

複素射影空間上の有理微分形式のなす複体について

東大 理 奇尾宏明

§1.

X を n 次元複素非特異多様体、 D を X の reduced divisor とする。そのとき、

記号 (1.1): 非負整数 k, q に対し、 X の各点 x で、

$$\Omega^q(kD)_x = \{ \omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x; \\ Q^k \omega \text{ が正則} \},$$

$$\Omega^q(\log kD)_x = \{ \omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x; \\ Q^k \omega \text{ と } Q^k d\omega \text{ がともに正則} \}$$

が定義される。ただし、ここで、 Q は点 x の近傍での D の定義方程式のひとつであり、上記の定義は、 Q の選択に依らない。そして、 k, q のどちらか少なくとも一方が負の整数のときは、 $\Omega^q(kD)_x = \Omega^q(\log kD)_x = 0$ と定義する。

そして、 X 上の ~~解析的~~ 解析的連接層

$$\Omega^q(kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(kD)_x$$

$$\Omega^q(\log kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(\log kD)_x$$

が、定義されて、各々、 D に沿って、高々長位の極をもつ g -形式の芽のなす層とか D に沿って、高々対数的長位の極をもつ g -形式の芽のなす層とか云う。

注意(1.2): この定義は、 D が正規交叉のときは、 $k=1$ のときの P. Deligne の定義と一致するが、 D が一般の因子のときは、斎藤恭司によつて ($k=1$) 導入された。そして、 $\Omega^1(\log D)_x$ を考えると、これは、 $\mathcal{O}_x$ -加群だが、 D が α で正規交叉でない場合は、自由 $\mathcal{O}_x$ -加群になるかどうかはわからない。そして、斎藤は、 $\Omega^1(\log D)_x$ が $\mathcal{O}_x$ -自由になることと、 α のある近傍 $\mathcal{U}$ があって、 $\mathcal{U} \cap (\mathcal{U} - D)$ が $K(\pi, 1)$ になることとは、同値ではないかと予想した。この予想は、間違っていたともきくが、詳しいことは知らない。しかし、これはなかなか面白い予想だと思う。これに、関連して、次のことが成立する。

命題(1.3): $(D, 0)$ を $(\mathbb{A}^3, 0)$ に移ける。reduced divisor の芽とする。そのとき、

$\Omega^1(\log D)_0$ が自由 $\mathcal{O}_0$ -加群 $\iff$ D の特異点のなすスキームは、1次元 Cohen-Macaulay スキーム

同値

例えば、 $\mathbb{C}^2 \setminus \{\text{lines}\}$ の $K(\pi, 1)$ について考えたいときには、 $\mathbb{P}^2 \setminus \{\text{無限の位置の line}\} \setminus \{\text{lines}\}$ としておいて、

結局、 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 内の lines の germs の場合に持ちこめる。

例 (1.4): $\mathbb{C}^2 \setminus \left\{ \begin{array}{c} \text{図} \\ ax+by=-c \end{array} \right\}$ というようなと
(a, b, c のうち、ふたつはゼロでない)

きは、 $Q = xyz(ax+by+cz)$ としておいて、 $D = \{Q=0\}$ の
特異点のなすスキームに対応するイデアル I は、

$I = \{yz(2ax+by+cz), zx(ax+2by+cz), xy(ax+by+2cz)\}$
であり、height $I = 2$ であって、 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}/I$ が Cohen-
Macaulay になることと、 I の素因子の高さがすべて 2 に等
しいことは、同値だが、それは、 $I : (x, y, z) = I$ と同値。

簡単な計算から、

$$I : (x, y, z) = I \iff a, b, c \text{ のうち、どちらかひとつが } 0.$$

がわかる。これは、

$$\mathbb{C}^2 \setminus \left\{ \begin{array}{c} \text{図} \\ ax+by=-c \end{array} \right\} \text{ が } K(\pi, 1) \iff a, b, c \text{ のうち、どれか} \\ \text{ひとつが } 0.$$

なる事実と対応していると思えるかもしれない。

また、

命題 (1.5): $(D_1, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$, $(D_2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$

を、divisors の germs とするとき、(ともに、quasi-homogeneous とする)

$(D = D_1 \times \mathbb{C}^m \cup \mathbb{C}^n \times D_2, 0 \times 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ も divisor の germ になるが. $\Omega^1(\log D)_{0 \times 0}$, $\Omega^1(\log D_1)_0$, $\Omega^1(\log D_2)_0$ のうちのふたつが free なら. 他のもとも free である.

この結果は. $K(\pi, 1)$ の filtration type の判定法に對応していると思えるだろう.

いずれにせよ. 少なくとも. $\mathbb{C}^2 \setminus \{\text{lines}\}$ の場合に. $\Omega^1(\log D)$ が free になるのは. どのような configuration で. 起こりうるのかという問題は (スキーム的な意味は. (1.3) で云われているが...), topology との関係がつかないにせよ. つかないにせよ. 多少は面白いと思う.

記号 (1.6): $A_k^q := \Gamma(X, \Omega^q(kD)),$
 $B_k^q := \Gamma(X, \Omega^q(\log kD)),$
 $A^q = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^q.$

すると. Grothendieck の algebraic de Rham theorem があって.

定理 (1.7): $H^p(A) \cong H^p(X-D; \mathbb{C}).$

但. A とは. $\{\cdots \rightarrow A^{q-1} \xrightarrow{d} A^q \xrightarrow{d} A^{q+1} \rightarrow \cdots\}$ なる複体を表わす.



§ 2.

今、 $A^\bullet$ に、次のよう filtration を入れる。

定義 (2.1):

$$A_{q-k}^\bullet := \{ \cdots \xrightarrow{d} A_k^q \xrightarrow{d} A_{k+1}^{q+1} \xrightarrow{d} \cdots \}$$

すると、 $A^\bullet \supset \cdots \supset A_i^\bullet \supset A_{i+1}^\bullet \supset \cdots \supset A_{m+1}^\bullet = 0$ 。そして、これに付随したスペクトル列を考えて、以下、 $\{E_r^{p,q}, E_\infty^{p,q}\}$ で表わす。すると、P. Griffiths と P. Deligne による、次の結果がある。

定理 (2.2): D が非特異で、十分豊富 ($H^p(X, \Omega^q(kD)) = 0$ が、すべての正整数 p, k について成立) なら、

$$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

が、すべての p, q について成立する。

実は、より強く、 $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$ ($p+q < n = \dim X$)。

注意 (2.3): この定理は、Hodge filtration との関係で、興味がある。詳しくは、Griffiths "On the periods of certain rational integrals I" (Annals of Math., 90 (1969), 460-495) にある。

(2.2) を D が、一般の特異点を許す因子で、 $X = \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ の場合に、拡張することを考える。実は、次の定理が成立する。

定理 (2.4): $X = \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ のとき、

$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$ が、 $1 < p+q < s-1$ をみたすすべての p, q に対して、成立する。但、ここで、 $s = \text{codim}_{\mathbb{P}^n}(\Sigma D)$ で、 ΣD は、 D の特異点の集合を表わす。

この証明のための、道具を少し、準備する。

定義 (2.5): 非負整数 i, k に対して、

$H_k^i := \{ \mathbb{C}^{n+1} \text{ 上の 同次有理 } i\text{-形式で、} \tilde{D} \text{ に沿って、} \\ \text{高さ } k \text{ 位の極を有するもの} \}$

を定義する。但、 $\tilde{D}$ とは、 $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ なる射影によって、 $D \subset \mathbb{P}^n$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の錐として、引き上げたものをいい、'同次' とは、 $\mathbb{C}^{n+1}$ への $\mathbb{C}^*$ -作用 $((\xi_0, \dots, \xi_n) \mapsto (c\xi_0, \dots, c\xi_n), c \in \mathbb{C}^*)$ で、不変なものをいう。

また、 i, k のいずれか少なくとも、一方が、負なら、

$H_k^i = 0$ と定義する。

すると、次のふたつの複体が得られる。

$$L_{i-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d_L} H_k^i \xrightarrow{d_L} H_{k+1}^{i+1} \xrightarrow{d_L} \cdots \}$$

$$L'_{i-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d'_L} H_k^i \xrightarrow{d'_L} H_{k+1}^{i+1} \xrightarrow{d'_L} \cdots \},$$

但、 d_L は外微分作用素、 d'_L は

$$d'_L \omega = \frac{1}{\deg Q} \frac{dQ}{Q} \wedge \omega, \quad \omega \in H_k^i \quad (Q \text{ は } \tilde{D} \text{ の定義方程式}).$$

そして、

$$L = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} L_i \supset \cdots \supset L_i \supset L_{i+1} \supset \cdots \supset L_{n+2} = 0,$$

$$L' = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} L'_i \supset \cdots \supset L'_i \supset L'_{i+1} \supset \cdots \supset L'_{n+2} = 0.$$

なるふたつのフィルターづけられた複体を得られる。

さて、 A と L , L' との間の射をつくるのに、次の図式を考える。

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \supset \mathcal{E} \cong \mathbb{P}^n \\ \neq \downarrow \\ \mathbb{C}^{n+1} \supset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \end{array}$$

但、 $\neq$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点中心の blowing up、 π は標準射影、 $\mathcal{E}$ は $\neq$ から決まる例外因子である。

$p: H_k^i \rightarrow A_k^{i-1}$ なる準同型を

$$p(\omega) = \text{res}_0 \neq^* \omega \quad (\omega \in H_k^i)$$

で定義する。ここで、 res とは、 $(\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}, \mathcal{E})$ について

の留数をとることとする。

$$\begin{array}{ccccc}
 H_k^i & \xrightarrow{P} & A_k^{i-1} & \xrightarrow{\pi^*} & H_k^{i-1} \\
 d_L \downarrow \downarrow d'_L & & \downarrow d & & d_L \downarrow \downarrow d'_L \\
 H_{k+1}^{i+1} & \xrightarrow{P} & A_{k+1}^i & \xrightarrow{\pi^*} & H_{k+1}^i
 \end{array}$$

なる図式に於て、次の補題が成立つ。

補題 (2.6):

- (i) $d \circ d = 0$, $d_L \circ d_L = d'_L \circ d'_L = 0$,
- (ii) $d_L \circ \pi^* = \pi^* \circ d$,
- (iii) $d_L \circ d'_L + d'_L \circ d_L = 0$,
- (iv) $d \circ P = P \circ d_L$
- (v) $P \circ \pi^* \circ P = 0$
- (vi) $d'_L \circ \pi^* \circ P + \pi^* \circ P \circ d'_L : H_k^i \rightarrow H_{k+1}^i$ は、包含写像に他ならない。
- (vii) P は全射である ($i > 1$)

また、次の補題は、斎藤恭司による。

補題 (2.7): (一般化された de Rham の補題)

$H^q(L_i) = 0$ が $q < s-1$ に対して成立する。

補題 (2.8):

$H^p(G_r^q L^\cdot) \xrightarrow{\alpha} H^p(G_r^{q'} L^\cdot)$ がすべての p, q について同型になる。但、 α は $H_k^i \rightarrow H_k^i$ なる恒等写像から induce された写像とする。

これらを使って、(2.4) を証明する。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q+1}(G_r^{p+1'} L^\cdot) & \xleftarrow{\delta} & H^q(G_r^{p'} L^\cdot) \\
 \alpha' \downarrow & & \uparrow \alpha \\
 H^{q+1}(G_r^{p+1} L^\cdot) & & H^q(G_r^p L^\cdot) \\
 & \searrow p^* \quad \nearrow \pi^* & \\
 & H^q(G_r^p A^\cdot) &
 \end{array} \quad (q \geq 1)$$

ここで、 π^* は $\pi^*: A_k^q \rightarrow H_k^q$ から induce されたもの、 p^* は $p: H_k^{q+1} \rightarrow A_k^q$ から induce されたものとする。また、 δ は、

$$0 \rightarrow G_r^{p+1'} L^\cdot \rightarrow L_p' / L_{p+2}^\cdot \rightarrow G_r^p L^\cdot \rightarrow 0$$

の Bockstein 写像とする。

$\psi \in A_{k+2}^q$ に対して、 $p \circ d_L' \circ \pi^* \psi$ なる元を考えると、(2.6) の (vii) から、 $\psi = p(\zeta)$ なる $\zeta \in H_{k+2}^{q+1}$ があるから、

$$\begin{aligned}
 & p \circ d_L' \circ \pi^* \psi \\
 &= p \circ d_L' \circ \pi^* p(\zeta) \\
 &= p(\zeta - \pi^* p \circ d_L' \zeta) \quad ((4.3) \text{ の (vi)})
 \end{aligned}$$

$$= \rho \zeta \quad ((4.3) \text{ の } (V))$$

$$= \psi$$

これは、前頁の図式に於て、 $\rho^* \alpha^{-1} \delta \alpha \pi^*$ が恒等写像であることを示す。一方、一般に、 δ は、

$$\begin{array}{ccc} H^q(G_r^{p'} L) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G_r^{p+1} L) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & H^{q+1}(L_{p+1}) & \end{array}$$

と分解するから、(2.7) と組み合わせ、(2.4) が示される。

(2.4) の系として、次のことがわかる。

系 (2.9): $H^r(\mathbb{P}^n - D; \mathbb{C}) = 0$ が $1 < r < s-1$ に対して成立する。

注 (2.10): このことは、topological には、加藤十吉の 'partial Poincaré duality' に対応している。

系 (2.11): $B_i^i = T(\mathbb{P}^n, \Omega^i(\log D)) = 0$ が $1 < i < s-1$ に対して成立する。

§ 3.

$\{E_r^{p,q}, E_\infty^n\}$ の E_2 -terms の意味とその必要性を explicit

に考える。

定理 (3.1): 次の列は完全である,

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow E_2^{q-k-1,k} \rightarrow H^q(B_{k-1}) \rightarrow H^q(B_k) \rightarrow E_2^{q-k,k} \rightarrow H^{q+1}(B_{k-1}) \\ \rightarrow H^{q+1}(B_k) \rightarrow \cdots, \quad \text{但. } B_k \text{ とは } \{ \cdots B_k \xrightarrow{d} B_k \xrightarrow{d} B_k \cdots \} \\ \text{なる複体のことをいう.} \end{aligned}$$

~~定理~~

この定理は $E_2^{p,q}$ が、対数的極をもつ微分形式からなる複体のコホモロジーと深い関係にあることを示している。

もし $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ がすべての p, q について成立するよう
な (X, D) に関しては、(この例は、次の § で示す)

$H^q(B_k) = \bigoplus_{i=0}^k E_2^{q-i,i} = \bigoplus_{i=0}^k E_\infty^{q-i,i} \hookrightarrow H^q(X-D; \mathbb{C})$
が成立することがわかる。いいかえれば、 $H^q(X-D; \mathbb{C})$
の元が、 B_k のコホモロジー類で表わされている。

1 次元のコホモロジーについては、

定理 (3.2): $X = \mathbb{P}^n$ のとき、

$$E_2^{0,1} = E_\infty^{0,1}, \quad \text{いいかえれば}$$

$$H^1(B_1) \cong H^1(\mathbb{P}^n - D; \mathbb{C}) \text{ が成立する.}$$

注 (3.3): 一般に、 $E_1^{0,1} \neq E_2^{0,1}$, 即ち、開形式でない B_1

の元が存在することがある。例えば、 $Q = x^3 + y^2z$ を $\mathbb{P}^2$ 内の因子の定義式とすると、

$$\omega = \frac{3yzdx - 2zx dy - xydz}{x^3 + y^2z}$$

は、 B_1^1 の元だが、閉形式でない。こういうことは、 D が正規交叉のときには、起こりえない (Deligne: "Théorie de Hodge II")

§ 4.

ある種の D に対しては、 $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ が、計算で示せる。

定義 (4.1): Q が同次多項式のとき、 Q が 分離型 とは、

Q が 共通変数 をもたない単項式たちの和で書けることを云う。

$x^3 + y^2z$, $x^m + y^m + z^m$, αyz などが、その例である。

そのとき、そのような Q で定義された $\mathbb{P}^n$ 内の因子を D とすると、

定理 (4.2): $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ が、 $p+q=n$ のとき、成立する。

よって、(2.4) と組み合わせると、

系 (4.3): D が (4.2) の如きもので、しかも、孤立特異

点を有するとすれば、

$$E_2^{P.g} = E_\infty^{P.g}.$$

が、すべての $P.g$ について成立する。