定義する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow L^{\otimes n} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

ここで, 左の injection は $1 \longmapsto (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ で定義する.

(F) C を種類 $g \geq 2$ のコンパクトリーマン面とする. C 自身の n 個の直積 $C^n = \underbrace{C \times \dots \times C}_n$ には自然に n 次対称群が作用する. γ の作用で C^n を割, 2 得られる多様体を, C の n 次対称積とよび $S^n(C)$ で表す. C の 1 点 P を固定しておく. $\rho: S^n(C) \rightarrow J(C)$ を次の様に定める. $S^n(C)$ の元 $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ に対して, $\rho((P_1, \dots, P_n)) \stackrel{\text{上の}}{=} \text{divisor } P_1 + P_2 + \dots + P_n - nP$ の類. もし $n \geq 2g-1$ ならば, $J(C)$ 上のベクトル束 E_{n+1-g} で, E_{n+1-g} の射影化が $S^n(C)$ と同型になるものが存在する. E_{n+1-g} を Picard バンドルと呼ぶ.

(I), (E), (F) のベクトル束は, (G), (H) のベクトル束と違, γ , 非可換性であり, 性極がかなり異なっている. これらのベ

ベクトル束の研究については, Schwarzenberger (7), 梅村 (25), (26), (28), Kempf (22), (27), 白井 (29) を参照されたい。E) の型のベクトル束の一部と, Picard bundle については, moduli が決定されていることのみ述べておく。moduli の決定される高次元の場合の貴重な例であり, 非線型微分方程式と関係していると思われるが, この方面からの考察は未だ行われていない。

§3 コサイクルの正規化について

アーベル多様体上の直線束という幾何学的対象には, 解析的にはテータ函数が対応しており, 表現論的には Heisenberg 群が対応している。直線束は容易にベリトル束へ, 一般化される。それでは, アーベル多様体上のベクトル束に対応して非可換なテータ函数を定義するのは可能であろうか。あるいは, 表現論的な方法でアーベル多様体上のベクトル束を統制することはできるのだろうか。長にすると次の様になる。

群論	幾何	解析	表現論
G_m	アーベル多様体上の直線束	テータ函数	Heisenberg 群
GL_r	アーベル多様体上のベクトル束	?	?

(iv), (v), (vi) のベクトル束が表現論的に、直線束と全く異なっていることは、梅村 (25) に示されている。この報告では、非可換なテータ函数を考える案に、最も本質的な障害となり、ユカイクルの正規化により述べてみたいと思う。

まず、古典的なテータ函数、つまりアーベル多様体の直線束の場合を復習しておく。 Γ を $\mathbb{C}^g$ の lattice とする。 Γ の任意の元 r に対し、 $\mathbb{C}^g$ 上の正則函数 $\rho_r(z)$ が与えられており次の条件を満たすとき、 $\{\rho_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ は cocycle であるという：条件 (1) $\rho_r(z)^{-1}$ は $\mathbb{C}^g$ 上で正則、(2) 任意の $r, r' \in \Gamma$ について、等式 $\rho_{r+r'}(z) = \rho_r(z+r') \rho_{r'}(z)$ が成立する。

例. $\tau \in \mathbb{G}_g \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t \sigma = \sigma, \text{Im } \sigma \text{ は正定}\}$ とする。

$\Gamma = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$ は $\mathbb{C}^g$ の lattice である。 $m, n \in \mathbb{Z}^g$ に対し、 $\rho_{m+n\tau}(z) = \mathcal{E}(-\frac{1}{2} m \tau^* m - n z)$ とおけば、 $\{\rho_{m+n\tau}(z)\}_{m+n\tau \in \Gamma}$ は cocycle である。ここで $\mathcal{E}(x) = e^{2\pi i x}$ である。

さて、 $\{\rho_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ を cocycle とすると、 $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ への $r \in \Gamma$ の作用を $(z, v) \mapsto (z+r, \rho_r(z)v)$ で定めると、群 Γ が $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ に作用することかわかる。一方この Γ の作用は projection $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^g$, $\mathbb{C}^g$ 上への Γ の作用と可換なので、 $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ を

Γ で割ることによって, 複素トーラス $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 上の直線束が得られる. 複素トーラス $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 上のすべての直線束が, この方法で得られることが, わかっている.

$\{p_r^{(1)}(z)\}_{r \in \Gamma}, \{p_r^{(2)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ を 2つの cocycle とする. $\mathbb{C}^2$ 上の正則関数 $t(z)$ で次の条件を満たすものが存在するとき, $\{p_r^{(1)}(z)\}_{r \in \Gamma}, \{p_r^{(2)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ は *cohomologous* であるという: 条件 (1) $t(z)^{-1}$ は $\mathbb{C}^2$ 上正則, (2) 任意の $r \in \Gamma$ について, $p_r^{(1)}(z) = f(z+r) p_r^{(2)}(z) t(z)^{-1}$ が成立する.

次の定理が成り立つ.

定理. $\{p_r^{(1)}(z)\}_{r \in \Gamma}, \{p_r^{(2)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ を 2つの cocycle とする.

$\{p_r^{(1)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ の定義する直線束と $\{p_r^{(2)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ の定義する直線束が同型である必要十分条件は, $\{p_r^{(1)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ と $\{p_r^{(2)}(z)\}_{r \in \Gamma}$ が *cohomologous* であることである. 以上をまとめて,

$$\{\text{cocycles } \{p_r^{(2)}(z)\}_{r \in \Gamma}\} / \text{cohomologous} \cong \{\mathbb{C}^2/\Gamma \text{ 上の直線束}\} / \text{同型}.$$

上の定理より, $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 上の直線束を定義する際, cocycle を *cohomologous* な範囲でとり替えて, できるだけ簡単なものにする (つまり正規化) することが望ましくなる.

以上のことは、直線束をベクトル束にしても同様に成り立つ。
つまり、 r を正整数とし、 $P \in \mathbb{C}^g$ の lattice とする。

$\mathbb{C}^g$ 上の正則関数を成分に持つ $r \times r$ 行列 $P_r(z)$ が各 $r \in P$ に対して与えられており、次の条件を満たすとき、 $\{P_r(z)\}_{r \in P}$ は $\checkmark$ r の
cocycle であるという：条件 (i) $P_r(z)^{-1}$ の各成分も $\mathbb{C}^g$ 上正則、
(ii) 任意の $r, r' \in P$ に対して、 $P_{r+r'}(z) = P_r(z + r') P_{r'}(z)$ 。

直線束の場合と同様にして、cocycle $\{P_r(z)\}_{r \in P}$ は複素トーラス $\mathbb{C}^g/P$ 上の階数 r のベクトル束を定める。直線束の場合と同様に、 $\mathbb{C}^g/P$ 上のすべての階数 r のベクトル束は、cocycle によって定義されることから知られており、2つの cocycle が cohomologous であるという定義も明らかである。直線束の場合の定義の (ii) も、正則関数を成分とする $r \times r$ 行列におきかえるだけである。

直線束の場合と同様な定理も成立する。 $\checkmark$ r の

定理 $\{P_r^{(1)}(z)\}_{r \in P}, \{P_r^{(2)}(z)\}_{r \in P}$ を2つの $\checkmark$ cocycle とする。
 $\{P_r^{(1)}(z)\}_{r \in P}$ の定義するベクトル束と $\{P_r^{(2)}(z)\}_{r \in P}$ の定義する
ベクトル束が同型である必要十分条件は、 $\{P_r^{(1)}(z)\}_{r \in P}$ と
 $\{P_r^{(2)}(z)\}_{r \in P}$ が cohomologous であることである。したがって、
 $\{\text{cocycles } \{P_r(z)\}_{r \in P}\} / \text{cohomologous} \cong \{\mathbb{C}^g/P \text{ 上のベクトル束}\} / \text{同型}$ 。

直線束の正規化を与える Appell-Humbert の定理を述べよう。
 $\mathbb{C}^g \supset \Gamma$ を lattice とする。 Γ は固定しておく。
 $H: \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ を Hermitian 形式で、 $\text{Im} H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}$ とする。
 α は Γ から $\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ への写像であって、条件、
 $\alpha(r_1+r_2) = \alpha(r_1)\alpha(r_2)e^{i\pi E(r_1, r_2)}$ を任意の $r_1, r_2 \in \Gamma$ について満たす。ここで、 $E = \text{Im} H$ である。このよう
 な H と α が与えられたとき、 $\rho_r(z) = \alpha(r) e^{\pi H(z, r) + \frac{1}{2}\pi H(r, r)}$
 とおくと、 $\{\rho_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ は cocycle である。この cocycle に
 よって定まる、 $\mathbb{C}^g/\Gamma$ 上の直線束を $L(H, \alpha)$ と表わす。

定理 (Appell-Humbert). 次の 1 と 1' が成り立つ。

$$\begin{aligned} \{(H, \alpha) \mid H, \alpha \text{ は上の条件を満たす}\} &\xrightarrow{\sim} \{\mathbb{C}^g/\Gamma \text{ 上の直線束}\} \\ (H, \alpha) &\longleftrightarrow L(H, \alpha). \end{aligned}$$

この定理は、直線束を定義する cocycle が一意的に
 $\rho_r(z) = \alpha(r) e^{\pi H(z, r) + \frac{1}{2}\pi H(r, r)}$ と正規化できることを示
 している。Appell-Humbert の定理は難しい定理ではな
 りが、非常に強力であり、 $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体の理論の大部
 分を初等的な線型代数に還元してしまふ。ベクトル束につ
 いて同様な定理が証明できるのではなからうかと、誰しも思うで
 あうが、実察を試みようと大変難しい問題であることがわ

かる。以下、何故、困難なのかを説明する。まず、一体具体的に書ける cocycle はどんなものがあるかを見ておく。

例 1. §2 の (i) のベクトル束, 基本群の表現で得られるベクトル束. この場合, ρ は $\mathbb{C}^*$ 上の定数行列である。

2. §2 の (ii) のベクトル束, 直線束の isogeny による direct image. 特別な場合の具体的表現を与えておこう. $g=1$, つまり楕円曲線上で考えよう. $\tau \in \mathbb{C}$ で $\text{Im } \tau > 0$ とする.

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C} \quad \text{とおく.} \quad z \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z} \text{ に}$$

対して,

$$\rho_{\frac{m}{2} + n\tau}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{2}\tau + nz\right),$$

とおくと, $\left\{ \rho_{\frac{m}{2} + n\tau}(z) \right\}_{\frac{m}{2} + n\tau \in \Gamma}$ は cocycle である。

この 2 つのタイプのベクトル束以外のベクトル束を定義する cocycle を具体的に書くのは, 余程の幸運に恵まれなると不可能である。むしろ, 一般には新しり函数 ($\mathcal{O}(\mathbb{C})$ とか, テータ函数とかいうもののでないという意味) を導入しなれば限り不可能であると考えられる。つまり, cocycle が何らかの函数方程式を満たすとき正規化されていふと述べるより付

がなり。古典的には、Weilの次の formulation がある。
 $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ を lattice, $\{p_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ を Γ の直線束の cocycle とする。任意の
 $r, r' \in \Gamma$ について, $p_r(z+r') p_{r'}(z)^{-1}$ が $\mathbb{C}^2$ 上の定数関数^(函数) にな
 るとき, Weil は $\{p_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ が正規化されていると考えた。
 Appell-Humbert の定理を使えば, $\mathbb{P}^1$ 多様体上の直
 線束は, Weil の意味で正規化された cocycle で定義されるこ
 とがわかる。

注意. $\{p_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ を直線束の cocycle, $\mathcal{L}$ を $\{p_r(z)\}_{r \in \Gamma}$ の定義
 する複素トーラス $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 上の直線束とする。 $H^0(T, \mathcal{L})$ は,
 $\mathbb{C}^2$ 上の正則関数 $h(z)$ で, $h(z+r) = p_r(z) h(z)$ と任意の r
 $\in \Gamma$ について成り立つものの全体と考える。例えば, cocycle
 の最初の解 $p_{m+n\tau}(z) = \mathcal{O}(-\frac{1}{2}n\tau + m - n z)$ の場合, 古典的なテ
 ーラ函数 $\mathcal{O}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(\frac{1}{2}n\tau + m + n z)$ は, $\{p_{m+n\tau}(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ から
 定義される直線束の section と考えられる。 $h(z+r) h(z)^{-1}$
 $= p_r(z)$ であるので, $p_r(z)$ は $h(z)$ の差分である。したが
 って Weil の意味での正規化という概念は, 2 回差分に関す
 る条件である。

直線束の場合の定義をそのままベクトル束に拡張してみた
 うどうだろうか。

定義 $\{P_r(z)\}_{r \in P}$ をベクトル束の cocycle とする. 任意の $r, r' \in P$ について $P_r(z+r')P_{r'}(z)^{-1}$ が $\mathbb{C}^*$ 上の定数行列となるとき, $\{P_r(z)\}_{r \in P}$ は Weil の意味で正規化されているという.

直線束の場合のように, すべてのベクトル束が Weil の意味で正規化された cocycle で定義されるとよりのなが, それは行かない. §2 の (1) の型のベクトル束は $\{P_r\}_{r \in P}$, $P_r(z) = P_r$ は定数で定義されるので, Weil の意味で正規化された cocycle で定義される. §2 の (2) の型のベクトル束も, Weil の意味で正規化された cocycle で定義される. しかし, 次の定理が成り立つ.

定理 (森 1.1). ^(2.4) E をアーベル多様体 A 上のベクトル束とする. さらに, $H^0(A, \text{End } E) = \mathbb{C}$ とする. 次の条件は同値である.

- (1) E は, 直線束の isogeny による direct image.
- (2) E は, Weil の意味で正規化された cocycle で定義される.

§2 で, 見たように, アーベル多様体上には, 1. と非可換なベクトル束 (1), (2), (3) の型のものが存在する. したがって, Weil の意味での正規化では十分でないことがわかる.

それならば、もっと高次の差分を考えたはどうであろうかと思ふところであるが、もう一回上げるだけで計算が大変で今のところ成功した人はいない。Appell-Humbertの定理は Kähler geometry に基づいており、Kähler geometry は次の排他で sl_2 の表現論である: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow L$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (n-p)\alpha$, α は p -form, n は与えられた多様体の次元。したがって、もっと次元の大きな、半単純 Lie 環を作用させて、Kähler geometry を一般化することによって、Appell-Humbert の定理を一般化できるのではないであろうか(森川寿氏のアイディア)。

Weil の意味の正規化は強すぎたので、もっと弱い定義を捜さなければならぬ。

定義 $\{P_r(z)\}_{r \in P}$ を $\sqrt[n]{n}$ の階数 r のベクトル束の cocycle とする。 $\{P_r(z)\}_{r \in P}$ が、弱い意味で正規化されているとは、 GL_r に $P_r(z)$, $r \in P$ を付加して得られる群 $GL_r \ltimes \langle P_r(z) \rangle_{r \in P}$ が GL_r 上有限生成であることという。

補題. Weil の意味で正規化されているとは、弱い意味で正規化されている。

定理. $\{p_r(z)\}_{r \in P}$ をベクトル束の cocycle, $r_1, r_2, \dots, r_{2g}$ を Γ の base とする. 次は同値である.

- (1) $\{p_r(z)\}_{r \in P}$ は, 弱り意味で正規化されている.
- (2) $1 \leq i, j \leq 2g$ に対して, $G \subset \Gamma$, $p_{r_1}(z)^{\pm 1}, p_{r_2}(z)^{\pm 1}, \dots, p_{r_{2g}}(z)^{\pm 1}$ の言葉 (word) $F^{(i,j)}(p_{r_1}(z), p_{r_2}(z), \dots, p_{r_{2g}}(z))$ があつて, $p_{r_i}(z+r_j) = F^{(i,j)}(p_{r_1}(z), p_{r_2}(z), \dots, p_{r_{2g}}(z))$ が成り立つ.

注意. (2) と類似の函数方程式は E. Picard によつて今世紀の初め, 楕円函数の一般化として考察されたが, まとま, 左結果はなりふりである.

弱り意味で正規化される cocycle どの程度のベクトル束が定義されるか, 分らないが, §2 の (I) のタイプのベクトル束の幾らかが弱り意味で正規化された cocycle で定義されることが示される. 証明は cocycle を具体的に テータ函数を使つて表し, ^{定理の証明(2)の} 函数方程式をつくることによる.

Cocycle を具体的に書くことの困難なことを, §2 の (E) の例で見よう. $g=2$, $n=3$ とする. かつ E は,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_A \rightarrow L^{\oplus 3} \rightarrow E \rightarrow 0,$$

$$1 \mapsto (p_1, p_2, p_3)$$

で定義されてりる。 $\mathbb{C}^2/p = A$, $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\pi} A$ とする。 π を $\mathbb{C}^2$ 上に持ち上げると, 上の exact sequence は,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \pi^* \mathcal{O}_A & \longrightarrow & \pi^* \mathcal{L}^{\otimes 3} & \longrightarrow & \pi^* E & \longrightarrow 0 \\
 & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\
 & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} & \\
 & & & & & & \\
 & & & 1 \longmapsto & (\theta_1, \theta_2, \theta_3) & &
 \end{array}$$

となる。 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は $\mathbb{C}^2$ 上ではテータ函数となる。 $\pi^* \mathcal{L}^{\otimes 3} \rightarrow \pi^* E$ は 行列 $F(z) = \begin{pmatrix} f_{11}(z) & f_{21}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \\ f_{31}(z) & f_{32}(z) \end{pmatrix}$ で条件を満たすものの

で与えられてりる: 条件 (1) $f_{ij}(z)$ は $\mathbb{C}^2$ 上正則, (2) $\forall z \in \mathbb{C}^2$ に
 かり $\text{rank } F(z) = 2$, (3) $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) F(z) = 0$.

ところで, E の cocycle は, $\begin{pmatrix} f_{11}(z) & f_{21}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \end{pmatrix} = H(z)$ とおい

たとき, $\{H(z+t)H(z)^{-1}\}_{t \in \mathbb{C}}^{\text{cocycle } E}$ で与えられる。 したが, $F(z)$ で簡単なものを求めるのが, 正規化することと同値である。 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を, とくに都合よく選んでおけば, 条件 (1) (2) を満たす行列は, 例えば theta relation を使って容易につくれるが, 別の条件がチェックできる。

アベール多様体上のベクトル束に関する論文のリストを付けて, この報告を終るが, 未だ本質的な仕事はこの方面で為されてない。

アベル多様体上のベクトル束の論文のリスト

- (1) M. F. Atiyah: Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. 7 (1957) 414 - 452.
- (2) Y. Matsushima: Fibrés holomorphes sur un tore complexe, Nagoya Math. J. vol. 14 (1959) 1 - 24.
- (3) A. Morimoto: Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connections holomorphes, Nagoya Math. J., Vol. 15 (1959), 83 - 154.
- (4) A. Mattuck: Symmetric products and Jacobians, Amer. J. of Math. 83, (1961) 189 - 206.
- (5) _____ : Picard bundles, Illinois J. of Math. 5, (1961) 550 - 564.
- (6) G. Macdonald: Symmetric products of an algebraic curve. Topology 1 (1962) 319 - 343.
- (7) R. L. E. Schwarzenberger: Jacobians and symmetric products, Illinois J. of Math. 7 (1963) 257 - 268.
- (8) _____ : The secant bundles of a projective variety, Proceedings London Math. Society 14 (1964) 369 - 384.
- (9) A. Mattuck: Secant bundles on symmetric products, Amer. J. of Math. 87 (1965) 779 - 797.
- (10) A. Mizuhara: On a P^1 - bundle over an abelian variety which is almost homogeneous Math. Japonicae 16 (1971) 105 - 114.
- (11) T. Oda: Vector bundles on abelian surfaces, Inv. math. 13 (1971) 247 - 260.
- (12) _____ : Vector bundles on an elliptic curve, Nagoya Math. J. 43 (1971) 41 - 72.

- (13) H. Morikawa: A Note on holomorphic vector bundles over complex tori,
Nagoya Math. J. 41 (1971) 101 - 106.
- (14) _____ : A note on holomorphic vector bundles over quotient mani-
folds with respect to nilpotent groups, Nagoya Math. J. 48
(1972) 183 - 188.
- (15) R. C. Gunning: Some special complex vector bundles over jacobian
varieties, Inv. Math. 22 (1973) 187 - 210.
- (16) H. Umemura: Some results in the theory of vector bundles, Nagoya Math.
J. 52 (1973) 97 - 128.
- (17) H. Umemura: A theorem of Matsushima, Nagoya Math. J. 54 (1974)
123 - 134.
- (18) M. Miyanishi: Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles,
Number Theory, algebraic Geometry, ... in honor of
Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo (1973) 73 - 93.
- (19) A. Mizuhara: On homogeneous P^n - bundle over an Abelian variety, J.
Math. Soc, Japan 26 (1974) 377 - 388.
- (20) Y. Matsushima: Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over
a complex torus. Nagoya Math. J. 63 (1976) 161 - 195.
- (21) J. Hano: A geometrical characterization of a class of holomorphic
vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J. 63
(1976) 197 - 202.
- (22) G. Kempf: Some vector bundles on jacobian varieties, Proc. AMS 54
(1976) 179 - 180.
- (23) _____ : A property of the periods of a prym differential, Proc. AMS
54 (1976) 181 - 184.
- (24) H. Morikawa: A note on holomorphic matrix automorphic factor with
respect to a lattice in a complex vector space, Nagoya

Math. J. 63 (1976) 163 - 171.

- (25) H. Umemura: On a certain type of vector bundles over an abelian variety,

Nagoya Math. J. 64 (1976) 31 - 45.

- (26) _____ : On a property of symmetric products of a curve of genus 2,

Proc. Int. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto (1977)

709 - 721.

- (27) G. Kempf: Toward the inversion of Abelian integrals, I, II, Ann.

of Math. 110 (1979), 243 - 273, Amer. J. of Math. 101

(1979) 184 - 202.

- (28) H. Umemura: Moduli spaces of the stable vector bundles over abelian

surfaces, Nagoya Math. J. 77 (1980) 47 - 60.

- (29) S. Mukai: Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to

Picard sheaves, to appear in Nagoya Math. J. (1981).