

Decomposing h-moves between two nice immersions
into elementary deformations

東工大理 永瀬輝男 (Teruo Nagase)

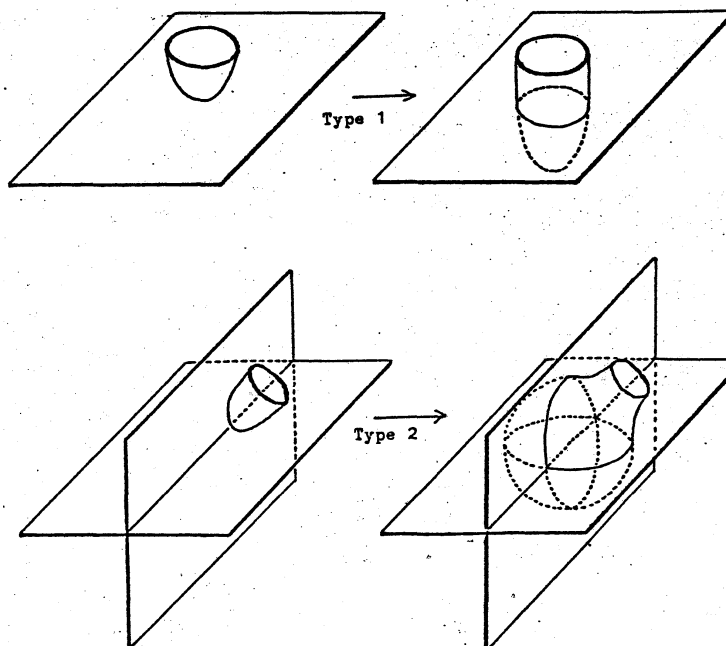
Theorem Let $f_1, f_2: F^2 \rightarrow M^3$ be nice immersions.

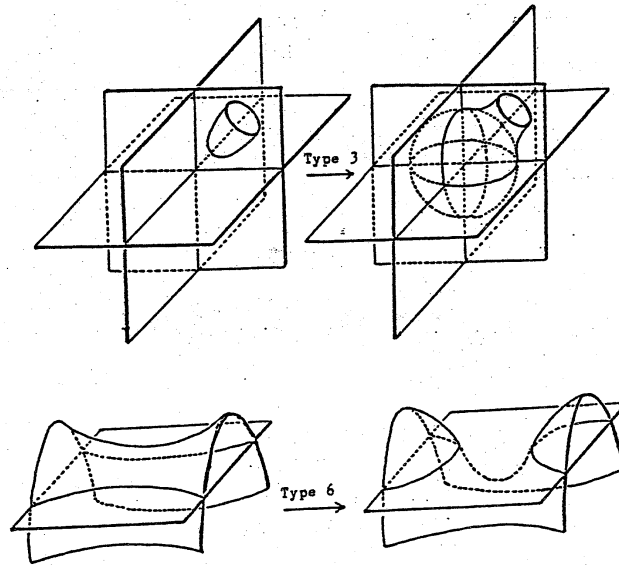
If f_1 is deformed to f_2 by a single h-move, then

f_1 is deformed to f_2 by a finite sequence of

elementary deformations of Type $1^\pm, 2^\pm, 3^\pm$, and 6,

shown bellow.





§ 1 定義

定義1 写像 $f: F^2 \rightarrow M^3$ が、次の3つの条件を満すとき、 f は nice であると言われる:

- (1) f は非退化的,
- (2) 像 $f(F)$ は、 M の内部 $\text{Int } M$ に含まれる,
- (3) f の singularities $\{y \in f(F) \mid f^{-1}(y) \text{ は } 2 \text{ 点以上}\}$ は、

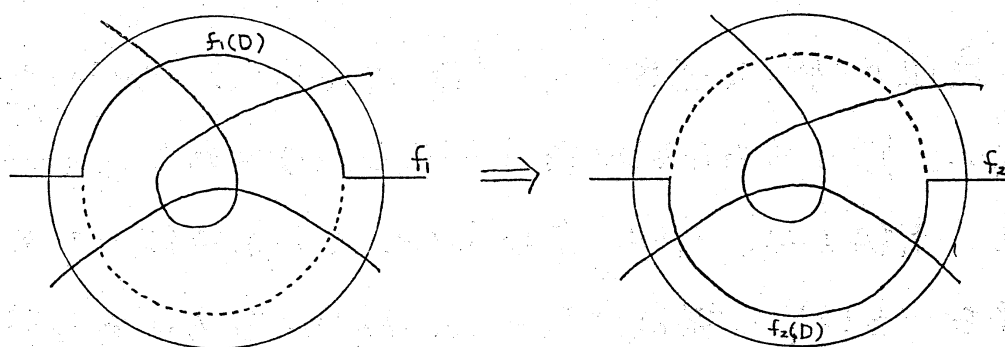
double curves, triple points, 及び branch points から成る.

定義2 二つの nice な写像 $f, g: F^2 \rightarrow M^3$ に対して、次の二つの条件を満す円板 $D^2 \subset F$ と、球体 $B^3 \subset M$ が存在するとき、変形 $f \mapsto g$ は、 R -move であると言われる:

- (1) f と g は、 D の外部で一致する,
- (2) $f(D) \cup g(D) \subset \text{Int } B$.

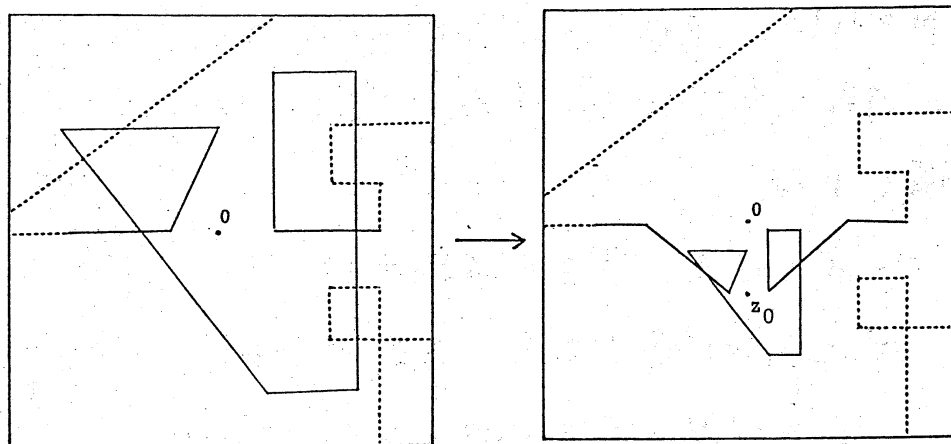
§2 基本変形の合成により得られる変形

(1) Pushing-disk: $f_1(D) \cap f_2(D) = f_1(\partial D)$ であり, $f_1(D) \cup f_2(D)$ が、ある球体の表面となるとき、 f_1 を f_2 に置き換える操作.



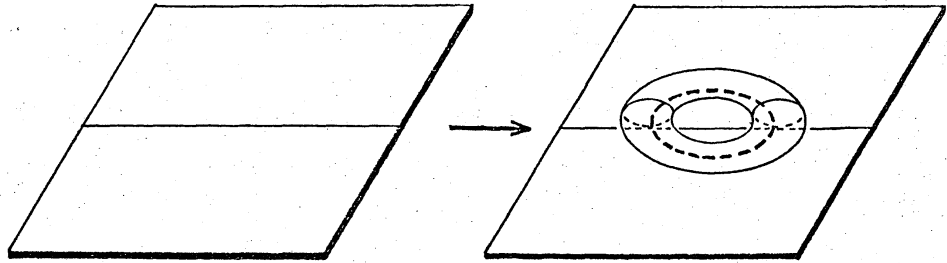
但し、 $f_1(D) \cup f_2(D)$ は ball を bound する.

(2) Shrinking-off: 直感的には、 $f_1(D)$ を相似的に縮める操作.



(3) S-move: Shapiro による球面の裏返しは、基本変形の合成として表わされる. この変形を用いて得られる操作 (集合的には、局所的に、平面に、その平面に接するト-

ラスを添加する操作) :

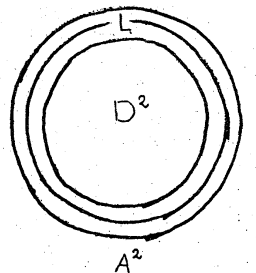


(4) 定理の特別な場合: $f_1|D$ 及び $f_2|D$ が埋め込み写像とする. D のある正則近傍 $N = N(D, F)$ に対し, $A^2 = N - \text{Int} D$ とする. $f_1(A)$ が, $f_1(N)$ 及び $f_2(N)$ を含む球体 B の中で平坦 (即ち, $f_1(A)$ は換れがない i.e. $f_1(A)$ は B 内のある円板に含まれる) な円環であるとき, f_1 を f_2 に置き換える操作.

§ 3 定理の証明の方針

f_1 と f_2 は, 円板 $D^2 \subset F$ の外部で一致しており, D のある正則近傍 $N = N(D, F)$ に対して, $f_1(N)$ 及び $f_2(N)$ は, ある球体 $B^3 \subset M$ の内部に含まれるとする. $A^2 = N - \text{Int} D$ とおくと, A は円環である.

Step 1 一般の位置に関する議論によって, $f_1|A$ は, 埋め込み写像であると仮定してよい.



Step 2 円 L を円環 A の中心線とする. Type 1 の操作を何度か施し, D 及び N を適当に選べ直せば, $f_1(L)$ は, 球体 B の中で, 自明な結び目であると仮定してよい.

Step 3 $f_1(N)$ が, はめ込まれた円板であるという事実より,

□ $f_1(A)$ は、偶数回捩れの円環である。

ことが示せる。従って、 ϕ -move を何度か施すことにより、 $f_1(A)$ は、平坦であると仮定してよい。

Step 4 球体 B を $I \times I \times I$ と同一視する。step 3 から、 $f_1(A)$ は、円板 $I \times I \times \frac{1}{2}$ の上にあるとしてよい。 $g: F \rightarrow M$ を次の二つの性質をもつ埋め込み写像とする: (1) $g|_N$ は N から円板 $I \times I \times \frac{1}{2}$ への埋め込み写像で、(2) g は N の外部で f_1 と一致する。以下に於て、 $f_i \mapsto g$ ($i=1, 2$) が基本変形の合成であることを示す。

このとき、 D 及び N を適当に選び、さらに、 B と $I \times I \times I$ の同一視の仕方を適当に選べば、 $f_1(D) \subset I \times I \times [\frac{1}{2}, 1]$ であると仮定してよい。

Step 5 D の三角形分割 T で、次の二条件を満たすものがある:

(1) f_1 と g は、共に T の各単体を線形に写す、

(2) $f_1|_{T^{(1)}}$ は埋め込み写像である、

ここで、 $T^{(i)}$ は T の i -切片である。

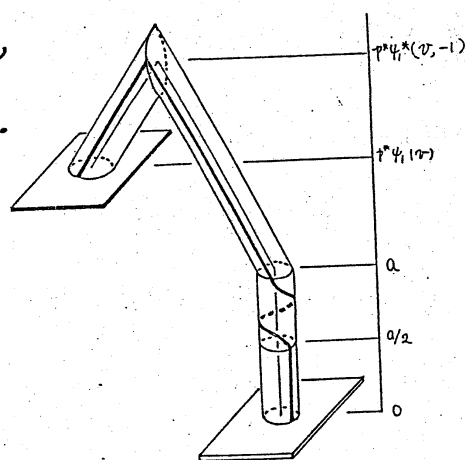
Step 6 各頂点 $v \in T^{(0)}$ に対して、

$f_1(v)$ と $g(v)$ を結ぶ折線 $L(v)$ を右図の

様に定める、但し、各 1 単体 $\sigma =$

$(v, w) \in T^{(1)}$ に対して、結び目

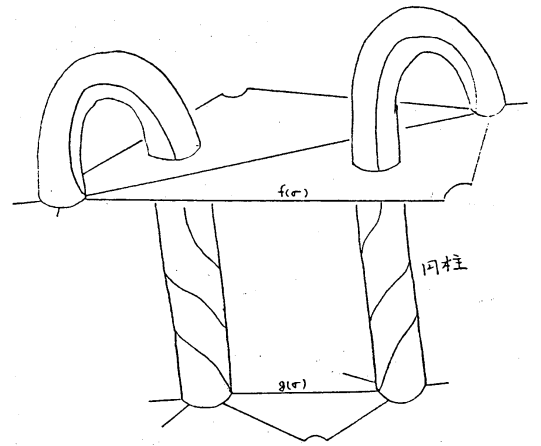
$f_1(\sigma) \cup L(v) \cup g(\sigma) \cup L(w)$ は、自明な



$L(v)$: fine graph in the tube
 $L(\sigma, v)$: heavier graph

結ひ目である。

Step 7 T を適当に選べば、各 2 単体 $\tau \in T$ は、高々 1 つの $L(\tau)$ としか交わらないと仮定してよい。

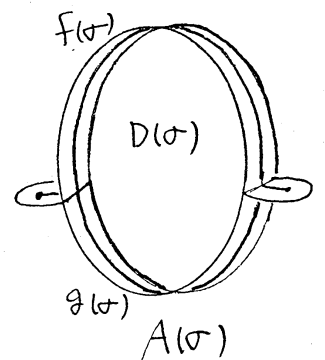


Step 8 各 $L(\tau)$ に沿って f_i に

Pushing-disk を施せば、 f_i と g_i は、 $T^{(i)}$ の近傍で一致していると仮定してよい。このとき、Pushing-disk を適当に選ぶと、 $|T|$ が円板である事実を用いて、各 1 単体 $\sigma \in T^{(i)}$ に対して、 $f_i(\sigma) \Delta g_i(\sigma)$ の $f_i(D) \Delta g_i(D)$ に於ける正則近傍は、偶数回接れる円環であると仮定してよい。但し、 $X \Delta Y$ は、 X と Y の対称差の閉包 $\mathcal{C}(X \cup Y - X \cap Y)$ 。

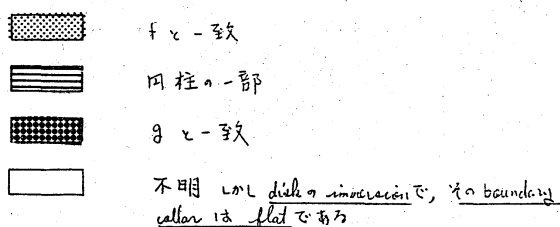
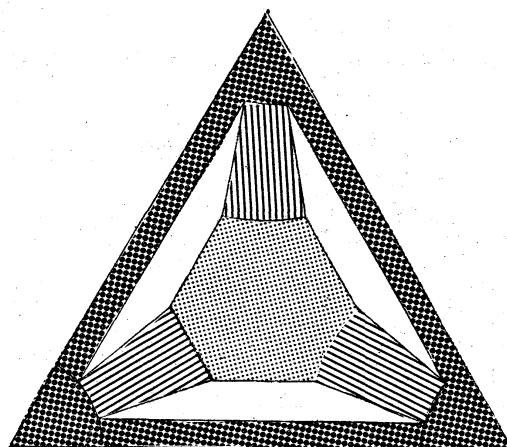
Step 9 再び ϕ -move を何度か施せば、 $f_i(\sigma) \Delta g_i(\sigma)$ の $f_i(D) \Delta g_i(D)$ に於ける正則近傍は平坦な円環 $A(\sigma)$ であると仮定してよい。

Step 10 $A(\sigma)$ に対して、その境界で、横断的に交わる円板 $D(\sigma)$ に沿って、Pushing-disk を施せば、 f_i と g_i は $T^{(i)}$ の近傍で一致すると仮定してよい。

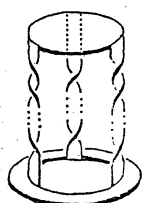


現在までの所、各 2 単体 $\tau \in T$ に対して、次の頁の図の様な状況である。不明とされている各円板に対して、定理の特

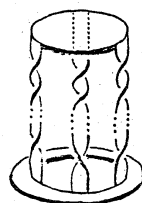
別な場合が通応出来る。即ち、不明な部分の f_i により埋め込まれた各円板は、どのような埋め込まれた円板に置き換えても良い。以下に於て、置き換えるべき円板を具体的に構成する。不明な部分以外の部分 (f_i と一致する部分、円柱の一部、及び g_i と一致する部分) を 車輪 と呼ぶことにする。



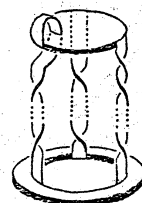
Step 11 各車輪は本質的に異なるものは3種類で、一般には、円柱の一部と言われる円板に、いく



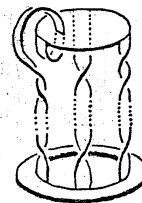
Type 1



Type 1'



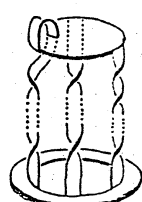
Type 2



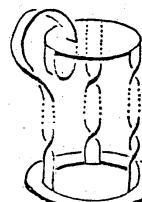
Type 2'

つかの R^+ -円板及び R^- -円板がはめ込まれていることが示せる。

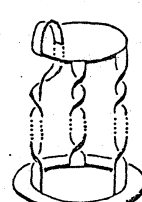
Step 12 Type 1 の車輪は、適当に不明な円板を補えば、 S -move によって得られるはめ込まれた円板を得る。これによって、 f_i は g_i に基本変形で移れることに



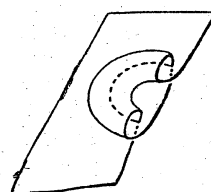
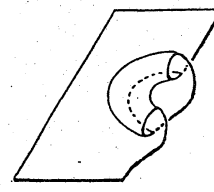
Type 3



Type 3'



Type 3''

 R^+ -disk R^- -disk

なる。右図は、 R^+ -円板が1つある時の場合で、下の様な3枚の円板(うち1つは、はめ込まれた円板だが...)を補えば良いだろう。

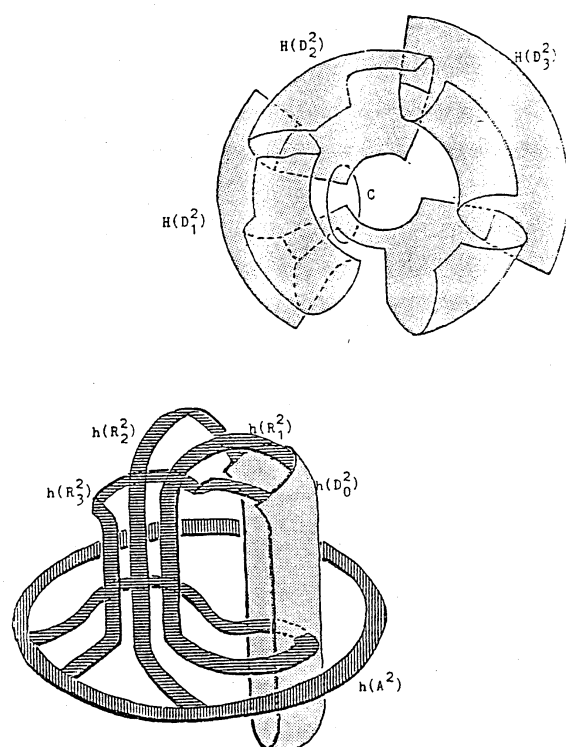
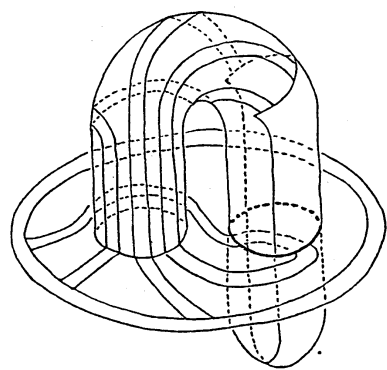
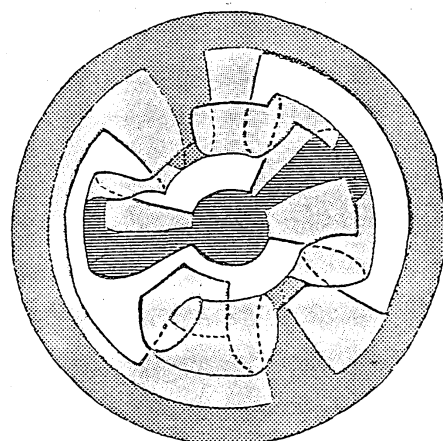
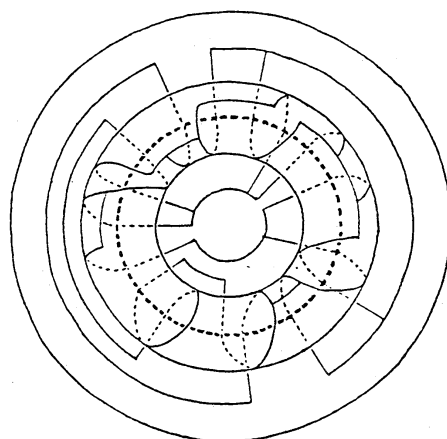


Figure 3.8

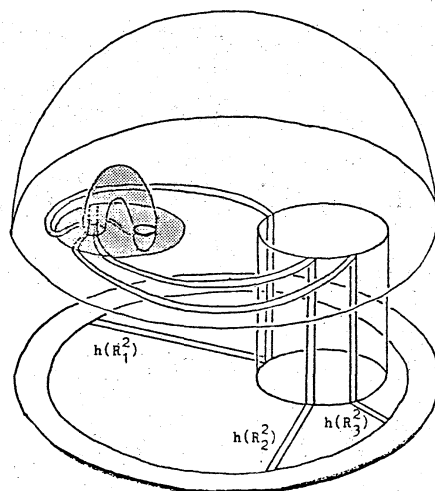
The double loop : Heavier thicken or broken curve
Figure 3.9

$h(D_0^2)$: $h(R_1^2)$: $h(A^2)$

The double line : Heavier broken circle
(Top view of S-disk)

Step 13 Type 乙の車輪は、簡単な場合、図3.8の様になる。これは、適当に埋め込まれた円板を補うことにより、double curveが1つあるはめ込まれた円板に拡張される(図3.4)から、Type 1-の基本変形によって、 α は β に移れるだろう。

Step 14 Type 3 の車輪は Type 2 の車輪の拡張の仕方を用いて右図の様に埋め込まれた円板を補うことにより、double curve が 1 つあるはめ込まれた円板に拡張される。従って Type 2 の車輪と同様にして、Type 1 の基本変形によって、 f_1 は g に移れるだろう。



■ : copy of Figure 3.9

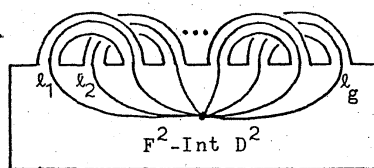
以上で、定理は証明されたことになる。

§4 応用

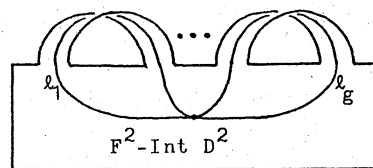
M^3 を向き付け可能な 3 次元閉多様体とする。 M は、3 次元球面 S^3 内の evenly framed link L に沿っての surgery によって得られる。即ち、

$M = M_L$; L は evenly framed link in S^3 .

閉曲面 F^2 の 1 次元ホモロジー群の生成元 $[l_1], \dots, [l_g]$



Orientable



Non-orientable

D^2 : a disk in F^2

を右図の様に定める。

はめ込み写像 $f: F \rightarrow M$ に対して、準同型写像

$N_L(f): H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を次の式で定義する:

$N_L(f)[l_i] \equiv f(N_i)$ の S^3 の中での捩れ数 (mod 2)

但し、 N_L は曲線 L の F に於ける正則近傍。

さらに、2つのはめ込み写像 $f, g: F \rightarrow M$ がホモトピーックなとき、準同型写像 $N(f, g): H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を次の式で定義する:

$$N(f, g) \equiv N_L(f) - N_L(g) \pmod{2}$$

但し、 L は $M = M_L$ を指す任意の *evenly framed link in $\mathbb{S}^3$* .

すると、次が成立つ。

定理 $N(f, g)$ は *well-defined* である。

定理 次の3つの命題は同値である。

- (1) f から g へ基本変形の合成で移れる。
- (2) f と g は *regular homotopic* である。
- (3) f と g は *homotopic* であり、 $N(f, g) = 0$ 。

系 はめ込み写像 $f: F^2 \rightarrow M^3$ のホモトピー類 $[f]$ を *regular homotopy* で分類すると $2^{2-\chi(F)}$ 個のクラスに分れる。

系 (James & Thomas)

$f: F^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の *regular homotopy class* は $2^{2-\chi(F)}$ 個である。

付録として、次の頁に Shapiro による球面の裏返し L の仕えを載せておきます。これは *Scientific American* (1966年5月号) からのコピーです。

